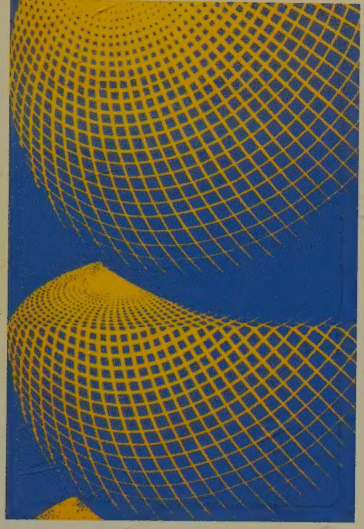


# DICCIONARIO AKAL DE MATEMÁTICAS

A. BOUVIER
M. GEORGE

AKAL / BÁSICA DE BOLSILLO

DEC 26 2013

**AKAL** / BÁSICA DE BOLSILLO **110**

# Diccionario Akal de Matemáticas

NO LONGER PROPERTY OF
SEATTLE PUBLIC LIBRARY

Diseño interior y cubierta: RAG
Maqueta de portada: Sergio Ramírez
Título original: *Dictionnaire des Mathématiques*

© Presses Universitaires de France, 1979
© Ediciones Akal, S. A., 2005
para lengua española
Sector Foresta, 1
28760 Tres Cantos
Madrid - España
Tel.: 918 061 996
Fax: 918 044 028
**www.akal.com**

ISBN : 84-460-1254-5
Depósito legal: M. 2050-2005

Impresión:
Fernández Ciudad, S. L.

Impreso en España

Reservados todos los derechos. De acuerdo a lo dispuesto en el artículo 270 del Código Penal, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reproduzcan sin la preceptiva autorización o plagien, en todo o en parte, u obra literaria, artística o científica, fijada en cualquier tipo de soporte.

Alain Bouvier y Michel George
Bajo la dirección de
François le Lionnais

# Diccionario Akal de Matemáticas

Traducción de
Mauro Armiño
y Vicente Bordoy

Revisión científica
Antonio Pérez Alonso
y Luis Grajal

-akal-
EDICIONES

# *INTRODUCCION*

*Aunque un diccionario, trabajo de erudición, no tenga por meta un nivel tan ambicioso como la creación matemática, está sometido a los mismos imperativos de honestidad científica y no es pequeña empresa, tras haberlo conseguido, edificar uno. Uno no se da cuenta plenamente —no sin «temor y temblor»— hasta el momento en que se deshace del manuscrito para confiárselo al editor. Entre la época en que mi idea de un diccionario de matemáticas comenzó a nacer, luego aquélla en que la participé a Alain Bouvier y a Michel George, y la fecha del «listo para tirar», pasando por las discusiones palabra tras palabra, he pensado con frecuencia en la respuesta de Gauss a un amigo que le invitaba a desistir de su perfeccionismo y a vencer su repugnancia a publicar sus hallazgos:* In gaudio concipitur, in dolore parturi. *Concebido en la alegría, dado a luz en el dolor, mis amigos y yo esperamos que el niño que acaba de nacer encuentre interés en sus lectores.*

## LOS OBJETIVOS Y LOS CRITERIOS

*Al proyectar este libro había visto objetivos muy diferentes, algunos de los cuales, llevados al límite, corrían el riesgo de ser si no contradictorios al menos apenas compatibles entre sí. ¿De qué matemáticas quería yo nutrirlos? ¿Para qué usuarios?*

### 1. ¿Qué matemáticas?

*Por supuesto, y es una suerte, se puede hacer un diccionario como el que yo soñaba sin estar seguro de saber con precisión absoluta dónde comienzan, dónde terminan y de qué están hechas las matemáticas. Es por lo menos necesario ponerse de acuerdo en el mayor número de puntos que derivan indiscutiblemente de esta disciplina. Son nuestros programas de enseñanza (en todos los grados: primario, secundario, universitario, técnico) los que han suministrado el cuerpo principal de la obra. Principal pero no único. Los programas actuales no escaparán al destino de sus predecesores: cambiarán con la llegada de nuevas generaciones. Pero —aquí y ahora— han merecido constituir el núcleo homogéneo y sólido a cuyo alrededor se ha podido organizar, sobre la tela de fondo de mis gustos personales, cierta disparidad.*

*De este modo, el Diccionario acoge:*

a) *Términos en vía de desaparición (algunos completamente desaparecidos incluso) que en nuestra opinión presentan un interés no sólo histórico, sino matemático, y que frecuentemente se encuentran en trabajos del siglo XIX y de principios del XX. No obstante, por regla general no hemos pretendido desarrollar la historia de las matemáticas. Nuestro objetivo no era dar al César lo que le pertenece, sino bautizar cada noción con la palabra que generalmente está asociada a ellas como una etiqueta, y que permite clasificarlas por orden alfabético. Por eso,*

*aunque Pascal no haya descubierto el triángulo que lleva su nombre, llamamos a ese triángulo, según la costumbre más difundida, triángulo de Pascal.*

b) *Lo que con un matiz generalmente condescendiente, peyorativo incluso (aunque los grandes matemáticos no caigan en ese yerro), se califica de matemáticas recreativas o divertidas, o de juegos matemáticos.*

c) *Las grandes cuestiones que afectan a los fundamentos y a la validez de nuestra disciplina, y que están más o menos teñidos de metafísica.*

d) *Los aspectos que adoptan las matemáticas, o las formas en las que se encarna, para mejor adherirse a realidades no matemáticas, y que desembocan en modelos científicos o técnicos o en aplicaciones industriales, económicas o administrativas.*

e) *Al proseguir con nuestra preocupación pedagógica, nos pareció necesario no perder el contacto con la vulgarización científica, no sólo cuando es de calidad, sino también en sus merengues. Cotidianos y periódicos de gran tirada no han vacilado en aceptar palabras como «catástrofes» o «conjuntos blandos». No hubiera sido pensable que estuvieran ausentes de este volumen. Es el mejor medio de limitar ciertos abusos de que a veces son víctimas los matemáticos. Así es como hace un siglo se invocaba la «cuarta dimensión» para justificar el espiritismo y, algunos años más tarde, para explicar el cubismo. En nuestros días, la topología (o más bien la idea que algunos se hacen de ella) interviene en textos en que poco tiene que hacer, empezando por los catálogos de exposiciones de pinturas de vanguardia. En lugar de ridiculizar contrasentidos ingenuos o de encogerse aristocráticamente de hombros, ¿no era mejor trabajar por disminuir la distancia entre ignorancia y conocimiento?*

*Todo esto —las palabras «principales» y las «secundarias»— representan 7.600 artículos, acompañados de 700 ilustraciones.*

## 2. ¿Para qué usuarios?

*Eso por lo que se refiere a los dominios y nociones llamadas a ser el cuerpo del diccionario. Era evidente que su reunión no interesaba —dejando de lado a una minoría— a los mismos lectores. Desearíamos alcanzar públicos muy diversos, teniendo en cuenta, dentro de lo posible, el uso que harían del diccionario, pero también el nivel y la especificidad de su formación matemática, de su cultura general e incluso de la idea que pueden hacerse de la naturaleza y del papel de las matemáticas.*

*De ello debía resultar la adopción de diversos criterios, tanto en la selección de las palabras que sirven de entradas o subentradas como en el contenido de los textos unidos a esas palabras, igual que en los estilos de redacción de los artículos.*

## 3. La selección de las palabras

*Un diccionario de matemáticas no es en sí mismo un «objeto» matemático; no posee estructura matemática, aunque su ambición consista en hacer conocer un poco y ayudar a comprender mejor algunos de esos objetos, algunas de esas estructuras. En otras palabras, no es una «aplicación» de un conjunto de palabras sobre un «conjunto de ideas» por la sencilla razón de que la expresión «conjunto de ideas» no tiene sentido en matemáticas*[1].

*Evidentemente, y por supuesto, debe contener una mayoría de palabras matemáticas. Pero también debe construirse con palabras no matemáticas —y ante todo la*

1. Aunque DEDEKIND haya hablado de un «conjunto de pensamientos», pero eso era en la época en que la germinación de la teoría de los conjuntos comenzaba a liberarse de una ganga filosófica.

*palabra «matemática» que no es una palabra matemática—, algunas de las cuales son frecuentemente utilizadas por los matemáticos. Eso sin contar, por supuesto, con todas las palabras del lenguaje corriente, que es preferible, aunque a veces resulte muy difícil, utilizar correctamente.*

*Hemos querido que figure el mayor número posible de términos, a fin de que cada pregunta tenga una respuesta. No hemos excluido ni los términos desusados ni el lenguaje más reciente (que realmente no es empleado con provecho más que en un nivel matemático ya avanzado) ni las «curiosidades» matemáticas ni los barbarismos y neologismos que se desarrollan en la hora actual en la enseñanza elemental y secundaria, o más allá. Aunque las geometrías del plano y del espacio (curvas notables, teoremas célebres, etc.) hayan desaparecido de nuestra enseñanza secundaria, las hemos hecho figurar en el lugar que nos parecía corresponderles.*

*En el dominio de las matemáticas aplicadas aparecen términos específicamente matemáticos que podrían haberse visto figurar en los antiguos cursos de técnica matemática de la física o que hoy aparecen en cursos de matemáticas dedicados a ciertos ingenieros.*

*Hemos rechazado de plano la solución fácil que consiste en reagrupar en artículos* enciclopédicos *los términos de una misma familia, por ejemplo, en* ALGEBRA, *«grupo, anillo, módulo, cuerpo, espacio vectorial, etc.», en* ANÁLISIS, *«continuidad, límite, etcétera». El lector de un diccionario de* matemáticas *está en su derecho, con justo motivo, de exigir del término que busca una definición neta y precisa, sin que se le imponga la lectura de un verdadero curso condensado de matemáticas.*

*En la medida de nuestras posibilidades hemos señalado las diferentes nociones en uso en los países de cultura francesa o anglosajona. Estas notaciones están agrupadas en anexos independientes que indican el lugar en que pueden encontrarse explicaciones más amplias al respecto.*

## 4. Las definiciones

*No siempre hemos podido adoptar una actitud uniforme frente a todos los términos que hemos hecho figurar en este diccionario. En líneas generales podemos distinguir cuatro tipos de definiciones:*

a) *Aquéllas para las que, independientemente de toda cuestión de nivel, apenas podemos elegir la definición a adoptar (a menos que se busque una originalidad que estaría fuera de lugar en una obra semejante). Por ejemplo, la definición de un grupo no es función del nivel matemático en que podemos colocarnos. Cuando esta definición se explicita en la enseñanza, ya en cuarto, ya en último curso de bachiller, ya en la enseñanza superior, la definición que se ofrece al alumno o al estudiante es la misma*[2].

b) *Aquéllas que para ser rigurosas necesitan una alta tecnicidad y el examen de un gran número de casos particulares. Tal es el caso, por ejemplo, de las definiciones de palabras como «catástrofes», «ergodicidad», «inmersión», etc. En este caso, hemos avisado al lector cada vez que, en el nivel considerado, no podíamos*

2. Cierto que a ojos del profano una misma noción matemática puede parecer que es definible de muchas maneras diferentes. De hecho todas estas versiones deben ser obligatoriamente equivalentes, no pudiendo surgir las diferencias más que en el orden de enumeración de los constituyentes (cuando este orden es indiferente) o al reemplazar algunos de esos constituyentes por su agrupamiento o por una sola palabra. Estas diferencias formales pueden corresponder a las mentalidades de los redactores o servir para traducir intenciones pedagógicas. Así es como he podido apuntar en diccionarios o tratados más de una decena de definiciones, rigurosamente idénticas en el fondo pero diferentes en la forma, de la palabra «grupo».

*presentar una definición correcta y precisa. Esta nos habría obligado a introducir un excesivo número de palabras suplementarias y a aumentar el nivel y el volumen del diccionario en una proporción que no tendría relación con los objetivos fijados. Entonces nos hemos contentado con dar una idea intuitiva de aquello de que se trata y un primer acercamiento a la definición.*

c) *Términos matemáticos que el público encuentra a lo largo de sus estudios, primero en un nivel elemental, nivel en el que ya se puede dar una definición correcta y precisa; luego, al avanzar en sus estudios, cuando descubre extensiones de ella en casos cada vez más generales. Ese es por ejemplo el caso de la noción de función derivable y de anillos de polinomios. ¿Deben definirse las funciones derivables numéricas de una variable real o las funciones derivables de un espacio formado en otro? ¿Debíamos definir los polinomios reales en una indeterminada o los polinomios en una familia cualquiera de indeterminadas y en coeficientes de un anillo cualquiera? Para estos términos, no podíamos decidir de antemano por una regla general estricta y precisa. Por el contrario, hemos examinado cada caso y hemos hecho, para cada uno de ellos, una selección que puede expresarse en términos de niveles matemáticos. Nuestra principal preocupación ha sido entonces presentar una definición aceptable para el alumno de fin de ciclo secundario. La definición escogida es aquélla que mejor se presta, en nuestra opinión, a las extensiones sucesivas que el estudiante puede encontrar luego en la enseñanza superior.*

d) *Existen términos utilizados frecuentemente en matemáticas aunque no pertenezcan a las matemáticas, y que no admiten definiciones precisas más que en determinado contexto. Se trata, por ejemplo, de ecuación, de espacio, de parámetro, de variable, etc. Entonces las hemos señalado y hemos intentado tratar de esclarecer las ideas del lector a su respecto, remitiéndoles, cuando existen, a casos particulares.*

*Todos los términos matemáticos utilizados en una definición están definidos por principio en el diccionario. Salvo excepciones, no nos ha parecido indispensable entonces señalar todas las remisiones correspondientes.*

*En el vocabulario matemático figuran numerosas locuciones. Por eso era preciso ponerse de acuerdo en un sistema ágil de remisiones. En general, se hace al adjetivo. Así, «espacio topológico» figura en «topológico». Pero en caso de duda no hemos vacilado en multiplicar las remisiones.*

*Finalmente, para evitar las peticiones de principio, nos hemos visto obligados, en raros casos, a distinguir la lengua de la metalengua.*

## 5. El acompañamiento de las definiciones

*Las definiciones no encierran frutos salvo que vayan acompañadas de complementos, que pueden ser bien comentarios propiamente dichos, bien ejemplos, bien ilustraciones (que juegan el papel de comentarios). La decisión de introducir (o de dejar de lado) tal o cual clase de complemento depende de los objetivos y de los criterios que hemos enunciado anteriormente.*

*Puede existir interés en no disociar cierto número de ideas matemáticas de la vida y de la cultura donde las han encontrado los matemáticos. Cuando se arranca una mata de hierba se lleva uno con ella un poco de tierra nutricia. ¿Hay que limpiarla y aseptizarla para presentarla en un herbario? Legítimo y necesario en ciertos casos, no hemos creído que deba ser respetado sistemáticamente ese prejuicio, aunque no fuera más que para tener en cuenta la diversidad de públicos que deseamos alcanzar. Yendo más lejos en el mismo sentido, hay casos (el menor número posible) en que*

*hemos juzgado preferible renunciar a definiciones correctas y adoptar «definiciones aproximadas», surtidas de comentarios que apuntan a explicar sus prolongaciones filosóficas o culturales o a numerar los dominios de aplicaciones a que pueden conducir. Tal es el caso de ciertas palabras que pertenecen a un nivel técnico por encima del listón medio que nos hemos fijado, pero cuya existencia conoce gran parte del público. No explicitar lo que significan permitirá evitar confusiones limitando los sentidos y mostrando cómo se insertan en el pensamiento matemático.*

*Por último, he tenido que poner de relieve algunos aspectos de la creación matemática que dan testimonio de su anastomosis con la vida cultural y más particularmente con el arte. No resulta indiferente encontrar el rectángulo de oro en el Partenón, la espiral logarítmica sobre la tumba de J. Bernoulli en la catedral de Basilea (y también sobre el traje del P. Ubu y sobre la corbata del colegio de Patafísica), el grupo de los empedrados de la Alhambra y en los grabados de M. C. Escher, la banda de Moëbius anudada en trébol, en un grabado a buril de Albert Flocon*[1]*, el triángulo de Pascal y la ley de Poisson que intervienen respectivamente en la construcción de* Transformations triangulaires, *de Michel Philippot, y de varias obras de Yannis Xénakis, las cadenas de Markov utilizadas por su creador en el análisis de* Eugenio Oneguin, *de Pushkin; y algunas obras literarias se salen del Ulipo y están construidas sobre el grupo de Klein, como* La Princesse Hoppy, *de Jacques Roubaud, o sobre un cuadrado greco-latino de orden 10, como* La vie Mode d'emploi, *de Georges Perec.*

*Los ejemplos —para insistir en los aspectos más interesantes de las definiciones o para hacer menos abruptas las manipulaciones de ciertas nociones— y las ilustraciones —que son comentarios visuales— completan la utillería del diccionario con las remisiones. Estas se han multiplicado para que funcionen como un tejido nervioso. Partiendo de un artículo se puede, paulatinamente, si no reconstituir un tratado, al menos dar una ojeada conveniente a la cuestión.*

*
* *

*Los principios que han presidido esta construcción y los resultados que de ella se han desprendido no han sido alcanzados de entrada. Han sido forjados y rectificados en el curso de una experiencia adquirida durante el camino.*

*Al principio, para mí se trataba de encontrar de uno a tres colaboradores y convencerles para trabajar, con igual espíritu al mío, en una obra viva, abierta al temblor del pensamiento matemático, pero que, precisamente por esa aspiración, renunciarían al tipo de perfección formal requerido (si no alcanzado) en un tratado fijo puesto en orden alfabético. La condición imperativa de este cambio de visión era, no obstante, que el objetivo que yo dejaba de lado fuera incluido —sin ser traicionado— en aquél al que yo otorgaba la prioridad y que en cierto modo le sirve de referencia.*

*Alain Bouvier (que al principio fue el único que estuvo unido a mi proyecto), luego Michel George (traído poco después por Alain Bouvier) han sido esos colaboradores. Me aportaron al principio lo que me faltaba, sus propias adquisiciones (unas adquisiciones que nunca han dejado de cultivar y de superar) vivificadas por su experiencia en caliente, por su inmersión en dos grupos: el de sus estudiantes y el de sus colegas. Esta riqueza de conocimientos, organizada por una interdependencia de las nociones matemáticas e impregnada de una sensibilidad por su belleza, representa su primera aportación a esta empresa.*

1. Ha sido escogido para ilustrar la camisa de este diccionario.

*La segunda, no menos necesaria, ha sido un espíritu riguroso sin concesiones, la negativa a esas pequeñas pequeñas cobardías que se insinúan casi en la vuelta de cada frase y que ocultaban bajo los muebles los pequeñísimos restos de polvo que no se ha conseguido hacer desprender. Hilar muy fino, ¡virtud de matemático!*

*Consecuencia de la heterogeneidad de los temperamentos y de los perfiles intelectuales de los redactores, no nos ha causado ningún problema cierta heterogeneidad de estilos —visible a veces en el seno de un mismo artículo—. Es perfectamente aceptable desde el momento en que la coherencia del conjunto no falta.*

*No insistiré más en el trabajo material y la minuciosidad que exigió la realización de semejante proyecto. Esa fue su tercera aportación, en apariencia modesta... ¡enorme de hecho! ¡Cuántas discusiones sobre detalles (¿pero qué es un detalle?), cuántos artículos rehechos y vueltos a hacer! Y debo rendir aquí homenaje a ese secretariado de redacción de cuatro personas, además de Alain Bouvier y Michel George: sus esposas, sin quienes, en definitiva, esta obra no habría podido ver la luz.*

*Hemos renunciado a citar a los numerosísimos docentes a quienes hemos pedido —desde que pusimos la primera piedra de este diccionario, es decir, desde hace una decena de años— leer tal o cual artículo, tal o cual serie de artículos. Pero hemos de dar las gracias al menos a Jean Benabou, Claude Berge, Jean-Claude Bermond, Gilles Bonnefoy, Jacques Bouveresse, Jean-Claude Carrega, Marc Krasner, Georges Kreisel, Georges Morlat, Gilles Mounier, Charles Pisot, Jean Porte, Denis Richard, René Thom, Stanislaw Ulam, y pedimos disculpas a amigos que quizá hemos olvidado...*

*La obra que de ello ha resultado no puede, pese a nuestra preocupación, pretender presentarse sin defectos, siempre demasiado numerosos (personalmente, cada vez que entrego un manuscrito a un editor siempre ocurre el mismo drama: descubro los primeros defectos cuando todavía está fresca la tinta de imprenta). Todo cuanto razonablemente se puede esperar es haber reducido su número y su importancia a una proporción aceptable, de suerte que el pasivo parezca despreciable al lado del activo. Esperamos que ése sea al caso.*

*1.º de julio de 1979.*

François Le Lionnais

# PALABRAS PRELIMINARES

¿Cómo se puede siquiera considerar lanzarse a semejante empresa?, nos preguntan con frecuencia quienes nos han visto entregados a esta tarea.

En realidad, el proyecto inicial que nos propuso François Le Lionnais, en 1969, parecía modesto: redactar 200 términos matemáticos para un diccionario de las ciencias destinado al gran público. ¿Por qué hemos necesitado diez años de trabajo y cuatro versiones sucesivas para llegar a este diccionario de matemáticas?

No tenemos la pretensión de querer presentar a François Le Lionnais, pero queremos decir algunas palabras sobre el papel desacostumbrado y destacable que ha jugado en la concepción y la elaboración de lo que finalmente fue para nosotros una larga aventura: lamentamos no poder describirla sino muy parcialmente.

Desde el principio, por su personalidad, François Le Lionnais no pudo decidirse a apartar a tal o cual lector potencial, tal o cual terreno de la matemática, tal o cual curiosidad, tal o cual «flash cultural» (expresión que le gusta mucho), tal o cual terminología raramente utilizada pero que no obstante alguien fuera capaz de encontrar al hilo de una lectura. De este modo comenzó a sugerirnos añadidos, complementos, extensiones, luego a pedirnos pasar de un público con las preocupaciones y los conocimientos de los alumnos de la enseñanza secundaria a un público con una sólida cultura científica. En 1973, lejos ya de las 200 palabras de partida, habíamos pasado insensiblemente de la parte matemática de un diccionario de ciencias a un diccionario de matemáticas de 1.000 a 1.500 palabras que entonces consideramos como acabado; abarcaba los principales dominios enseñados en los liceos (álgebra, geometría, análisis, probabilidades), presentados bajo una forma cercana a la que se usa en ese nivel. Pero François Le Lionnais, que no podía quedarse ahí, nos incitó a redactar una nueva versión de este diccionario. Su contenido se ha extendido progresivamente a los dominios de especialistas: análisis no estándar, geometría algebraica, teoría de la medida, teoría de los grafos..., elevándose regularmente el nivel y emparentando cada vez más el marco de presentación con el que se practica en la universidad o en las escuelas de ingenieros.

La gran curiosidad de Francois Le Lionnais, su sed de descubrir, de conocer, de saber, le conducen a encontrar y a solicitar a cualquiera de este mundo «que haga algo»: descubre, inventa, crea, produce, redacta, expone, vulgariza.

En el curso de numerosos contactos con sus célebres «almuerzos», diversos especialistas han tenido ocasión de consultar las versiones definitivamente provisionales de nuestros sucesivos manuscritos. Como modestos autores que somos, ¿habríamos podido permanecer insensibles a las reacciones, a las críticas, a las sugerencias que emanaban de personalidades matemáticas de primera magnitud? Además, François Le Lionnais había sabido comunicarnos su curiosidad y su pla-

cer de presentar a los demás las bellezas de las matemáticas, de suerte que tras reticencias por nuestra parte aceptamos introducir los temas o los dominios que voluntariamente habíamos eliminado hasta entonces.

De este modo, el presente texto nació después de cuatro versiones. Quizá sea difícil, por tanto, encontrar en él una unidad, pero los lectores no permanecerán insensibles a las constantes huellas impregnadas por la personalidad extraordinaria y fascinante de François Le Lionnais.

Que encuentre aquí él el testimonio de nuestra profunda estima y de nuestra amistad.

En Beausemblant,
Alain BOUVIER y Michel GEORGE

*agradecimientos*

*Una costumbre muy difundida en la actualidad quiere que los autores dediquen su libro a su cónyuge o le agradezcan su ayuda moral, su paciencia y su aliento. No hemos redactado estas líneas para cumplir con ese ritual. Nuestros amigos nos lo han hecho observar con frecuencia: Claudine y Nicole han realizado un papel central en esta empresa:*

*Una estimación superficial muestra que han dactilografiado, en cuatro ejemplares, 10.000 artículos por lo menos. En cada nueva redacción o añadido tenían que quitar el antiguo texto cuando había uno e insertar el nuevo en su lugar, en cada uno de los cuatro manuscritos (uno para las Presses Universitaires de France, otro para François Le Lionnais y otro para cada uno de nosotros). Nadie sin haberse dedicado a estas tareas puede sospechar el enorme trabajo que representan. Finalmente, durante la relectura de pruebas sobre galeradas, Nicole ha controlado todas las remisiones y detectado numerosos círculos viciosos.*

# A

## ∀

Símbolo del cuantificador universal. Se representa con la letra A invertida, por ser A la inicial de la palabra inglesa *All* («todo»).

## Abaco

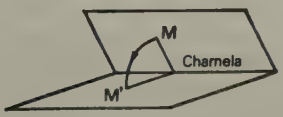
Aparato manual rudimentario, como el marcador de bolas [boulier], muy utilizado en la Antigüedad y en la Edad Media para efectuar cálculos numéricos. En nuestros días todavía hay en uso ciertos ábacos en Extremo Oriente y en Rusia (el *Stochty* de los almacenes soviéticos).

También se llama ábaco a la representación gráfica de una familia de curvas, utilizada por los físicos y técnicos para conocer, mediante simple lectura, los valores aproximados de soluciones de ecuaciones cuya resolución teórica es larga y difícil.

V. NOMOGRAFÍA.

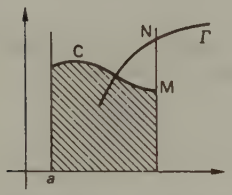
## Abatimiento

• (Descriptiva). *Abatimiento de un plano.*—Construcción que permite determinar la imagen de un punto cualquiera de este plano por medio de una rotación que transforma el plano en un plano horizontal. El abatimiento de una figura plana permite obtener esta figura en su verdadera dimensión. El eje de la rotación, que es necesariamente una horizontal, se llama eje del abatimiento.



## **Abdank-Abakanowiz** (1852-1907)

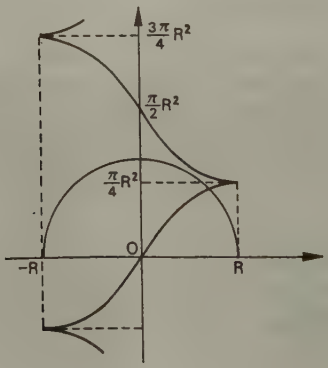
• *Integrafo de Abdank-Abakanowicz.* — Aparato que permite construir la curva representativa Γ de la Integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ de una función numérica continua $f$ cuando un estilete móvil recorre la representación gráfica C de $f$. La ordenada de un punto N sobre Γ es igual al área del dominio rayado.




• *Cuadratriz de Abdank-Abakanowicz.* — Curva, también llamada integral de círculo, obtenida con el integrafo de Abdank-Abakanowicz a partir de un semicírculo de radio R. En un sistema de referencia ortonormado, siendo la ecuación del semicírculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, la de la cuadratiz es:

$$y = \frac{R^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{R} + \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2}$$

La curva está formada por una infinidad de ramas isométricas.



**Abel**, Niels Henrik (1802-1829)

Varios resultados de Abel proporcionan condiciones suficientes de convergencia para las series numéricas, las series de funciones y las integrales. Son particularmente útiles, por ejemplo, para el estudio de series no absolutamente convergentes, como la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$. V. PRODUCTO (de dos series).

• *Criterio de Abel para las integrales.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones numéricas continuas sobre $[\![a, +\infty[\![$. Si $f$ es decreciente con valores positivos y tiende a cero cuando $x$ tiende a infinito, si existe un número real positivo M que:

$$\left|\int_{x'}^{x''} g(x)\,dx\right| < M$$

para todos $x'' > x' \geqslant a$, entonces la integral $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ es convergente.

• *Criterio de Abel para las series numéricas.* — Sea $\Sigma u_n$ una serie de números complejos tal que la sucesión $(S_n)$ de sus sumas parciales esté acotada y sea $(\varepsilon_n)$ una sucesión de números reales positivos, decreciente, que tiende a cero; entonces la serie $\Sigma \varepsilon_n u_n$ es convergente.

• *Criterio de convergencia uniforme de Abel.* — Sean I un intervalo cerrado de $\mathbf{R}$ y $(a'_n)$ una sucesión de funciones positivas, decreciente sobre I y convergente uniformemente hacia cero. Si existe una sucesión $(b_n)$ de funciones definidas sobre I y un número real M tales que:

$$\left|\sum_{i=r}^{s} b_i(x)\right| < M$$

para todo $x \in I$ y para todo $s \geqslant r$, entonces la serie $\Sigma a_n(x) b_n(x)$ converge uniformemente sobre I.

• *Fórmula de suma o identidad de Abel.* — Se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \cdots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n$$

con $s_j = \sum_{i=1}^{j} u_i$ o, de manera equivalente:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = a_1 s_1 + a_2(s_2 - s_1) + \cdots + a_n(s_n - s_{n-1})$$

• *Lemas de Abel.* — Sea $\Sigma a_n z^n$ una serie entera de coeficientes complejos; si está uniformemente acotada por un valor $z_0$ entonces (primer lema de Abel): para cualquier número complejo $z$ tal que $|z| < |z_0|$ converge absolutamente y (segundo lema de Abel): para cualquier número real $r$ tal que $0 < r < |z_0|$, es normalmente convergente en el disco cerrado $D(0, r)$.

• *Teorema de Abel.* — Es imposible resolver por radicales las ecuaciones algebraicas de grado $\geqslant 5$ (publicación póstuma); este resultado fue redescubierto y ampliamente completado por Galois.

V. GALOIS.

## Abeliana

• *Integral abeliana.* — Integral de la forma $\int \frac{A(x, y)}{B(x, y)} dx$ donde A y B son dos polinomios en dos variables y donde $y$ está ligado a $x$ por una ecuación algebraica $P(x, y) = 0$. Las integrales elípticas son integrales abelianas particulares. Si la curva de ecuación $P(x, y) = 0$ es unicursal, puede escribirse: $x = a(t)$ e $y = b(t)$, donde $a$ y $b$ son funciones racionales; en este caso, el cálculo de la integral abeliana se reduce a la integración de una función racional.

## Abeliano

Sinónimo de conmutativo, empleado esencialmente para grupos.

## Abierta

V. Bola, Célula, Corona.

• *Aplicación abierta (resp. cerrada).*—Una aplicación $f$ de un espacio topológico E en un espacio topológico F se dice abierta (resp. cerrada) si la imagen de $f$ de todo abierto (resp. de todo cerrada) de E es un abierto (resp. un cerrado) de F.

• *Parte abierta de un espacio topológico* E.—Sinónimo de abierto del espacio topológico. Una parte abierta es igual a su interior.

• *Relación de equivalencia abierta (resp. cerrada).*—Una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ sobre un espacio topológico E se dice abierta (resp. cerrada) si la sobreyección canónica $s$ de E sobre el cociente topológico $E/\mathcal{R}$ es abierto (resp. cerrado).

• *Sección inicial abierta.*—V. Inicial.

• *Sección final abierta.*—V. Final.

## Abierto

V. Angular (Sector), Semi-Espacio, Semi-Plano, Disco, Pavimento, Polidisco.

• *Abierto de un espacio topológico* E.—Elemento de la topología definida sobre E (V. Topología). En un espacio métrico, E, una parte A de E es un abierto de E si todo punto de A es centro de una bola abierta contenida en A.
V. Abiertos.

• *Abierto elemental.*—V. Topología (Producto).

• *Intervalo abierto de un conjunto ordenado* E.—Sean $a$ y $b$ dos elementos de E tales que $a<b$. El conjunto $]a, b[$ de los elementos $x$ de E tales que $a<x<b$ se llama intervalo abierto de extremos $a$ y $b$.

• *Intervalo cerrado a la izquierda (resp. a la derecha) y abierto a la derecha (resp. a la izquierda) de un conjunto ordenado* E. — Sean $a$ y $b$ dos elementos de E tales que $a<b$. El conjunto $[a, b[$ de los elementos $x$ de E tales que $a \leqslant x<b$ se llama intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha. Del mismo modo se definen los intervalos cerrados a la derecha y abiertos a la izquierda.

## Abiertos

• *Axiomas de abiertos.*—Una topología sobre un conjunto E puede definirse si se da un conjunto $\mathcal{O}$ de partes de E que satisfacen a los axiomas de abiertos:

$[O_1]$ La reunión de toda familia de elementos de $\mathcal{O}$ es un elemento de $\mathcal{O}$.

$[O_2]$ La intersección de dos elementos de $\mathcal{O}$ es un elemento de $\mathcal{O}$.

$[O_3]$ La parte vacía y E son elementos de $\mathcal{O}$.

V. TOPOLOGÍA.

• *Base de abiertos.*—V. BASE.

## Abscisa

• *Abscisa de un punto* M *en un sistema de referencia cartesiano.* — Primera coordenada de M en el sistema de referencia.
V. CARTESIANAS (Coordenadas).

• *Abscisa de un punto* M *sobre un eje.* — V. EJE (de un espacio afín).
V. CURVILÍNEA.

## Abscisas

• *Eje de abscisas.* — V. CARTESIANO (Sistema de referencia).

## Absoluta

• *Valor absoluto sobre un anillo A.* — Aplicación $x \mapsto |x|$ de A en $\mathbf{R}_+$ tal que para todos los elementos $x$, $y$ de A se tenga:
1) $|x| = 0$ si y solamente si $x = 0$.
2) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
El número real $|x|$ se denomina el *valor absoluto de* $x$.
V. ARQUIMEDIANO, DISTANCIA, IMPROPIO, OSTROWSKY, *p*-ADICO, TRIVIAL.

• *Convergencia absoluta de un producto infinito.* — V. INFINITO (Producto).

• *Convergencia absoluta de una integral generalizada.* — Se dice que la integral generalizada de una función $f$ es absolutamente convergente si la integral generalizada de $|f|$ es convergente.

• *Convergencia absoluta de una serie de funciones.* — Una serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ de funciones definidas sobre un conjunto **E** y con valores en **C** es absolutamente convergente si, para todo $x$ perteneciente a E, la serie $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ es absolutamente convergente en **C**. La convergencia absoluta entraña la convergencia simple.

• *Convergencia absoluta de una serie numérica.* — Una serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ de números complejos es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ es convergente. La convergencia absoluta entraña la convergencia; la recíproca es inexacta: la serie $\Sigma\frac{(-1)^n}{n}$ converge sin ser absolutamente convergente.

• *Vector-aceleración absoluta.* — Sean R' un sistema de referencia móvil en relación a un sistema de referencia fijo R y M un punto móvil por relación al sistema de referencia R', el vector-aceleración absoluta de M es el vector-aceleración de M en su movimiento por relación al sistema de referencia fijo R. El vector-aceleración absoluta $\vec{\Gamma}_a$ de M está unido a los vectores-aceleración relativa $\vec{\Gamma}_r$, de arrastre $\vec{\Gamma}_e$ y de Coriolis $\vec{\Gamma}_c$ por la relación:

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_c$$

• *Vector-velocidad absoluta.* — Sean R' un sistema de referencia móvil por relación a un sistema de referencia fijo R y M un punto móvil en relación al sistema de referencia R'. El vector velocidad absoluta de M es el vector-velocidad de M en su movimiento en relación al sistema de referencia fijo R. El vector-velocidad absoluta $\vec{V}_a$ de M está relacionado con el vector-velocidad relativa $\vec{V}_r$ y al vector-velocidad de arrastre $\vec{V}_e$ por la relación $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$.

## Absolutamente

• *Familia absolutamente sumable.* — V. SUMABLE.

• *Integral generalizada o serie absolutamente convergente.* — V. ABSOLUTA (Convergencia).

• *Número absolutamente pseudo-primo.* — Sinónimo de número de Carmichaël.

• *Producto infinito absolutamente convergente.* — V. INFINITO (Producto).

• *Variable aleatoria absolutamente continua.* — V. CONTINUA.

## Absoluto

Empleado a veces en el sentido de invariante. Caído en desuso.

• *Absoluto de Cayley.* — V. CAYLEY.

• *Círculo absoluto.* — Círculo del infinito. V. INFINITO.

• (Estadística.) *Desviación absoluta de un real x con un real a.* — Valor absoluto de la desviación $x - a$ de $x$ al real $a$.

• *Máximo (resp. mínimo, extremo) absoluto.* — Sinónimo de máximo, (resp. mínimo, extremo) utilizado por oposición a máximo (resp. mínimo, extremo) relativo.

• *Movimiento absoluto.* — Por oposición a los movimientos relativos, se denomina movimiento absoluto a un movimiento definido por relación a un referencial nominal (considerado como fijo).

## Absorbente

• *Elemento absorbente para una ley de composición interna * sobre un conjunto* E. — Un elemento $a$ de E se dice absorbente si para todo elemento $x$ de E se tiene $x * a = a * x = a$. El real 0 es absorbente por la multiplicación de los reales; ningún real es absorbente por la adición de los reales. En álgebra no conmutativa se introducen elementos absorbentes a izquierda y elementos absorbentes a derecha.

## Abstracta

• *Algebra abstracta.* — Sinónimo de álgebra literal.

• *Geometría abstracta.* — Nombre dado a principios del siglo al estudio de los grupos que operan sobre conjuntos y a la investigación de sus invariantes.

• *Medida abstracta.* — Sinónimo de medida sobre un conjunto; se emplea por oposición a medida de Radon.

## Abstractos

• *Espacios abstractos.* — Expresión caída en desuso que designaba los espacios métricos. Los espacios abstractos fueron introducidos por Maurice Fréchet hacia 1922 para —según su autor— demostrar en una vez numerosas proposiciones que conciernen a ciertos conjuntos de números, de curvas, de superficies, de funciones holomorfas, etc.

## Absurdo

• Lit.: contrario al sentido común. En matemáticas, este calificativo es empleado como sinónimo de contradictorio, de lógicamente falso. Se *razona* mediante *el absurdo* o mediante *reducción al absurdo* para demostrar una proposición P, cuando, a partir de hipótesis dadas, suponiendo verdadera la proposición contraria (no-P), se puede establecer un resultado que es la negación de una de las hipótesis; esto contradice entonces el principio del tercero excluido. De ello se deduce que bajo las hipótesis dadas la proposición (no P) no es verdadera, puesto que la proposición P es verdadera. Este razonamiento mediante el absurdo ya era utilizado por los matemáticos griegos.

## Abundante

• *Número abundante.* — Número entero natural $n$ tal que $n < \sigma(n)$ donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de $n$ distintos de $n$ (*i.e.* la suma de las partes alícuotas de $n$); los enteros 12, 18, 20 son abundantes. Todos los múltiplos de 6 estrictamente superiores a 6 son abundantes. El menor abundante impar es 10.665 y todo entero superior a 83.160 es la suma de dos números abundantes.

• *Número colosalmente abundante.* — Número entero natural $n$ para el cual existe $\varepsilon > 0$ tal que la función $\sigma(k)/k^{1+\varepsilon}$ alcanza su máximo en $n$ donde $\sigma(k)$ es la suma de los divisores de $k \in \mathbf{N}^*$ distintos de $k$. Todo número colosalmente abundante es un número super-abundante particular.

• *Número super-abundante.*—Número entero natural $n$ tal que para todo $m<n$ se tenga $n\sigma(m)<m\sigma(n)$, donde $\sigma(k)$ es la suma de los divisores de $k \in \mathbf{N}^*$ distintos de $k$.

## Acabada

• *Recta numérica acabada.* — Sinónimo de recta real acabada.

• *Recta real acabada.* — Espacio topológico $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ obtenido uniendo a $\mathbf{R}$ dos elementos notados $-\infty$ y $+\infty$; la estructura de orden de $\mathbf{R}$ se prolonga a $\overline{\mathbf{R}}$ de tal suerte que para todo $x \in \mathbf{R}$ se tiene $-\infty < x < +\infty$. La topología usual sobre $\overline{\mathbf{R}}$ es la engendrada por el conjunto de los intervalos abiertos de $\overline{\mathbf{R}}$. Este espacio topológico es compacto, conexo, localmente conexo y toda parte no vacía posee un extremo inferior y un extremo superior.

## Accesible

• *Espacio accesible.* — Espacio topológico E que verifica el axioma $[T_1]$ de separación: si $x$ e $y$ son dos puntos distintos de E, existe un entorno V de $x$ tal que $y \notin V$ y existe un entorno W de $y$ tal que $x \notin W$. Los espacios accesibles son denominados a veces espacios de Fréchet.
V. FRÉCHET, KOLMOGOROV, SEPARACIÓN.

• *Vértice accesible.* — En teoría de los grafos, un vértice $e_2$ de un grafo orientado se llama accesible a partir de un vértice $e_1$ si existe un camino de $e_1$ hacia $e_2$. La accesibilidad es una relación de preorden.

## Acción

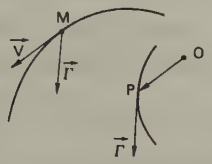
Término que designa en mecánica una magnitud proporcional al producto de la energía por el tiempo. La noción de acción, cuya importancia había sido percibida ya desde el siglo XVII, ha tomado un papel capital en diversas teorías, por ejemplo, en teoría cuántica.
V. HAMILTON (Acción de), MAUPERTUIS (Acción de).

• *Acción de un conjunto Ω (llamado dominio de operadores) sobre un conjunto* E. — Aplicación de $\Omega \times E$ en E. Entonces se habla de ley de composición externa y se dice que Ω opera sobre E.
V. OPERANTE (Grupo), RESTRICCIÓN.

## Aceleración

Magnitud vectorial que mide la variación de una velocidad. Es esencialmente relativa, en el sentido de que no es definida más que por relación a un referencial dado.

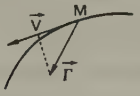
• *Vector aceleración de un móvil puntual* M *en el instante t.* — Sean $\vec{V}$ el vector-velocidad de M y O un punto fijo. El punto P tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{V}$ descri-




be la hodógrafa del movimiento de M. El vector-velocidad $\vec{\Gamma}$ del móvil P en el instante $t$ se denomina vector-aceleración de M en el instante $t$. Si M tiene por coordenadas $(x, y, z)$ en un sistema de referencia de tres ejes cualesquiera, el vector-aceleración tiene por componentes las derivadas segundas $d^2x/dt^2$, $d^2y/dt^2$ y $d^2z/dt^2$ de $x$, $y$ y $z$ por relación al tiempo $t$. Sus componentes en el triedro de Frenet $(M, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ son respectivamente $dv/dt$, $v^2/R$ y 0, donde $v$ designa la velocidad de M y R el radio de curvatura en M de la trayectoria.
V. ABSOLUTA, ANGULAR, ARRASTRE, CANTIDAD, CENTRAL, CORIOLIS, DECELERACIÓN, LONGITUDINAL, NORMAL, RELATIVA, TANGENCIAL, TRANSVERSAL.

## Acelerada

• *Movimiento acelerado de un punto móvil* M. — Movimiento tal que el producto escalar $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ del vector-velocidad y del vector-aceleración de M sea positivo. En semejante movimiento, el valor absoluto de la velocidad de M es creciente.




• *Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.* — Movimiento rectilíneo acelerado del que es constante la norma del vector-aceleración. Un cuerpo lanzado verticalmente hacia lo alto en el vacío está animado por un movimiento rectilíneo uniformemente retardado durante su subida luego de un movimiento uniformemente acelerado en el curso de la bajada.
V. VARIADO.

## Acotada

• *Aplicación acotada de un conjunto* E *en un conjunto ordenado* F.—Aplicación cuya imagen es una parte acotada de F.

• *Función de variación acotada.* — Una función real definida sobre un segmento $[\![a, b]\!]$ de **R** se denomina de variación acotada si existe un número real $M > 0$ tal que para toda subdivisión $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} x_n = b$ la suma $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ está mayorada por M. El número más pequeño M para comprobar la propiedad precedente se llama variación total de $f$ sobre $[\![a, b]\!]$.

• *Parte acotada de un conjunto ordenado.* — Parte mayorada y minorada a la vez.
V. INFERIOR, SUPERIOR.

• *Parte acotada de un espacio métrico.* — Parte de diámetro finito.

• *Serie acotada.* — Serie cuyo conjunto de los términos está acotado.

## Actual

• *Infinito actual.* — Utilizado por oposición a infinito potencial.
V. INFINITO.

## Acuidad

• *Coeficiente de acuidad de una serie estadística.* — Coeficiente $\gamma_2$ de Fisher.
V. FISHER.

## Acumulación

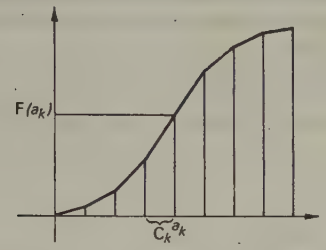
• *Punto de acumulación.* — Un punto $x$ de una parte A de un espacio topológico E se denomina punto de acumulación de A si todo entorno de $x$ contiene por lo menos un punto de A distinto de $x$ o, lo que es lo mismo, si todo entorno de $x$ contiene un número infinito de puntos de A. Un punto de acumulación de A es un punto adherente particular. Un conjunto finito no tiene pues puntos de acumulación. El conjunto de los puntos del plano real cuyas coordenadas son enteros no tiene punto de acumulación, pero, por el contrario, si A es el conjunto de todos los puntos del plano real con coordenadas racionales, todo punto de ese plano es un punto de acumulación de A.
V. ADHERENCIA, ADHERENTE, AISLADO (Punto), DERIVADO (Conjunto).

• *Punto de acumulación de una sucesión.* — Sinónimo de valor de adherencia de esa sucesión.

## Acumuladas

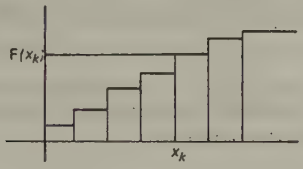
• *Frecuencias acumuladas de un carácter cuantitativo continuo.* — Para cada clase $C_k = [\![a_{k-1}, a_k[\![$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ se llama frecuencia acumulada en $a_k$ al

número $F(a_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i$, donde $f_i$ es la frecuencia de $C_i$. Las frecuencias acumuladas se representan por una línea poligonal llamada curva acumulativa.




• *Frecuencias acumuladas de un carácter cuantitativo discreto que toma los valores* $x_1, x_2, ..., x_n$.

• Se llama frecuencia acumulada para el valor $x_k$ al número $F(x_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i$, donde $f_i$ es la frecuencia de $x_i$. Las frecuencias acumuladas se representan por una curva en escalera, llamada curva acumulativa.




## Acumulados

• *Efectivos o frecuencias acumulados para un carácter cuantitativo discreto que toma los valores* $x_1, x_2, ..., x_n$.

• Se llama efectivo o frecuencia acumulado para el valor de $x_k$ el número $N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$, donde $n_i$ es el efectivo de $x_i$. Los efectivos acumulados se representan por una curva en escalera.

• *Efectivos o frecuencias acumulados para un carácter cuantitativo continuo.* — Para cada clase $C_k = [\![a_{k-1}, a_k[\![$ $(k = 1, 2, ..., n)$ se llama efectivo acumulado en $a_k$ al número $N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$, donde $n_i$ es el efectivo de $C_i$. Los efectivos acumulados se representan por una línea poligonal.

## Acumulativa

• *Curva acumulativa.* — Curva que representa las frecuencias acumuladas de un carácter cuantitativo.

V. ACUMULADAS.

## Acutángulo

• *Triángulo acutángulo.* — Triángulo cuyos tres ángulos son agudos. Un triángulo que no es acutángulo es, o bien rectángulo o bien obtusángulo (véanse estas palabras).
V. ULTRAMÉTRICO.

## Adelas

Sean K un cuerpo de números algebraicos, S el conjunto de sus valores absolutos, $S_\infty$ el conjunto de sus valores absolutos arquimedianos y $K_v$ el completado de K para $v \in S$. Se llama anillo de las adelas de K el sub-anillo de $K_A$ de $\prod_{v \in S} K_v$ formado por los $(z_v)$ tales que para $v \in S - S_\infty$ se tenga $v(z_v) \leqslant 1$. Este anillo puede ser provisto canónicamente de una topología localmente compacta compatible con su estructura de anillos. Esta noción juega un papel fundamental en teoría de los números algebraicos.
V. IDELES.

## Adherencia

• *Adherencia de una parte* A *de un espacio topológico* E. — Conjunto denotado $\overline{A}$ de los puntos adherentes de A. La adherencia de A es, en el sentido de la inclusión, el cerrado más pequeño que contiene A. En R provisto de la topología usual, si $A = ]a, b[$, entonces $\overline{A} = [a, b]$.

• *Valor de adherencia de una aplicación f de un espacio topológico* E *en un espacio topológico* F *en un punto a* ∈ E. — Elemento *y* de F adherente a las imágenes por *f* de todos los entornos de *a*. El conjunto de valores de adherencia en 0 de la función *f* definida por:

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \text{ es } [-1, 1].$$

• *Valor de adherencia de una sucesión* $(x_n)$ *de puntos en un espacio métrico* E. — Número real *y* tal que existe una sucesión extraída de $(x_n)$ que converge hacia *y*. Todo valor de adherencia es un punto adherente al conjunto de los puntos de la sucesión, pero la recíproca no es cierta.

## Adherente

• *Punto adherente a una parte de un espacio topológico.* — Un punto $x$ de un espacio topológico E es adherente a una parte A de E si todo entorno de $x$ tiene una intersección no vacía con A. Todos los puntos de A son adherentes a A. Un punto adherente es bien un punto de acumulación, bien un punto aislado; las dos eventualidades se excluyen mutuamente.

• *Punto adherente a una sucesión.* — Sinónimo de valor de adherencia de esa sucesión.

## Adición

La adición en N es una ley de composición interna, designada $+$, y definida por:

$\mathrm{Card}\,X + \mathrm{Card}\,Y = \mathrm{Card}(X \cup Y)$, donde X e Y son dos conjuntos disjuntos.
Es asociativa, conmutativa y posee un elemento neutro 0.
En los demás conjuntos de números usuales (**Z**, **Q**, **R**, **C**), la adición que se define prolonga la de **N**.
Frecuentemente se nota $+$ y se llama adición a una ley de composición interna conmutativa, por ejemplo: «la adición» de matrices o «la adición» de las funciones numéricas.
V. SUMA.

• *Adición lógica en un álgebra de Boole.* — V. LÓGICA.

## -ádico

• *p-ádico.* — V. *p*-ÁDICO.

## Aditiva

• *Aplicación σ-aditiva.* — V. SIGMA-ADITIVA.

• *Función aditiva.* — En álgebra, dados dos monoides conmutativos E y F cuyas leyes son notadas aditivamente, se llama función aditiva de E en F a todo homomorfismo de monoides $f: E \to F$; por tanto, es una aplicación tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo $x$, $y$ de E.
En teoría de los números, una función aditiva es una función $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ tal que

$$f(mn) = f(m) + f(n),$$

cuando $m$ y $n$ son dos números enteros (primos entre sí).
V. ARITMÉTICA (Función), MULTIPLICATIVA (Función).

• *Notación aditiva.* — La adición en los conjuntos de números usuales es conmutativa; por analogía, las leyes de composición conmutativas se denotan, con mucha frecuencia, aditivamente, es decir, $(a, b) \mapsto a + b$. Entonces se habla de notación aditiva.

• *Teoría aditiva de los números.* — Es la que estudia los problemas del tipo siguiente: dado un conjunto infinito E de números enteros (los enteros primos o los cuadrados, etc.), ¿se puede escribir todo entero como suma de elementos de E? Ejemplos de problemas semejantes: las conjeturas de Goldbach, el problema de Waring, el teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange. El método de las cribas es uno de los más fecundos que hoy se emplean.
V. BOMBIERI, BRUN, CHEN, CRIBA, GOLDBACH, HILBERT, LAGRANGE, WARING.

## Aditividad

• *Axioma de aditividad completa.* — V. KOLMOGOROV (Axiomas de).

• *Axioma de σ-aditividad.* — Axioma de aditividad completa.

## Aditivo

• *Monoide o grupo aditivo.* — Monoide o grupo, en general conmutativo, cuya ley se nota aditivamente.
V. ADITIVA (Notación), MULTIPLICATIVO.

## Adjunción

• *Adjunción de un punto al infinito.* — V. ALEXANDROV.

• *Anillo o cuerpo obtenido por adjunción de un conjunto* E *(o de un elemento) a un anillo o un cuerpo* A. — El anillo más pequeño o el cuerpo más pequeño conteniendo $A \cup E$.

## Adjunta

• *Forma bilineal adjunta de una forma bilineal* $\varphi$ *sobre* $E \times F$, *donde* E *y* F *son dos* K*-espacios vectoriales.* — Forma bilineal $\varphi^*$ sobre $F \times E$ definida por:

$$\varphi^*(x, y) = \varphi(y, x)$$

• *Forma sesquilineal adjunta de una forma sesquilineal sobre* $E \times F$ *donde* E *y* F *son dos* K*-espacios vectoriales.* — Forma sesquilineal $\varphi^*$ sobre $F \times E$ definida por:

$$\varphi^*(x, y) = \sigma(\varphi(y, x))$$

donde $\sigma$ es el automorfismo involutivo de K relativo a $\varphi$.

• *Matriz adjunta de una matriz compleja* M. — Matriz $M^*$ conjugada de la transpuesta ${}^tM$ de M. Tenemos:

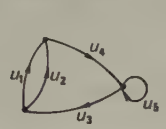
$$M^* = {}^t\overline{M} = \overline{{}^tM}$$

## Adjunto

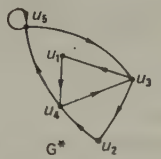
• *Funtor adjunto a izquierda o a derecha.* — V. ADJUNTOS.

• *Grafo adjunto de un grafo.* — Se denomina grafo adjunto de un grafo G el 1-grafo G* tal que:

1) los vértices de G* son los arcos de G.
2) un arco de G* tiene por extremidad inicial $u_i$ y por extremidad terminal $u_j$ si, en G, la extremidad terminal del arco $u_i$ coincide con la extremidad inicial del arco $u_j$.




G




G*

• *Homomorfismo adjunto.* — Sean $\varphi$ y $\psi$ dos formas sesquilineales (o dos formas bilineales) no degeneradas, estando $\varphi$ definida sobre un K-espacio vectorial E y $\psi$ sobre un K-espacio vectorial F. Para todo homomorfismo $u$ de E en F existe un homomorfismo $u^*$ de F en E tal que

$$\varphi(x,\ u^*(y)) = \psi(u(x)y),$$

para todo $x \in E$ y todo $y \in F$, el homomorfismo $u^*$ es denominado el adjunto de $u$ por relación a las formas $\varphi$ y $\psi$.

## Adjuntos

• *Funtores adjuntos.* — Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos categorías, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ y $G : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ dos funtores covariantes. Se dice que G es adjunto a la derecha de F y que F es adjunto a la izquierda de G si, para todo objeto X de $\mathscr{C}$ e Y de $\mathscr{C}'$, existe una biyección.

$$\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X),\ Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ G(Y)),$$

funtorial en X e Y, es decir, tal que para todos los morfismos $f : X \to X'$ de $\mathscr{C}$ y $g : Y \to Y'$ de $\mathscr{C}'$, los diagramas que van a continuación sean conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X'),\ Y) & \xrightarrow{\Phi_{X',Y}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',\ G(Y)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(f),\ 1_Y)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,\ 1_{G(Y)})} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X),\ Y) & \xrightarrow[\Phi_{X,Y}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ G(Y)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X),\ Y) & \xrightarrow{\Phi_{X,Y}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ G(Y)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(1_{F(X)},\ g)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(1_X,\ G(g))} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X),\ Y') & \xrightarrow[\Phi_{X,Y'}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\ G(Y')) \end{array}$$

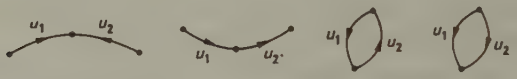
Por ejemplo, el funtor «grupo libre engendrado por un conjunto» es adjunto a izquierda del funtor olvidado de la categoría de los grupos en la categoría de los conjuntos y si M es un A-módulo, el funtor $- \otimes_A M$ es adjunto a izquierda del funtor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$.
V. HOM, OLVIDADO, TENSORIAL.

## Adyacente

• *Vértice de un grafo G adyacente a un conjunto B de vértices de G.* — Vértice vecino de un vértice que pertenece a B.

## Adyacentes

• *Arcos adyacentes de un grafo.* — Arcos cuyas aristas asociadas son adyacentes.

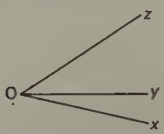



• *Aristas adyacentes de un grafo.* — Aristas que tienen en común un vértice y uno sólo.

• *Partes adyacentes de un conjunto totalmente ordenado* E. — Dos partes de E se denominan adyacentes si el límite superior del uno es igual al límite inferior del otro.

• *Partes adyacentes de un espacio topológico.* — Dos partes se denominan adyacentes si sus fronteras tienen por lo menos un punto común y si el interior de cada parte es disjunto de la otra parte.

• *Sectores angulares adyacentes.* — Sectores angulares que tienen el mismo vértice, un lado común y cuya intersección está reducida a ese lado común.




• *Sucesiones adyacentes.* — Una sucesión numérica creciente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ y una sucesión numérica decreciente $(v_n)_{n\geqslant 0}$ se dicen adyacentes si $u_n < v_n$ para todo $n \geqslant 0$ y si la serie $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ converge hacia 0. Los segmentos $([\![u_n, v_n]\!])_{n\geqslant 0}$ están entonces encajados y su longitud tiende hacia 0 cuando $n$ tiende hacia $+\infty$.

• *Vértices adyacentes de un grafo.* — Dos vértices $x$ e $y$ son adyacentes si existe un arco de extremidades $x$ e $y$.

## Afijo

• *Afijo de un vector* $\vec{V}$ *o de un punto* M *de* $\mathbf{R}^2$ *de coordenadas* $(x, y)$. — El número complejo $x + iy$.
V. COMPLEJO (Plano).

## Afín

• *Algebra afín de una variedad algebraica afín* V *de* $K^n$ *y de ideal* I. — Algebra sobre K, notada K[V] y definida por $K[V] = K[X_1, ..., X_n]/I$.
• *Aplicación afín.* — Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos espacios afines asociados a los espacios vectoriales E y F sobre el cuerpo K. Una aplicación $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ se denomina afín si existe una aplicación lineal $f : E \to F$ (es entonces única) tal que para todo punto M de $\mathcal{E}$ y para todo vector $\vec{V}$ de E, tengamos:

$$u(M + \vec{V}) = u(M) + f(\vec{V}).$$

Las aplicaciones afines de **R** en **R** son las aplicaciones de la forma $x \mapsto ax + b$. Tal aplicación es lineal si y solamente si $b = 0$.
V. TROZOS.

• *Automorfismo afín.* — Aplicación afín biyectiva de un espacio afín en sí mismo. En el plano afín, las simetrías, rotaciones, homotecias afines de razón no nula son automorfismos afines.
V. DIRECTO, HOMOTECIA, INVERSO, RETRÓGRADO, ROTACIÓN, SEMEJANZA, SIMETRÍA.

• *Endomorfismo afín.* — Aplicación afín de un espacio afín en sí mismo.

• *Espacio afín.* — Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K; si E opera transitivamente y fielmente sobre un conjunto $\mathcal{E}$ por una ley externa denotada por $(M, \vec{V}) \mapsto M + \vec{V}$, se dice que $\mathcal{E}$ es un espacio afín asociado (o ligado) al espacio vectorial E. Para todo par (M, N) de puntos de $\mathcal{E}$, existe un único vector $\vec{V} \in E$ tal que $N = M + \vec{V}$; ese vector $\vec{V}$ se nota también $\overrightarrow{MN}$. Fijado un punto O de $\mathcal{E}$, la aplicación $M \mapsto \overrightarrow{OM}$ es una biyección de $\mathcal{E}$ sobre E. Todo espacio vectorial E puede ser considerado como un espacio afín sobre E, considerando como ley externa la adición definida sobre el espacio vectorial E.
V. CHASLES, DIMENSIÓN, EUCLIDIANO, ORIENTADO, PROYECTIVO (Completado).

• *Geometría afín.* — Estudio de los invariantes del grupo afín sobre un espacio afín. En la enseñanza se emplea por oposición a geometría vectorial. En geometría afín un círculo no puede ser distinguido de una elipse (puesto que se puede transformar uno en la otra mediante una afinidad), pero una elipse puede ser distinguida de una hipérbola. Basada sobre un sistema de axiomas más simples que la geometría elemental tradicional, la geometría afín traduce peor la realidad sensible inmediata.

• *Grupo afín de un espacio afín* $\mathcal{E}$. — El conjunto de las aplicaciones afines biyectivas de $\mathcal{E}$ sobre $\mathcal{E}$ (llamadas también automorfismos de $\mathcal{E}$), provisto de la ley de composición de aplicaciones, es un grupo llamado grupo afín de $\mathcal{E}$ y notado $GA(\mathcal{E})$.

• *Hiperplano afín de un espacio afín $\mathscr{E}$ asociado a un* K*-espacio vectorial* E. — Variedad afín de $\mathscr{E}$ cuyo sub-espacio vectorial asociado es un hiperplano vectorial de E. Un hiperplano afín de $\mathbf{R}^n$ tiene por ecuación cartesiana:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$$

donde $a_1$, ..., $a_n$ y $b$ son reales. Un hiperplano de $\mathbf{R}^3$ es un plano, un hiperplano de $\mathbf{R}^2$ es una recta.

• *Isometría afín de un espacio afín euclidiano $\mathscr{E}$ de dimensión finita.* — Isometría del espacio métrico $(\mathscr{E}, d)$ en sí mismo, donde $d$ es la distancia euclidiana. Las isometrías afines de $\mathscr{E}$ son las aplicaciones afines cuya aplicación lineal asociada es un automorfismo ortogonal del espacio vectorial euclídeo asociado a $\mathscr{E}$.
V. Directo, Inverso, Negativo, Positivo, Retrógrado.

• *Isomorfismo afín.* — Aplicación afín biyectiva.

• *Plano afín.* — Espacio afín de dimensión 2.

• *Propiedad afín.* — Teorema de la geometría afín.

• *Recta afín.* — Espacio afín de dimensión 1.

• *Sistema de referencia afín de un espacio $\mathscr{E}$ asociado a un espacio vectorial* E *de dimensión n.* — El par (O, B), donde O es un punto de $\mathscr{E}$ llamado origen del sistema de referencia y donde $B = (\vec{i}_1, \vec{i}_2, ..., \vec{i}_n)$ es una base de E. Para todo entero $k \in \{1, 2, ..., n\}$ se denomina $k$-ésimo eje del sistema de referencia el eje $s_k = (O, D_k, \vec{i}_k)$, donde $D_k$ es la recta afín que pasa por O y admite como vector director $\vec{i}_k$. Todo sistema de referencia afín puede ser definido dando un $(n + 1)$-upla $(O, A_1, A_2, ..., A_n)$ de puntos afínmente independientes, es decir, tales que $(\overrightarrow{OA}_1, \overrightarrow{OA}_2, ..., \overrightarrow{OA}_n)$ sea una base de E. Un sistema de referencia afín se llama también sistema de referencia cartesiano, sobre todo en el caso en que $\mathscr{E}$ es el espacio afín $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$.
V. Cartesiano (Sistema de referencia).

• *Sub-espacio afín de un espacio afín $\mathscr{E}$ asociado al espacio vectorial* E. — Se denomina sub-espacio afín o variedad afín o también variedad lineal afín de $\mathscr{E}$ a una parte $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$ tal que, para todo punto M de $\mathscr{A}$, el conjunto de los vectores $\overrightarrow{MN}$, donde $N \in \mathscr{A}$, sea un sub-espacio vectorial E′ de E. El sub-espacio vectorial E′, llamado la dirección de $\mathscr{A}$, es independiente del punto M elegido para definirlo y $\mathscr{A}$ es un espacio afín asociado a E′. Se demuestra que una parte $\mathscr{A}$ de $\mathscr{E}$ es un espacio afín de $\mathscr{E}$ si y solamente si para toda familia finita de puntos de $\mathscr{A}$ los baricentros de esos puntos pertenecen a $\mathscr{A}$.
V. Engendrado, Suplementarios.

• *Variedad afín de un espacio afín.* — Sinónimo de sub-espacio afín.

• *Variedad algebraica afín.* — Dado un cuerpo K y un entero $n \geqslant 1$, se denomina variedad algebraica afín o conjunto algebraico o conjunto algebraico afín de $K^n$ a toda parte de $K^n$ formada por los ceros comunes a una familia $(P_i)_{i \in I}$ de polinomios de $K[X_1, ..., X_n]$. Es, por tanto, el conjunto de los puntos $(x_1, ..., x_n)$ de $K^n$ que verifican $P_i(x_1, ..., x_n) = 0$ para todo $i \in I$. El ideal engendrado por los $P_i$ en el anillo $K[X_1, ..., X_n]$ se llama ideal de la variedad considerada. Se reserva a veces el término de variedad para los conjuntos

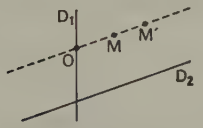
algebraicos irreductibles V, es decir, que no son reunión de dos sub-conjuntos algebraicos distintos de V.
V. DIMENSIÓN.

• *Variedad lineal afín de* $K^n$. — Variedad algebraica afín cuyo ideal es engendrado por polinomios de $K[X_1, ..., X_n]$ de primer grado. Si el ideal es engendrado por un único polinomio, esta variedad es un hiperplano. Cuando $K^n$ es interpretado como un espacio afín de dimensión $n$ asociado al K-espacio vectorial $K^n$, las variedades lineales afines de $K^n$ son los sub-espacios afines de $K^n$. Las variedades lineales afines de $\mathbf{R}^n$ coinciden con los sub-conjuntos cerrados de $\mathbf{R}^n$ homeomorfos a $\mathbf{R}^p$ para $p \leqslant n$.

• *Variedad lineal afín de un espacio afín.* — Sinónimo de sub-espacio afín.

## Afinidad

Siendo $D_1$ y $D_2$ dos rectas no paralelas de $\mathbf{R}^2$, la afinidad de eje $D_1$ de dirección $D_2$ y de razón $k \in \mathbf{R}^*$ es la aplicación afín que, a todo punto M, hace corresponder el punto M′ tal que $\overline{OM'} = k\overline{OM}$, donde O es la proyección de M sobre $D_1$ paralelamente a $D_2$.
V. OBLICUO, ORTOGONAL.




## Afínmente

• *Familia de puntos afínmente libre.* — V. LIBRE.

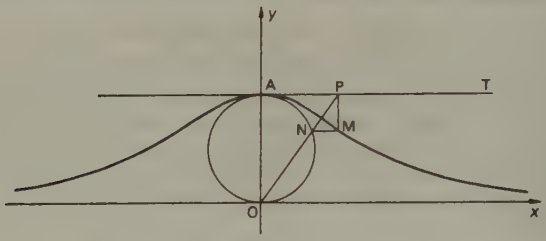
• *Familia de puntos afínmente ligada.* — V. LIGADA.

• *Puntos afínmente independientes.* — V. INDEPENDIENTES.

## Agnesi, Maria Gaetnac (1718-1799)

• *Cúbica de Agnesi.* — Cúbica unicursal, llamada también Versiéra o bruja de Agnesi, cuya ecuación cartesiana en un sistema de referencia ortonormado es $x^2 y = a^2(a - y)$. Se la puede considerar engendrada por la circunferencia que pasa por O, con centro en Oy y de diámetro OA de longitud $a$. Sea T la tangente en A a la circunferencia, una secante que pase por A corta a la circunferencia en N y a la tangente T en P. Cuando la secante gira alrededor de O, el punto de intersección M de la paralela a Oy que pasa por P y de la paralela a Ox que pasa por N describe la cúbica de Agnesi. Esta curva es

simétrica con relación a $Oy$ y admite $Ox$ por asíntota. El área comprendida entre la cúbica y su asíntota es igual a cuatro veces la del círculo generador.




## Agudo

• *Angulo agudo.* — Angulo cuyo coseno es estrictamente positivo. V. GEOMETRÍA (del), OBTUSO, RECTO.

• *Sector angular agudo.* — Sector angular saliente $(Ox, Oy)$ tal que el ángulo $\widehat{(Ox, Oy)}$ sea agudo.

## Aguja

• *Problema de la aguja de Buffon.* — V. BUFFON.

## Agujereada

• *Recta agujereada.* — Par (D, O) donde D es una recta y O un punto de D.

## Agujereado

• *Cono agujereado de $K^{n+1}$ donde $K$ es un cuerpo.* — Unión de cero y de un cono agujereado de $K^{n+1}$.

• *Disco agujereado.* — Disco privado de su centro (ya no es un disco).

• *Intervalo agujereado de $R$.* — Intervalo acotado de extremos $a$ y $b$ privado de su centro $\frac{a+b}{2}$ (ya no es un intervalo).

• *Plano agujereado.* — Par (P, O) donde P es un plano y O un punto de P. El plano afín agujereado (P, O) es isomorfo con el espacio vectorial al que P está asociado.

## Aislado

• *Punto aislado de una parte de A de un espacio topológico E.* — Punto $x$ de A para el cual existe un entorno V de $x$ que verifica $V \cap A = \{x\}$. Un punto aislado es un punto adherente particular.

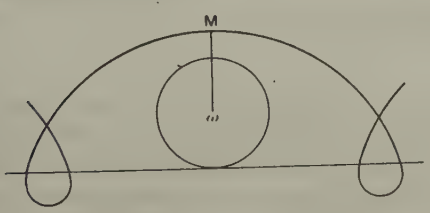
• *Vértice aislado de un grafo.* — Vértice que no admite ninguna cúspide vecina.

## Ajuste

Sea una familia de puntos de coordenadas $(x_i, y_i)$, donde $i = 1, 2, ..., n$, sobre un plano en un sistema de referencia cartesiano. Se denomina ajuste de estos puntos por una curva algebraica de grado $k$, la búsqueda de una función polinómica P de grado $k$ tal que la curva de ecuación $y = P(x)$ pase «lo más cerca posible» de los $n$ puntos. Los sentidos asignados a la expresión «lo más cerca posible» corresponden a los diferentes métodos de ajuste; el más utilizado es el de los mínimos cuadrados. Los ajustes utilizados en estadística sobre las nubes de puntos permiten estudiar la correlación de ciertos pares de caracteres estadísticos. En física permiten, a la vista de numerosas medidas, proponer una ley entre dos magnitudes físicas. Por ejemplo: entre la longitud de una barra metálica y la temperatura de ésta.
V. LINEAL, MÍNIMOS CUADRADOS (Método de los), REGRESIÓN (Recta de).

## Alargada

• *Cicloide alargada.* — Curva plana engendrada por un punto M unido al plano móvil de un círculo de centro $\omega$ y de radio $r < \omega M$ rodando sin deslizarse sobre una recta.




• *Epicicloide alargada.* — V. EPITROCOIDE.

• *Hipocicloide alargada.* — V. HIPOTROCOIDE.

## Alargado

• *Elipsoide alargado.* — Elipsoide de revolución engendrado por una elipse que gira alrededor de su eje focal. Por relación a un sistema de referencia

ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donde O es el centro de simetría y $\vec{k}$ un vector unitario del eje de revolución, su ecuación cartesiana es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ con } c > a.$$

## Alea numérica (Numérica de azar)

Sinónimo de variable aleatoria. (*Alea* significa dado en latín.)

## Aleatoria

• *Variable aleatoria de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. — Aplicación X de $\Omega$ en **R** tal que todo intervalo $]-\infty, x[$ de **R** tenga un suceso por imagen recíproca por X, es decir, tal que $X^{-1}(]-\infty, x[) \in \mathscr{A}$. Es una aplicación medible sobre $(\Omega, \mathscr{A})$.
V. CENTRADA, CONJUNTA (Ley), CONTINGENCIA, CONTINUA, CORRELACIÓN, COVARIANZA, DENSIDAD, DESVIACIÓN TÍPICA, DISCRETO, INDEPENDIENTES, LEY, MATEMÁTICA (Esperanza), MOMENTO, POISSON, REDUCIDA, REPARTICIÓN, VARIANZA.

## Aleatorios

• *Números aleatorios.* — Sinónimo de números al azar.

## Alembert, Jean le Rond d' (1717-1783)

V. DALAMBERTIANO.

• *Criterio o regla de convergencia de D'Alembert.* — Sea $\Sigma u_n$ una serie de términos reales positivos tal que, para $n$ suficientemente grande, la sucesión $u_{n+1}/u_n$ está definida y admite un límite $\lambda$ finito o no. Si $\lambda < 1$, la serie $\Sigma u_n$ es convergente; si $\lambda > 1$, la serie $\Sigma u_n$ es divergente. Este criterio no permite concluir cuando $\lambda = 1$. Dada una serie $\Sigma u_n$ de términos complejos, esta regla aplicada a la serie $\Sigma|u_n|$ proporciona un criterio de convergencia absoluta.

• *Principio de D'Alembert.* — En dinámica, la ecuación fundamental $\Sigma \vec{F} = m\vec{\gamma}$ puede ser reducida formalmente a $\Sigma \vec{F} = \vec{0}$ si se conviene en contar en el número de fuerzas que actúan sobre un punto material una fuerza particular igual por definición a $-m\vec{\gamma}$ y denominada fuerza de inercia. Esta convención llamada principio de D'Alembert, facilita la extensión a la dinámica de ciertos métodos utilizados en estática.

• *Solución de D'Alembert de la ecuación de las cuerdas vibrantes.* — V. VIBRANTES (Cuerdas).

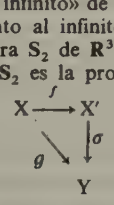
• *Teorema de D'Alembert o de Gauss-D'Alembert.* — Afirma que el cuerpo de los números complejos está algebraicamente cerrado. Conjeturado por Girard a principios del siglo XVII, en el XVIII D'Alembert trató vanamente de demostrarlo, y Gauss (en el XIX) dio su primera demostración.
Aunque llamado en ocasiones teorema fundamental del álgebra, no puede demostrarse sin recurrir al análisis.

## Aleph (ℵ)

Primera letra del alfabeto hebraico, utilizada desde Cantor, para denotar cardinales infinitos; por ejemplo, $\aleph_0$ es el cardinal infinito más pequeño: $\aleph_0 = \text{Card } \mathbf{N}$ y $\aleph_1$ es el más pequeño de los cardinales estrictamente mayor que $\aleph_0$. Más generalmente, $\aleph_{n+1}$ es el más pequeño cardinal estrictamente más grande que $\aleph_n$.
V. CARDINAL, CONTINUO (Hipótesis del).

## Alexandrov, Pavel Serguiévitch (1896-1982)

• *Compactificado de Alexandrov de un espacio localmente compacto* X. Par $(X', f)$ tal que:
1) $X'$ es un espacio compacto;
2) $f$ es un homeomorfismo de X sobre el complementario de un punto $\omega$ de $X'$;
3) si $(Y, g)$ es otra pareja que verifica 1) y 2), existe un homeomorfismo y uno solo $\sigma: X' \to Y$ tal que $g = \sigma \circ f$. Se dice entonces que $\omega$ es «el punto del infinito» de $X'$ y que $X'$ se obtiene a partir de X por adjunción de un punto al infinito. El compactificado de Alexandrov del plano $\mathbf{R}^2$ es la esfera $\mathbf{S}_2$ de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; el homeomorfismo de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{S}_2$ es la proyección estereográfica:




## Alfabeto

Conjunto de signos que permiten por yuxtaposición según reglas precisas, construir un lenguaje.
V. FORMAL (Gramática), LENGUAJE, LIBRE (Monoide), TEORÍA.

## Algebra

Etimológicamente, esta palabra viene de *al-jabr* (reconstrucción), empleada por primera vez en el siglo IX por el matemático árabe al-Khwarizmi para caracterizar el traslado, en una igualdad, de un término de un miembro al otro.

Partió del cálculo práctico sobre los números y de problemas de aritmética elemental, el álgebra se liberó de sus orígenes al principio, desarrollándose en dos direcciones: sustitución de los números por letras y paso del cálculo de las fórmulas a la resolución de ecuaciones (es decir, de fórmulas conteniendo incógnitas). Accedió a una autonomía plena gracias a un doble movimiento de ampliación:

1.° Vinculándose a conjuntos bien definidos además de los números usuales (reemplazados incluso por letras) y constituidos por elementos que no se encuentran en la aritmética, por ejemplo, objetos geométricos (figuras, vectores en el sentido antiguo de la palabra, transformaciones, etcétera), funciones, nociones combinatorias, espacios topológicos, probabilidades, proposiciones lógicas, etcétera.

2.° Sustituyendo el empleo de las operaciones corrientes por el de «leyes (o reglas) de composición» (internas o externas) definidas por axiomas (generalmente en pequeño número). Las combinaciones de estas leyes de composición constituyen «estructuras algebraicas», las principales de las cuales son los grupos, los anillos, los ideales, los cuerpos, los módulos, los espacios vectoriales, etcétera.

Esta asociación de estructuras algebraicas con conjuntos puede, por lo demás, ser disociada, quedando el estudio de las estructuras algebraicas como el único objetivo fundamental del álgebra. Un álgebra particular puede, por tanto, ser definida bien como el estudio de una estructura algebraica dada, bien como el estudio de uno (o de varios) conjunto(s) provisto(s) de una (o de varias) estructura(s) algebraica(s) dada(s). Y el álgebra puede ser considerada como la reunión de las álgebras particulares.

La aclaración de las estructuras algebraicas que fecundan los conjuntos que sostienen las diversas ramas de las matemáticas ha transformado poderosamente, algebraizándola, a toda la Matemática.

Desde la óptica de la historia de las matemáticas, se opone a veces el álgebra «clásica» —que se limita a los números reales y complejos— al álgebra «moderna» o «abstracta» (estas dos palabras han adquirido aproximadamente el mismo sentido —que se extiende a conjuntos de otros elementos o a conjuntos en los que la naturaleza de sus elementos no está especificada— y que estudia las propiedades formales (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc.) de las leyes de composición. En nuestros días, al mismo tiempo que las estructuras algebraicas propiamente dichas continúan siendo estudiadas intensivamente —sobre todo, la teoría de los grupos, que está conociendo notables desarrollos—, el término de álgebra se ha extendido a asociaciones con estructuras no algebraicas (de orden, combinatorias, topológicas), donde el álgebra domina fuertemente como la teoría de las funciones, los espacios vectoriales topológicos, la topología algebraica, las álgebras topológicas, las álgebras homológicas, la teoría de modelos, las categorías, etc.

F. LL.

V. Abstracto, Boole, Conjuntos, Conmutativo, Homológico, Lineal, Literal, Moderno, Topológico, Universal.

• *Algebra sobre un cuerpo conmutativo* K *o* K*-álgebra.* — Un álgebra sobre K, también llamado K-álgebra, es un cuádruple (E, +, ×, ·), donde (E, +, ·) es un K-espacio vectorial y donde la multiplicación × es una ley de composición interna sobre E, distributiva en relación con la adición. Si la multiplica-

ción es asociativa [resp. conmutativa], se dice que el álgebra es asociativa [resp. conmutativa]. El espacio vectorial de las funciones reales de una variable real provisto de la multiplicación de las funciones es un álgebra sobre R. V. CARÁCTER, HIPERCOMPLEJO (Sistema), SUB-ÁLGEBRA.

- *Algebra afín de una variedad algebraica afín.* — V. AFÍN.
- *Algebra alternativa.* — V. ALTERNATIVA.
- *Algebra de Boole.* — V. BOOLE.
- *Algebra de Cayley.* — V. CAYLEY.
- *Algebra de Clifford.* — V. CLIFFORD.
- *Algebra de conjuntos o álgebra de partes de un conjunto.* — V. CONJUNTO.
- *Algebra de los circuitos eléctricos.* — V. ELÉCTRICOS.
- *Algebra de división.* — V. DIVISIÓN.
- *Algebra de Lie.* — V. LIE.
- *Algebra de Lindenbaum-Tarsky.* — V. BOOLE (Algebra de).
- *Algebra de sucesos.* — V. SUCESOS.
- *σ-álgebra de partes de un conjunto.* — V. SIGMA-ÁLGEBRA, TRIBU.

## Algebraicamente

- *Cuerpo* K *algebraicamente cerrado.* — Cuerpo K tal que todo polinomio no constante de K[X] se descompone en K[X] en un producto de polinomios del primer grado. Esto equivale a decir que K es algebraicamente cerrado en todo supercuerpo de K. Esta noción es intrínseca. Los cuerpos C y $\overline{Q}$ son algebraicamente cerrados.

- *Cucerpo* K *algebraicamente cerrado en un supercuerpo* E. — Sub-cuerpo K de un cuerpo E tal que todo elemento de E algebraico sobre K pertenece a K. Esta noción es relativa a E.

- *Números complejos algebraicamente dependientes o independientes.* —Dos números complejos $\alpha$ y $\beta$ se denominan algebraicamente dependientes si existe un polinomio no nulo $P(X, Y) \in Z[X, Y]$ tal que $P(\alpha, \beta) = 0$ y algebraicamente independientes en el caso contrario. Se sabe, por ejemplo (V. CHOONOVSKY) que $\pi$ y $\Gamma(1/4)$ son algebraicamente independientes, pero se sigue ignorando si $e$ y $\pi$ son o no algebraicamente independientes. Se definen de la misma forma $n$ números complejos algebraicamente independientes.
V. WEIERSTRASS.

## Algebraico/a

- *Cierre algebraico de un cuerpo conmutativo* K. — Extensión algebraica K' de K tal que sea un cuerpo algebraicamente cerrado. El cuerpo C es el cierre algebraico de R pero no de Q. Entre dos cierres algebraicos $\Omega$ y $\Omega'$ de un cuerpo K existe un isomorfismo $\sigma : \Omega \to \Omega'$ tal que $\sigma(x) = x$ para todo $x \in K$.

• *Conjunto algebraico o conjunto algebraico afín.* — Sinónimo de variedad algebraica afín.
V. AFÍN, IRREDUCTIBLE.

• *Curva algebraica.* — Variedad algebraica afín de dimensión 1.
Una curva algebraica plana de $K^2$, donde K es un cuerpo conmutativo, es el conjunto de los ceros de un polinomio no constante de K[X, Y]. En $\mathbf{R}^2$, considerado como espacio afín, una curva algebraica es el conjunto de los puntos M de coordenadas $(x, y)$ que verifican $f(x, y) = 0$ con $f \in \mathbf{R}[X, Y]$. Las rectas, las cónicas, las cúbicas, las cuárticas, las séxticas, las sépticas, son curvas algebraicas de grados respectivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.
V. GRADO, IRREDUCTIBLE, ORDEN.

• *Dual algebraico de un espacio vectorial* E *sobre un cuerpo* K. — Espacio vectorial E* de las formas lineales sobre E. Si es de dimensión finita, E y E* tienen igual dimensión y son canónicamente isomorfas.

• *Ecuación algebraica.* — Ecuación de la forma $P(x) = 0$, donde P designa un polinomio.
V. GRADO.

• *Elemento algebraico sobre un cuerpo* K. — Elemento de una extensión de K, raíz de un polinomio $P \in K[X]$.

• *Entero algebraico.* — Número complejo entero sobre Z. Así, $i\sqrt{2}$ es un entero algebraico, pero el número algebraico $i\sqrt{2/2}$ no lo es.

• *Estructura algebraica.* — «Modelo» matemático utilizado en álgebra: monoide, grupo, anillo, módulo, cuerpo, espacio vectorial, etc. En la práctica, estas estructuras se definen dando datos de uno de varios conjuntos y relaciones sometidas a condiciones denominadas axiomas de la estructura considerada.

• *Extensión algebraica de un cuerpo* K. — Extensión de K, todos cuyos elementos son algebraicos sobre K.

• *Función algebraica.* — Una función numérica $f$ de variable real es algebraica si existe un polinomio $P \in \mathbf{R}[X, Y]$ tal que $P(x, f(x)) = 0$ para todo real $x$ que pertenezca al dominio de definición de $f$.

• *Forma algebraica de un número complejo z.* — Existe un par único de números reales $(a, b)$ tal que $z = a + ib$. Se dice que $a + ib$ es la forma algebraica de $z$.

• *Geometría algebraica.* — Dominio de las matemáticas en pleno desarrollo; nació del estudio de las raíces comunes a una familia $(P_i)_{i \in I}$ de polinomios $P_i \in K[X_1, ..., X_n]$, donde K es un cuerpo, y de la investigación de problemas tales como la determinación de los puntos con coordenadas racionales de superficies como la de la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Se ha desarrollado en torno a problemas de clasificación de las curvas, de las superficies, de la búsqueda de invariantes, etc. La introducción de la teoría de los esquemas y los trabajos de Grothendieck la han transformado profundamente.

• *Grupo algebraico.* — Sub-grupo cerrado de $GL_n(C)$.

• *Medida algebraica de un segmento* AB *situado sobre un eje.* — Número $\overline{AB} = x_B \cdot x_A$, donde $x_A$ y $x_B$ son las abscisas de A y B sobre el eje considerado.

• *Número algebraico.* — Número complejo raíz de un polinomio no nulo $P \in \mathbf{Q}[X]$. Los números $\sqrt{2}$, $i$ y $\cos(\pi/n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, son algebraicos, $\pi$ y $e$ no lo son, se dice que son trascendentes.
V. TRASCENDENTE.

• *Superficie algebraica.* — Variedad algebraica afín de dimensión 2.
V. GRADO, ORDEN.

• *Topología algebraica.* — Prolongación de la topología combinatoria. Sumariamente puede decirse hoy que la topología algebraica es el estudio de los funtores de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los grupos. Nació de consideraciones sobre las deformaciones continuas de los caminos en los espacios topológicos; desde Henri Poincaré, su técnica principal para clasificar los espacios topológicos consiste en asociar a un espacio topológico un grupo que sea un invariante topológico, el grupo fundamental del espacio, de tal suerte que dos espacios homeomorfos tengan el mismo grupo fundamental. Parece que este dominio es uno de los que en el siglo XX han conocido desarrollos importantes.

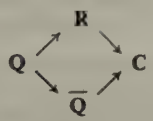
• *Variedad algebraica.* — Noción análoga para la geometría algebraica a la de variedad diferencial en geometría diferencial; viene dada por un conjunto algebraico y un «haz» de anillos que verifican cierto número de condiciones, sobre todo condiciones de cotejo.

• *Variedad algebraica afín.* — V. AFÍN (Variedad algebraica).

## Algebraicos

• *Cuerpo de números algebraicos.* — Todo subcuerpo del cuerpo $\overline{\mathbf{Q}}$ de los números algebraicos es denominado un cuerpo de números algebraicos. A veces se restringe ese nombre a los sub-cuerpos de grado finito sobre $\mathbf{Q}$.

• *Cuerpo de números algebraicos.* — El conjunto $\overline{\mathbf{Q}}$ de los números algebraicos es un sub-cuerpo de $\mathbf{C}$ denominado cuerpo de los números algebraicos. Es de grado infinito sobre $\mathbf{Q}$, numerable y algebraicamente cerrado.
V. TRASCENDENTES.




## Algol

Uno de los principales lenguajes algorítmicos de la programacion con vocación esencialmente matemática cuyo nombre es la contracción de «ALGOrithmic Language». Inventado y puesto al día entre 1958 y 1968, está más formalizado que FORTRAN. Debido a su grandisima claridad y a su precisión, ALGOL es el lenguaje mejor adaptado al tratamiento de los problemas específicamente matemáticos. Es empleado asimismo para la publicación y la comunicación de algoritmos entre matemáticos.

## Algorítmica

Ciencia de los algoritmos.

## Algorítmico

(Adjetivo) Que concierne a los algoritmos; ejemplo: un proceso algorítmico.

## Algoritmo

La palabra «algoritmo» procede de Al Khwarizmi, sobrenombre del matemático árabe Muhammad Ibn Musa (siglo IX), nacido en Khwarizem, en Uzbekistan. Su sentido ha cambiado varias veces antes de llegar a sus significaciones actuales.

Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación o ambigüedad) en un número finito de etapas a cierto resultado y esto independientemente de los datos. Por lo tanto, un algoritmo no resuelve solamente un problema único, sino toda una clase de problemas que no difieran más que por los datos, pero que estén gobernados por las mismas prescripciones. Así es como se distinguen los algoritmos llamados «numéricos» de los algoritmos de juegos, de los algoritmos de búsqueda de un camino en un laberinto, de los algoritmos de detección de la equivalencia de las palabras en un cálculo algebraico o lógico, etc.

Entre los algoritmos numéricos, el más simple es aquél que, para la adición de dos números expresados en el sistema de numeración decimal, da el proceso a seguir: adición de las cifras de las unidades, inscripción de la cifra de esa suma, retención eventual, etcétera, hasta las cifras de las clases más elevadas. Una fórmula, en el sentido corriente de este término, es un algoritmo; por ejemplo:

$$x',\ x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que permite calcular las soluciones de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, en función de los coeficientes de esa ecuación. Véase igualmente el algoritmo de Euclides.

El uso de algoritmos se ha impuesto en la programación del cálculo automático, sobre todo cuando recurren a operaciones repetitivas. Un programa informático es un algoritmo redactado en un lenguaje comprendido por el ordenador. Pero los tiempos de cálculos necesarios para aplicar un algoritmo son con frecuencia desmesuradamente grandes; entonces se introduce una noción de «eficacia de un algoritmo», en trabajos susceptibles de tener numerosas aplicaciones prácticas.

La hipótesis fundamental de la teoría de los algoritmos es que cada algoritmo puede ser realizado por una máquina de Turing particular y también consecuentemente por una máquina de Turing universal. Por desgracia, todos los problemas de las matemáticas y de la lógica matemática no son necesariamente algorítmicamente resolubles. Es el caso, sobre todo, del problema de la decisión de la deductibilidad (Church). No es posible construir un algoritmo

que permita demostrar que otro algoritmo es o no es posible; es un problema indecidible. De ello se deriva que las matemáticas no se reducen a la construcción de algoritmos y que el descubrimiento en matemáticas no puede ser automatizado por completo.
Sin embargo, mientras que los matemáticos están divididos, en un plano filosófico, por la cuestión de la «existencia» de los objetos matemáticos, se muestran unánimes a la hora de reconocer la importancia de los algoritmos, debido a su carácter constructivo.

F. LL.

V. EUCLIDES, EUCLIDIANO, PROBLEMAS (Clasificación de los), TRABAJO (Teoría de la organización del), TURING.

• *Algoritmo del camino crítico.* — V. CRÍTICO.

• *Algoritmo de organización en teoría de la organización del trabajo.* — Conjunto de reglas que atribuyen las diferentes tareas a los diferentes procesos.

• *Algoritmo de tipo exponencial.* — V. EFICACIA (de los algoritmos).

• *Algoritmo de tipo polinomial.* — V. EFICACIA (de los algoritmos).

## Alhazen I.o Al Haitham (965-1039)

• *Problema de Alhazen o del billar circular.* — ¿En qué dirección hay que lanzar una bola colocada en un punto dado A sobre un billar circular para que vuelva a pasar por el punto A tras dos reflexiones sucesivas?

## Alícuota

• *Parte alícuota de un número entero.* — Término empleado antiguamente en aritmética para designar a un divisor de ese número distinto a él mismo.

## Alineadas

Situadas en una misma recta.

## Alternada

• *Aplicación (o forma) n-lineal alternada sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Aplicación (o forma) $n$-lineal $f$ que se anula para todo $n$-upla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ que tenga dos vectores iguales. Si $\sigma$ es una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$, entonces $f$ verifica:

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

donde $\varepsilon(\sigma)$ designa la signatura de $\sigma$.

• *Negación alternada.* — V. SHEFFER.

• *Serie alternada.* — Una serie $\Sigma u_n$ de términos reales no nulos se llama alternada si para todo entero $n$, $u_n$ y $u_{n+1}$ son de signos contrarios. Para que

una serie tal converja el suficiente con que la serie $(|u_n|)$ sea decreciente y converja hacia 0. Por ejemplo, la serie semi-armónica es alternada y conv ergente.

• *Serie armónica alternada.* — Sinónimo de serie semi-armónica.

## Alternado

• *Grupo alternado.* — Sub-grupo $A_n$ del grupo simétrico $S_n$ formado por las permutaciones pares sobre $\{1, 2, ..., n\}$; el subgrupo distinguido en $S_n$, de orden $n!/2$, y simple para $n \geqslant 5$.

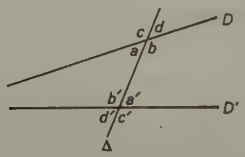
## Alternativa

• *Algebra alternativa sobre un cuerpo* K. — Algebra A sobre K que verifica una propiedad de asociatividad débil que se expresa por $a^2b = a(ab)$ y $ab^2 = (ab)b$ para todos $a, b \in A$; ejemplo de álgebra alternativa y no asociativa: los octoniones de Cayley. Se sabe (Bruck y Kleinfeld) que la única álgebra de división alternativa y no asociativa sobre **R** es la de los octoniones de Cayley y que (Dott y Milnor, 1958) las únicas álgebras de división sobre **R** de dimensión finita son de dimensión 1, 2, 4 u 8: aquéllas que son asociativas son isomorfas a **R**, **C** o **H**; aquéllas que son alternativas y no asociativas son isomorfas al álgebra **O** de las octavas de Cayley.
V. CAYLEY, DIVISIÓN (Algebra de), HAMILTON (Cuaternios de).

• *(Lógica).* — Conector notado W, llamado asimismo o «exclusivo» o «disyunción exclusiva».
V. EXCLUSIVO.

## Alternos

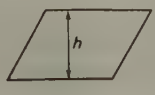
• *Angulos alternos internos (resp. alternos externos).* — Sean dos rectas D y D′ cortadas por una secante Δ. Los sectores angulares $a$ y $a'$ (o $b$ y $b'$) son usualmente llamados ángulos alternos internos. Igualmente, los sectores angulares $c$ y $c'$ (o $d$ y $d'$) son llamados ángulos alternos externos.




## Altura

• *Altura de un cono o de un cilindro.* — V. CONO, CILINDRO.

• *Altura de un paralelogramo.* — Cualquiera de las distancias entre dos lados opuestos.

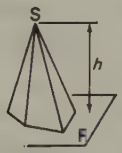


● *Altura de un punto en un sistema de coordenadas esféricas.* — Sinónimo de latitud.

● *Altura de un trapecio.* — Distancia *h* entre los dos lados paralelos del trapecio.

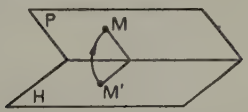
● *Altura de un triángulo.* — Distancia *h* entre un vértice y el lado opuesto a este vértice. Un triángulo admite, pues, tres alturas. Se llama igualmente altura a una cualquiera de las tres rectas que pasan por un vértice y perpendicular al lado opuesto. Las tres alturas de un triángulo son concurrentes. V. ORTOCENTRO.

● *Altura de una pirámide de vértice S.* — Distancia *h* entre S y la cara F opuesta a S. Se llama también altura a la recta que pasa por S y es perpendicular a F.




## Alzado

(Descriptiva.) Construcción que permite determinar un punto M de un plano P, conociendo el punto abatido de M, por un abatimiento del plano P sobre un plano horizontal H.




## Ambigüedad

● *Grado de ambigüedad de un teorema.* — Número de demostraciones lógicamente diferentes de ese teorema. Las demostraciones que son equivalentes y que no difieren más que por su redacción no deben tomarse, por lo tanto, en cuenta (Ejemplo: las del teorema de Pitágoras).
V. AMBIGUO.

## Ambiguo

• *Teorema ambiguo.* — (Matemática.) Teorema para el que existe más de una demostración.
V. AMBIGÜEDAD (Grado de).

## Amicales

• *Números amicales.* — Sinónimo de números amigos.

• *Números amigos.* — Dos números son *amigos* si la suma de las partes alícuotas de cada uno de ellos es igual al otro. Su nombre viene de una creencia griega según la cual dos personas cuyos nombres «correspondían» con números amigos tenían relaciones amistosas. Los griegos no conocían más que dos números amigos, los más pequeños: $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ y $284 = 2^2 \cdot 71$. Mediante ordenador han podido mostrarse 42 parejas de números amigos inferiores a 10.000.000, entre los cuales 17.296 y 18.416 (encontrados por Fermat) y 9.437.056 y 9.363.584 (encontrados por Descartes). Parece que el cociente de dos números amigos tiende hacia 1 cuando esos números aumentan. No se conoce ningún par formado por un número par y un número impar.

## Amplitud

Designa, en mecánica, el valor máximo de elongación del movimiento, la elongación del movimiento de un cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio. Por ejemplo, la amplitud del movimiento rectilíneo sinusoidal de ecuación horaria $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ es $|a|$.

• *Amplitud de una armónica.* — V. ARMÓNICA.

• *Amplitud de un intervalo acotado de* **R**. — Distancia $d = |b - a|$ entre los extremos $a$ y $b$ del intervalo.

• *Amplitud de un número complejo no nulo.* — Unico ángulo $\theta \in \mathfrak{U}$ ( $\mathfrak{U}$ es el grupo de los ángulos) tal que $\theta = (\overrightarrow{O_x}, \overrightarrow{OM})$, donde M es la imagen de $z$ en el plano de Argand-Cauchy referido a un sistema de referencia en el que $\overrightarrow{Ox}$ es el eje de las abscisas. Se la denota por $\mathrm{Am}(z)$ de suerte que si $z$ y $z'$ son dos números complejos no nulos, en el grupo $\mathfrak{U}$ tenemos:

$$\mathrm{Am}(zz') = \mathrm{Am}(z) + \mathrm{Am}(z')$$

y

$$\mathrm{Am}(\bar{z}) = \mathrm{Am}(\bar{z}') = -\mathrm{Am}(z).$$

Arg $z$ es una medida en radianes de $\mathrm{Am}(z)$.
V. ARGUMENTO, MEDIDA (de un ángulo).

• *Amplitud hiperbólica.* — Sinónimo de gudermaniano.

## Analagmatía

• *Polo de analagmatía.* — V. ANALAGMÁTICA (Curva).

## Analagmática

• *Curva analagmática.* — Curva plana globalmente invariante por una inversión. El polo de la inversión se denomina polo de analagmatía. La estrofoide es analagmática. Los óvalos de Descartes son curvas analagmáticas en relación a cada uno de sus focos.

• *Geometría analagmática.* — Trata de las propiedades invariantes por inversión o desplazamiento.

## Análisis

Prolongación moderna del cálculo infinitesimal, el análisis es el estudio de funciones, de conjuntos provistos de estructuras topológicas y de sus relaciones. Los conceptos base son las nociones de límite y de función continua. El análisis ha conocido un gran desarrollo entre mediados del siglo XIX (Cauchy-Weierstrass) y mediados del siglo XX (Lebesgue-Fréchet-L. Schwartz) y se desarrolla en la actualidad en numerosas direcciones: funciones complejas, cálculo diferencial, cálculo integral, teoría de la medida, análisis funcional, etcétera.

• *Análisis armónico.* — V. ARMÓNICO.

• *Análisis combinatorio.* — V. COMBINATORIA.

• *Análisis de datos.* — V. DATOS (Análisis de).

• *Análisis de discriminantes.* — V. DATOS (Análisis de).

• *Análisis de las correspondencias.* — V. DATOS (Análisis de).

• *Análisis en componentes principales.* — V. DATOS (Análisis de).

• *Análisis factorial.* — V. FACTORIAL.

• *Análisis funcional.* — V. FUNCIONAL.

• *Análisis no estándar.* — V. NO ESTÁNDAR.

• *Análisis numérico.* — V. NUMÉRICO.

• *Análisis vectorial.* — V. VECTORIAL.

## Analítica

• *Función analítica.* — Una función $f$ definida sobre un abierto D de **R** (o de **C**) con valor en **R** (o en **C**) se dice analítica en D si, para todo punto $x_0 \in D$, es desarrollable en serie entera en el punto $x_0$. Toda función analítica en D es indefinidamente derivable en D, pero la recíproca es falsa. Para las funciones de una variable compleja, $f$ es holomorfa sobre D si y solamente si $f$ es analítica sobre D. Las funciones analíticas se encuentran en los sectores más diversos. En matemática pura se utilizan en teoría de los números, en geometría, en topología, etc. En matemáticas aplicadas intervienen en ramas que van de la física clásica a la mecánica cuántica.

• *Geometría analítica.* — Sus principios reagrupan la asociación de funciones numéricas con nociones geométricas, el uso de sistemas de coordenadas y de representaciones gráficas. Para las figuras más clásicas, permite descubrir un gran número de sus propiedades geométricas, estudiando las propiedades algebraicas de las ecuaciones de estas figuras, sin necesidad de hacer dibujos a veces complicados e ilegibles, incluso engañosos. Y a la inversa, el estudio de ecuaciones algebraicas permite imaginar figuras que la observación directa del mundo natural no sugiere. En la enseñanza de segundo grado, se llama geometría analítica al álgebra lineal en $\mathbf{R}^3$ por oposición a la geometría llamada «pura» o sintética.

• *Mecánica analítica.* — Parte de la mecánica constituida de desarrollos matemáticos extraídos de las ecuaciones de Lagrange.

V. HAMILTONIANO, LAGRANGIANO.

• *Principio de prolongación analítica.* — Si dos funciones $f$ y $g$ analíticas en un abierto conexo coinciden en un entorno de un punto de D, son idénticas en D. Este teorema permite afirmar que si $h$ es una función analítica sobre D que prolonga $f$ sobre un abierto conexo D' conteniendo D, entonces $h$ es única.

## Analysis situs

No debe confundirse (pese a la semejanza de los vocabularios) con otra rama de las matemáticas, superada en la actualidad, la geometría de posición.

Nombre dado en el siglo XVII a los primeros trabajadores de topología (y de combinatoria) en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, poniendo en evidencia las propiedades geométricas no ligadas a la métrica. Tal es el caso del problema de los siete puentes de Koenigsberg, del problema de los cuatro colores y del estudio de la noción de puntos situados entre dos puntos.

Los progresos iniciales del *Analysis situs* han sido frenados porque los problemas a los que se vinculaba eran pensados en términos de geometría tradicional. Su gran mérito ha sido tomar conciencia de esa contaminación, eliminarla y dejar expedito el camino a la topología combinatoria y a la topología algebraica.

## Anamorfosis

En pintura, transformación, por un procedimiento óptico o geométrico, de un cuadro o de un objeto de tal forma que se lo vuelve irreconocible, grotesco o enigmático, devolviendo la imagen la figura inicial en un espejo curvo, o su examen de perfil. Un ejemplo célebre se encuentra en *Los Embajadores* de Holbein.

• *Principio de anamorfosis de Lalanne.* — Principio utilizado para la construcción de nomogramas en el plano. Consiste en graduar dos rectas perpendiculares con la ayuda de dos escalas funcionales de forma que todas las *isópletas* sean rectas.

## Anarmónico

• *Relación anarmónica.* — Sinónimo anticuado de birrelación.

## Ancho

Se emplea por oposición a estricto. Por ejemplo, a veces se especifica que la desigualdad $a \leqslant b$ es un sentido amplio para recordar que la igualdad de $a$ y $b$ no está excluida.

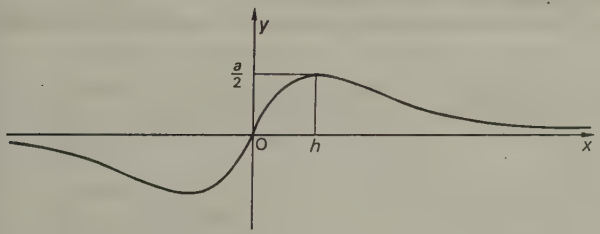
## Anchura

• *Anchura de un rectángulo.* — Nombre dado a la medida del lado más pequeño por oposición a la longitud que designa la medida del lado grande.

• *Curva de longitud constante.* — V. CONSTANTE.

## Anguinea

Cúbica unicursal estudiada por Newton, L'Hospital y Huygens, cuya ecuación cartesiana en un sistema de referencia ortonormado es $y = \dfrac{ahx}{x^2 + h^2}$. Admite Ox como asíntota y es simétrica respecto del origen O.




## Angular

• *Aceleración angular de un sólido* S *animado de un movimiento de rotación.* — Derivada segunda $d^2\theta/dt^2$ con relación al tiempo del ángulo $\theta$ que define el movimiento. Es también la derivada primera con relación al tiempo de la velocidad angular $\omega$.

• *Coeficiente angular.* — V. INCLINACIÓN.

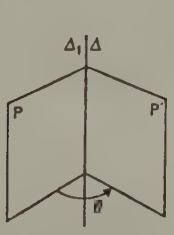
• *Desviación angular de dos vectores (o de dos semi-rectas, o de dos rectas).* — Sinónimo de medida del ángulo no orientado de dos vectores (o de dos semi-rectas o de dos rectas).

• *Distancia angular de dos semi-rectas que parten de un mismo punto.* — Medida en radianes del sector angular saliente que forman.

• *Sector angular.* — Se llama sector angular saliente (resp. entrante) de un plano euclídeo P a la intersección (resp. la reunión) de dos semi-planos cuyas fronteras D y D′ son rectas que se cortan en un punto O denominado vértice. Las semi-rectas $Ox$ y $Oy$, cuya reunión constituye la frontera del sector angular, se llaman los lados. Si los dos semi-planos son abiertos, el sector angular no contiene sus lados; se llama abierto. Si los dos semi-planos son cerrados, contiene sus lados; se llama cerrado.

En nuestros días se encuentran todavía expresiones donde figura la palabra ángulo en el sentido de sector angular; es el caso, por ejemplo, para ángulo entrante, ángulo saliente. En ocasiones hay ambigüedad; tal es el caso de las expresiones: ángulo nulo, ángulo recto, ángulo llano.
V. ADYACENTES, AGUDO, LLANO, MEDIDA, OBTUSO, OPUESTOS (por el vértice), RECTO.

• *Velocidad angular de un espacio móvil una de cuyas rectas* $\Delta$ *permanece en coincidencia con una recta fija* $\Delta_1$. — Sean P un semi-plano fijo de frontera $\Delta$, P′ un semiplano de frontera $\Delta_1$ ligado al espacio móvil, y $\theta$ la medida de un rectilíneo del diedro (P, P′) en el instante $t$.
La derivada $d\theta/dt$ se llama velocidad angular del espacio móvil alrededor de $\Delta_1$.




• *Velocidad angular de un sólido S animado de un movimiento de rotación.* — Derivada $d\theta/dt$ con relación al tiempo $t$ del ángulo $\theta$ que define el movimiento.

## Angulo

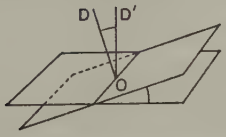
Todavía hace algunos decenios la palabra ángulo designaba tanto lo que hoy se denomina sector angular (V. ANGULAR) como su medida. Las definiciones utilizadas actualmente tienen el mérito de suprimir estas confusiones, fuentes de errores, pero se alejan de la idea intuitiva que se puede tener de la noción de ángulo.
V. AGUDO, BISECTRICES, BROCARD, CENTRO (Ángulo al), CHASLES (Relación

de), DIEDRO, ENTRANTE, GEOMÉTRICO, INSCRITO, LLANO, MEDIDA, NULO, OBTUSO, ORIENTADO, POLAR, RECTO, SALIENTE, SIMILITUD, TRISECCIÓN.

• *Angulo de anomalía.* — Sinónimo de anomalía excéntrica.

• *Angulo de dos curvas planas en un punto de intersección* I. — Angulo de sus tangentes si existen.

• *Angulo de dos planos secantes.* — Uno cualquiera de los ángulos geométricos de los cuatro diedros que forman. Es también el ángulo geométrico de dos rectas D y D′ perpendiculares cada una a un plano.




• *Angulo de dos superficies en un punto de intersección* I. — Angulo de sus planos tangentes en I, si existen.

• *Angulo de Lambert.* — Sinónimo de gundermaniano.

• *Angulo de nutación.* — V. EULER (Angulos de).

• *Angulo poliedro.* — Angulo sólido particular.
V. POLIEDRO, TRIEDRO.

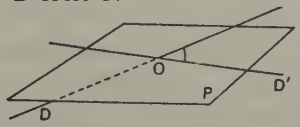
• *Angulo de precesión.* — V. EULER (Angulos de).

• *Angulo de rotación afín.* — Angulo de rotación vectorial asociada a la rotación afín.

• *Angulo de rotación propia.* — V. EULER (Angulos de).

• *Angulo de una curva y de una superficie en un punto de intersección* I. — Si la curva C y la superficie Σ admiten respectivamente una tangente T y un plano tangente P en I, se llama ángulo de C y de Σ en I al ángulo de T y de P.

• *Angulo de una recta* D *y de un plano* P. — Si D es perpendicular a P, el ángulo de D y P es el ángulo recto no orientado. Si D no es perpendicular a P, es el ángulo no orientado de rectas D y D′, donde D′ es la proyección ortogonal de D sobre P.




• *Angulo de una rotación vectorial del plano euclídeo* E. — Sea $\mathfrak{U}$ el grupo de ángulos isomorfos al grupo $O^+(E)$ de las rotaciones vectoriales. La imagen $\theta$ de una rotación $r \in O^+(E)$ por el isomorfismo se llama ángulo de rotación.

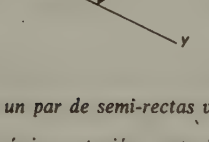
• *Angulo de una rotación vectorial r de un espacio vectorial euclídeo* E *de dimensión 3.* — La restricción de la rotación $r$ al plano vectorial P ortogonal al eje de $r$ es una rotación vectorial $r'$ en P. Una vez escogida una orientación en P, se llama ángulo de la rotación $r$ el ángulo de la rotación $r'$.

• *Angulo de atornillamiento (o desplazamiento helicoidal) de un espacio afín euclídeo de dimensión 3.* — Angulo de la rotación vectorial asociada a ese atornillamiento.

• *Angulo de un par de rectas afines* $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$. — Angulo denotado por $\widehat{(\mathscr{D}, \mathscr{D}')}$ del par (D, D') de rectas vectoriales asociadas a $\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}'$. Los ángulos $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}'_1)$ y $(\mathscr{D}_2, \mathscr{D}'_2)$ son iguales si y solamente si existe un desplazamiento $f$ (es decir, una rotación o una translación) tal que $f(\mathscr{D}_1)=\mathscr{D}'_1$ y $f(\mathscr{D}_2)=\mathscr{D}'_2$. Además de la relación de Chasles, estos ángulos verifican $\widehat{(\mathscr{D}, \mathscr{D}')}=-\widehat{(\mathscr{D}', \mathscr{D})}$ y tenemos $\widehat{(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}'_1)}=\widehat{(\mathscr{D}_2, \mathscr{D}'_2)}$ si y solamente si $\widehat{(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)}=\widehat{(\mathscr{D}'_1, \mathscr{D}'_2)}$.

• *Angulo de un par de rectas vectoriales* (D, D'). — Los ángulos de los pares de semi-rectas vectoriales $(\Delta, \Delta')$ tales que $\Delta \subset D$ y $\Delta' \subset D'$ son iguales o diferentes del ángulo llano $\bar{\omega}$. El par $\{\theta, \theta+\bar{\omega}\}$ constituido por estos ángulos es un elemento del grupo de los ángulos de rectas, denotado por $\widehat{(D, D')}$ y llamado ángulo del par (D, D'). Los ángulos $\widehat{(D_1, D'_1)}$ y $\widehat{(D_2, D'_2)}$ son iguales si existe una rotación vectorial $r$ tal que $r(D_1)=D'_1$ y $r(D_2)=D'_2$. Además de la relación de Chasles, estos ángulos verifican $\widehat{(D, D')}=-\widehat{(D', D)}$ y entonces tenemos $\widehat{(D_1, D'_1)}=\widehat{(D_2, D'_2)}$ si y solamente si $\widehat{(D_1, D_2)}=\widehat{(D'_1, D'_2)}$.

• *Angulo de un par de semi-rectas vectoriales* $(\Delta, \Delta')$. — Angulo denotado por $\widehat{(Ax, By)}$ de la pareja $(\Delta, \Delta')$, donde $\Delta$ y $\Delta'$ son las semi-rectas vectoriales asociadas en Ax y By.




• *Angulo de un par de semi-rectas vectoriales* $\widehat{(\Delta, \Delta')}$. — Angulo denotado por $\widehat{(\Delta, \Delta')}$ de la única rotación vectorial $r$ tal que $\Delta'=r(\Delta)$. Además de la relación de Chasles, estos ángulos verifican $\widehat{(\Delta, \Delta')}=-\widehat{(\Delta', \Delta)}$ y tenemos $\widehat{(\Delta_1, \Delta'_1)}=\widehat{(\Delta_2, \Delta'_2)}$ si y solamente si $\widehat{(\Delta_1, \Delta_2)}=\widehat{(\Delta'_1, \Delta'_2)}$.

• *Angulo de un par de vectores no nulos* $(\vec{u}, \vec{v})$. — Angulo denotado por $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ del par $(\Delta\vec{u}, \Delta\vec{v})$, donde $\Delta\vec{u}$ y $\Delta\vec{v}$ son las semi-rectas vectoriales engendradas por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Además de la relación de Chasles, estos ángulos verifican $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}=-\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$ y tenemos $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}=\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}$ si y solamente si $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}=\widehat{(\vec{v}, \vec{v}')}$.

• *Angulo sólido.* — V. SÓLIDO.

• *Coseno y seno de un ángulo.* — V. COSENO, SENO.

• *Geometría del ángulo recto (resp. agudo, obtuso).* — V. GEOMETRÍA.

• *Lados de un ángulo.* — La palabra ángulo se emplea aquí por sector angular.
V. ANGULAR.

• *Unidades de medida de un ángulo.* — Se utilizan el radián, el grado y el grado centesimal.
V. MEDIDA.

• *Vértice de un ángulo.* — La palabra ángulo se emplea aquí por sector angular.
V. ANGULAR.

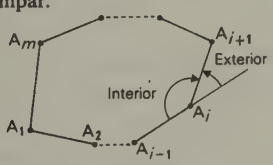
## Angulos

V. ANTISUPLEMENTARIOS, COMPLEMENTARIOS, EULER, OPUESTOS, SUPLEMENTARIOS.

• *Angulos alternos internos (resp. alternos externos).* — V. ALTERNOS.

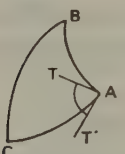
• *Angulos opuestos por el vértice.* — Sectores angulares opuestos por el vértice.
V. OPUESTOS.

• *Angulos de un polígono con n vértices* $A_1, A_2, ..., A_n$. — Para todo $i$ tal que $2 \leqslant i \leqslant n-1$, los ángulos $(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$ y $(\overrightarrow{A_iA_{i-1}}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}})$ son llamados respectivamente ángulo exterior y ángulo interior del polígono en el vértice $A_i$. Los ángulos $(\overrightarrow{A_nA_1}, \overrightarrow{A_1A_2})$ y $(\overrightarrow{A_1A_n}, \overrightarrow{A_1A_2})$ son los ángulos exterior e interior en $A_1$. Los ángulos $(\overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1})$ y $(\overrightarrow{A_nA_{n-1}}, \overrightarrow{A_nA_1})$ son los ángulos exterior e interior en $A_n$. La suma de los ángulos interiores es igual bien al ángulo nulo, si el número de vértices es par, bien al ángulo llano, si ese número es impar.




• *Angulos de un triángulo de vértices* A, B *y* C. — Los ángulos interiores $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ son respectivamente llamados ángulos en A, en B y en C del triángulo ABC. La suma de los ángulos de un triángulo es igual al ángulo llano.

• *Angulos de un triángulo esférico de vértices* A, B, C. — Se llama ángulo en A del triángulo el ángulo $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'})$, donde AT y AT' son las semi-rectas de origen A tangentes en A a los lados AB y AC del triángulo. Se definen de igual forma los ángulos en B y C. La suma de los ángulos de un triángulo esférico es superior al ángulo llano.
V. ESFÉRICO (Exceso).

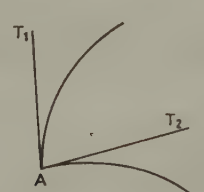



• *Grupo de los ángulos de rectas de un plano vectorial euclídeo* E. — Sea $\mathfrak{U}$ el grupo de los ángulos de E, sea $\bar{\omega}$ el ángulo llano de $\mathfrak{U}$ y sea $\mathfrak{U}_0$ el conjunto de los pares $(\theta, \theta + \bar{\omega})$, donde $\theta \in \mathfrak{U}$. Para los dos pares $\{\theta, \theta + \bar{\omega}\}$ y $\{\theta', \theta' + \bar{\omega}\}$ de $\mathfrak{U}_0$ las cuatro sumas obtenidas al sumar un ángulo del primer par con un ángulo del segundo se reducen a los dos ángulos $\theta + \theta'$ y $\theta + \theta' + \bar{\omega}$. El par $\{\theta + \theta', \theta + \theta' + \bar{\omega}\}$ pertenece a $\mathfrak{U}_0$, y se llama la suma de los pares $\{\theta, \theta + \bar{\omega}\}$ y $\{\theta', \theta' + \bar{\omega}\}$. Provisto de esta adición, $\mathfrak{U}_0$ es un grupo llamado grupo de los ángulos de rectas de E.

• *Grupo de los ángulos de un plano vectorial euclídeo* E. — Grupo aditivo denotado por $\mathfrak{U}$ isomorfo al grupo $O^+(E)$ de las rotaciones vectoriales de E. Existen varias construcciones posibles de semejante grupo. Por ejemplo, puede identificarse $\mathfrak{U}$ con $O^+(E)$, notando aditivamente la ley de composición de las aplicaciones, que es conmutativa sobre $O^+(E)$. El grupo aditivo de los ángulos es igualmente isomorfo al grupo multiplicativo de los complejos unitarios.

## Anguloso

• *Punto anguloso de una curva.* — Punto donde la curva admite dos semitangentes no alineadas.




## Anillo

Estructura algebraica particular. Un anillo es un triplete $(A, +, \cdot)$, donde la ley + (llamada adición del anillo) es una ley de grupo abeliano sobre A, y la ley · (llamada multiplicación del anillo) es una ley de composición interna, asociativa y distributiva por relación a la adición. Usualmente se habla del «anillo A» cuando no hay ambigüedad sobre las leyes consideradas. Si la multiplicación de A es conmutativa o posee un elemento neutro, se dice que A es un anillo conmutativo o unitario.

La palabra «anillo» parece haber sido introducida por Hilbert.

V. Artiniano, Boole, Booleano, Característica, Cociente, Conmutativo, Dedekind, Discreto, Espectro, Euclidiano, Factorial, Fracciones, Ideal, Integro, Local, Noetherien, Ordenado, Polinomio, Prin-

CIPAL, REDUCIDO, SUB-ANILLO, TOPOLÓGICO, UNIDADES, UNITARIO, VALUACIÓN.

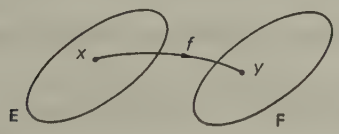
- *Anillo de conjuntos o anillo de partes de un conjunto.* — V. CONJUNTO.
- (Geom.) *Anillo esférico.* — V. ESFÉRICO.
- *Anillo de Möbius.* — V. MÖBIUS.
- *Anillo obtenido por adjunción de un conjunto a un anillo.* — V. ADJUNCIÓN.
- *Anillo total de las fracciones de un anillo.* — V. TOTAL.
- *σ-anillo.* — V. SIGMA-ANILLO.

## Anomalía

- *Angulo de anomalía.* — Sinónimo de anomalía excéntrica.
- *Anomalía excéntrica.* — V. EXCÉNTRICA.

## Antecedente

- *Antecedente de un elemento y de un conjunto* F *por una aplicación* $f: E \to F$.— Elemento $x \in E$ (no necesariamente único) cuya imagen por $f$ es $y$.




## Antiautoadjunta

- *Forma sesquilineal antiautoadjunta.* — Sinónimo de forma sesquilineal antihermitiana.

## Antiautoadjunto

- *Endomorfismo antiautoadjunto.* — Un endomorfismo $u$ de un K-espacio vectorial E provisto de una forma sesquilineal hermitiana (o de una forma bilineal simétrica) se llama antiautoadjunto si admite un adjunto $u^*$ y si $u = -u^*$.

## Antidesplazamiento

- *Antidesplazamiento de un espacio afín euclídeo* $\mathcal{E}$. — Isometría afín retrógrada de $\mathcal{E}$. Todo antidesplazamiento del plano euclídeo $\mathbf{R}^2$ es la composición de una traslación y de una simetría ortogonal por relación a una recta.
V. INVERSO, RETRÓGRADO.

## Antihermitiana

• *Forma sesquilineal antihermitiana sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Una forma sesquilineal $\varphi$ sobre E relativamente a un automorfismo involutivo $\sigma$ de K se denomina antihermitiana si es igual a la opuesta de su adjunta, es decir, si $\varphi(x, y) = -\sigma[\varphi(y, x)]$ para todo par $(x, y) \in E^2$.

• *Matriz antihermitiana.* — Matriz compleja A igual a la opuesta de su adjunto, es decir, tal que $iA$ sea hermitiana.

## Antihermítica

Sinónimo de antihermitiana.

## Antilogaritmo

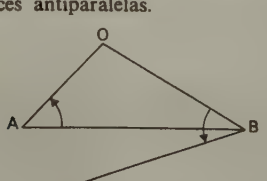
Nombre dado a veces a una función exponencial, es decir, a la función recíproca de una función logaritmo. Se emplea sobre todo este término en el caso del logaritmo decimal. Así, el antilogaritmo decimal de un real $b$ es el real estrictamente positivo cuyo logaritmo decimal es $b$.
V. NEPERIANO.

## Antinudo

• *Antinudo de un grafo.* — Vértice que admite como máximo dos arcos incidentes.

## Antiparalela

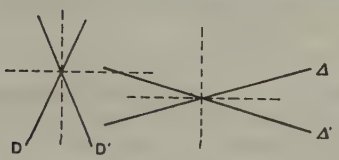
• *Dirección antiparalela a una recta con relación a un ángulo.* — Sean A, B, O tres puntos del plano. Se llama dirección antiparalela de la recta (AB) con relación al ángulo de semi-rectas $(\widehat{OA, OB})$ a la dirección de la semi-recta Bx tal que $(\widehat{AB, AO}) = (\widehat{BO, Bx})$. Los pares de rectas $\{(OA), (OB)\}$ y $\{(BA), (Bx)\}$ son entonces antiparalelas.




## Antiparalelas

• *Pares de rectas antiparalelas.* — En geometría plana, dos rectas D y D′ son antiparalelas a las rectas $\Delta$ y $\Delta'$ si las bisectrices de las rectas D y D′ son

paralelas a las bisectrices de las rectas $\Delta$ y $\Delta'$. El antiparalelismo es una equivalencia en el conjunto de pares de rectas del plano.




## Antipodal

• *Inmersión antipodal.* — Dada una esfera S de $\mathbf{R}^3$, la antipodia $f$ de S sobre S es una inmersión denominada inmersión antipodal. Si S está orientada, esa inmersión cambia la orientación de S: la cara de S orientada hacia el exterior se convierte en la cara de $f$(S) orientada hacia el interior y recíprocamente. V. INVERSIÓN (de la esfera).

## Antipodaria

• *Antipodaria de una curva plana* C. — Curva plana cuya podaria es C.

## Antipodia

Sea S una esfera de centro O de un espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$ y sea $f$ la simetría de centro O. La restricción de $f$ a S es una aplicación de S sobre S denominada antipodia.

## Antirreflexiva

• *Relación antirreflexiva.* — Relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto E tal que ningún elemento de E está en relación consigo mismo. La relación de ortogonalidad en el conjunto de las rectas del plano, las relaciones $<$ y $>$ en $\mathbf{R}$ son antirreflexivas.

## Antirreflexividad

• *Antirreflexividad de una relación binaria.* — Propiedad de la relación de ser antirreflexiva.

## Antisimetría

• *Antisimetría de una relación binaria.* — Propiedad de la relación de ser antisimétrica.

## Antisimétrica

• *Aplicación antisimétrica.* — Sean E un conjunto y F un grupo aditivo. Una aplicación $f$ de $E^n$ en F es antisimétrica si:

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_n)$$

para toda transposición $\tau$ sobre $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dados dos K-espacios vectoriales E y F, una aplicación $n$-lineal alternada $E^n$ en F es antisimétrica. Recíprocamente, si K es de característica diferente de 2, una aplicación $n$-lineal antisimétrica de $E^n$ en F es alternada.

• *1-grafo antisimétrico.* — 1-grafo (S, U) del que el conjunto U de sus arcos es tal que $(x, y) \in U$ implica $(y, x) \notin U$.

• *Relación antisimétrica.* — Relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto E tal que $[x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x]$ implica $x = y$ para todo par $(x, y)$ de $E^2$. Las relaciones $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ en R, la inclusión en $\mathfrak{P}$ (E), la divisibilidad en N son relaciones antisimétricas.

## Antisuplementarios

• *Angulos antisuplementarios.* — Angulos $\alpha$ y $\beta$ cuya diferencia es igual al ángulo llano.

## Anulador

• *Anulador de un elemento x de un módulo* M *sobre un anillo* A. — Conjunto de los elementos $\alpha$ de A tales que $\alpha \cdot x = 0$.

## Anularse

Tomar el valor cero. Por ejemplo, se dice que una función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se anula en $a \in \mathbf{R}$ (o que $a$ anula a $f$) si $f(a) = 0$.

## Apery, Roger (1916-1994)

• *Teorema de Apery.* — El número real $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$ es irracional. Por el contrario, se ignora si los números reales $\zeta(5)$ o $\zeta(7)$ son irracionales.
V. RIEMANN (Función $\zeta$ de).

## APL

Lenguaje de programación, el más evolucionado y el más científico, considerado generalmente como un lenguaje de futuro. Su nombre es la abreviatura de A Programming Language. En este lenguaje la notación algebraica tiende a substituir a una exposición algorítmica.

## Aplastado

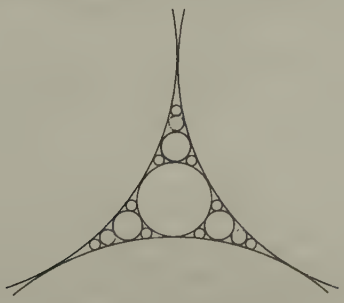
• *Elipsoide aplastado.* — Elipsoide de revolución engendrado por una elipse que gira alrededor de su eje no focal. Por relación a un sistema de referencia ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donde O es el centro de simetría y $\vec{k}$ un vector director del eje de revolución, su ecuación cartesiana es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con $c < a$.

## Aplastamiento

• *Coeficiente de aplastamiento de una serie estadística.* — V. FISHER (Coeficientes de).

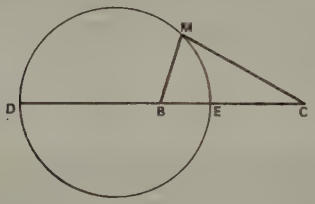
## Apolonio de Pérgamo (s. III-s. II a. C.)

• *Baderna de Apolonio de Pérgamo.* — Figura plana formada a partir de tres arcos de círculos iguales tangentes 2 a 2. El triángulo curvilíneo que determinan contiene un círculo inscrito que, a su vez, determina con los círculos

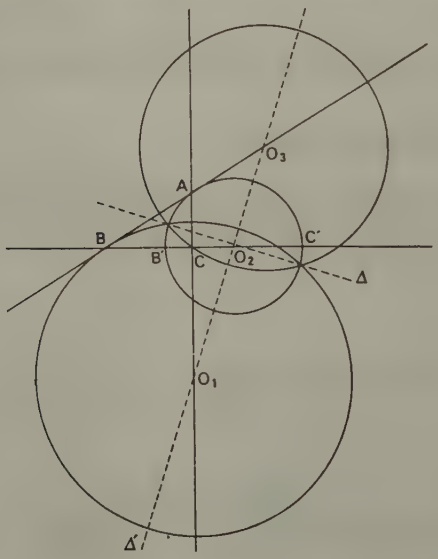


iniciales otros tres triángulos curvilíneos. Prosiguiendo el mismo proceso y rellenando los vacíos tan pequeños como sean se obtiene una infinidad de círculos que dejan entre sí un espacio lagunar del que no se sabe si su área es nula o su área es superior a 0.

• *Círculo de Apolonio de Pérgamo.* — Sean B y C dos puntos distintos del plano. El lugar de los puntos M del plano cuya relación MB/MC de distancias a dos puntos distintos B y C es constante e igual a $k > 0$ es un círculo centrado sobre la recta BC llamada de Apolonio. Los puntos de intersección D y E de ese círculo con la recta BC verifican $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = k$. La división (B, C, D, E) es armónica.

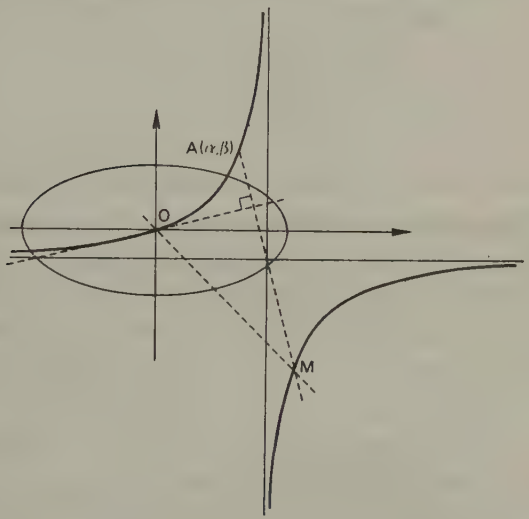



• *Círculos de Apolonio de Pérgamo de un triángulo* ABC. — Se llama círculo de Apolonio relativo a A al círculo de diámetro B' C', donde B' y C' son los puntos de intersección de las bisectrices interior y exterior del ángulo $\widehat{BAC}$ con la recta BC. Este círculo pasa por A. Se define de la misma manera los



círculos de Apolonio relativos a B y a C. Los tres círculos de Apolonio pertenecen a un mismo haz de círculo con punto de base cuyo eje radical $\Delta$ es el eje de Brocard. Sus centros están alineados sobre el eje de Lemoine $\Delta'$.

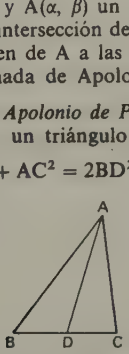
• *Hipérbola de Apolonio de Pérgamo.* — Sean una cónica con centro de ecuación cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (elipse) o $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (hipérbola) y $A(\alpha, \beta)$ un punto no situado sobre la cónica. El lugar de los puntos de intersección de los diámetros de la cónica con las perpendiculares que parten de A a los diámetros conjugados es una hipérbola llamada hipérbola de Apolonio. Su



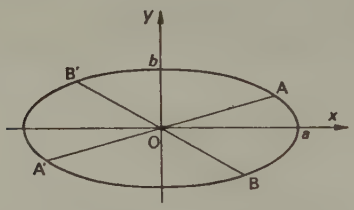

ecuación es: $c^2xy + (a^2 - c^2)\beta x - a^2\alpha y = 0$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ si la cónica es una elipse y $c^2 = a^2 + b^2$ si es una hipérbola. Sean una parábola de ecuación $y^2 = 2px$ y $A(\alpha, \beta)$ un punto no situado sobre la parábola. El lugar de los puntos de intersección de los diámetros de la parábola con las perpendiculares que parten de A a las direcciones conjugadas de esos diámetros es una hipérbola llamada de Apolonio. Su ecuación es $xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0$.

• *Teorema de Apolonio de Pérgamo.* — Afirma que si AD es la mediana que parte de A en un triángulo ABC, tenemos:

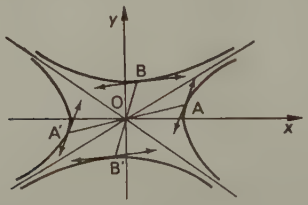
$$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2DA^2.$$



• *Teorema de Apolonio de Pérgamo para una elipse de centro* O. — Para dos diámetros conjugados AA′ y BB′ cualesquiera de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, el teorema de Apolonio afirma que $OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$ y que el área del triángulo OAB es igual a $ab/2$.




• *Teorema de Apolonio de Pérgamo para una hipérbola* H *de centro* O. — Sea AA′ un diámetro de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y sean B y B′ las intersecciones del diámetro conjugado con AA′ con la hipérbola conjugada en H. El teorema de Apolonio afirma que $OA^2 - OB^2 = a^2 - b^2$ y que el área del triángulo OAB es igual a $ab/2$.



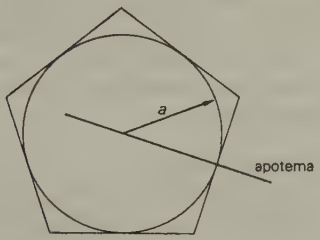

## Apotema

• *Apotema de un cono de revolución.* — V. Cono.

• *Apotema de un polígono regular.* — Mediatriz de un lado del polígono. Se llama igualmente apotema la longitud $a$ del radio del círculo inscrito en el polígono. Los valores de las apotemas de los polígonos regulares convexos usuales se dan a continuación en función del radio R del círculo circunscrito:

| *Triángulo* | *Cuadrado* | *Pentágono* | *Hexágono* |
|---|---|---|---|
| $\frac{R}{2}$ | $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$ | $R\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

| *Octógono* | *Decágono* | *Dodecágono* |
|---|---|---|
| $\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ | $\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{R}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ |




## Apotome

Empleado antiguamente por los griegos para designar segmentos de longitud $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ donde $a/b$ no es un cuadrado.

## Aplicación

Dados dos conjuntos E y F, y una relación $f$ de E en F, se dice que $f$ es una *aplicación* de E en F, si todo elemento $x$ de E posee una imagen única $f(x)$ en F. Aplicación y función son sinónimos. Sólo el uso o razones pedagógicas hacen emplear en ciertos casos una palabra en vez de otra (V. FUNCIÓN). V. ABIERTA, ADHERENCIA (Valor de), ADITIVA, AFÍN, BILINEAL, BIUNIFORME, BIUNÍVOCA, BIYECTIVA, BORELIANA, CERRADA, CIERRE, COMPOSICIÓN, CONTRAÍDA, COMPUESTA, CONTINUA, CRECIENTE, DECRECIENTE, DIFERENCIABLE, EXTENSIVA, FUENTE, IDÉNTICO, IMAGEN, IMPAR, INVERSA, INVOLUTIVA, INYECTIVA, LÍMITE, LINEAL, LIPSCHITZIANA, LLEGADA (Conjunto de), MEDIBLE, MULTILINEAL, $n$-LINEAL, NÚMERO, NULA, PAR, PARTIDA (Conjunto de), PROYECTIVA, RECÍPROCA, RESTRICCIÓN, SEMICONTINUA, SEMILINEAL, $\sigma$-ADITIVA, SIMÉTRICA, SOBREYECTIVA.

## Aproximación

Acción de sustituir un ente matemático (número, elemento de un espacio métrico, etc.) por otro suficientemente «próximo»; al segundo se le llama una aproximación del primero. El sentido de la palabra aproximación, que depende en cada situación del sentido dado a la expresión «próximo a», puede, en ciertos casos, parecer alejada de la idea intuitiva que de ella podría tenerse.

• *Aproximación de un real x.* — Todo real $a$ puede ser denominado una aproximación del real $x$. A la diferencia $a - x$ se la llama entonces el error de la aproximación. Esta noción presenta un interés en la medida en que se conoce un orden de magnitud del error (conocimiento de una incertidumbre, por ejemplo). Para decir que $a$ es una aproximación de $x$ se escribe a veces $a \simeq x$, lo cual se lee $a$ es sensiblemente igual a $x$.
V. DIOFANTIANA.

• *Aproximación de un real x con un grado de error ε.* — Un número real $a$ se llama una aproximación de $x$ con un error $\varepsilon$ si $|x - a| \leqslant \varepsilon$ o, de forma equivalente, si $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$. El número real $\varepsilon$ es un grado de incertidumbre sobre la aproximación. Si la aproximación $a$ es por defecto, entonces $a \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$. Si es por exceso, entonces $a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a$.

• *Aproximación decimal de un real x obtenido por redondeo.* — Un decimal: $a = m10^{-n} (m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N})$ es una aproximación de $x$ obtenida por redondeo si $a - 5 \cdot 10^{-(n+1)} \leqslant x < a + 5 \cdot 10^{-(n+1)}$. Es una aproximación a $5 \cdot 10^{-(n+1)}$ con grado de error. En general, las aproximaciones indicadas en las tablas numéricas son obtenidas por redondeo. Por ejemplo si 7,6158 es puesto por $\sqrt{58}$, tenemos: $7{,}61575 \leqslant \sqrt{58} < 7{,}61585$.

• *Aproximación por defecto de un real x.* — Aproximación de $x$ que es inferior a $x$. Los números $-1$ y 3,13 son aproximaciones por defecto de $\pi$.

• *Aproximación por exceso de un real x.* — Aproximación de $x$ que es superior a $x$. Los números 10 y 1,5 son aproximaciones por exceso de $\sqrt{2}$.

• *Incertidumbre sobre una aproximación.* — Un mayorante $\varepsilon$ del valor absoluto del error.
V. APROXIMACIÓN (con un grado de incertidumbre $\varepsilon$).

• *Aproximación diofantiana.* — V. DIOFANTIANA.

## Aproximaciones

• *Método (o procedimiento) por aproximaciones sucesivas.* — Método (o procedimiento) que permite construir una sucesión $x_n$ (de números o de elementos de un espacio normado) que da, en un sentido que depende del contexto, aproximaciones cada vez más cercanas a un ente matemático buscado cuando $n$ crece.

• *Teorema de las aproximaciones sucesivas.* — V. PICARD.

## Aproximado

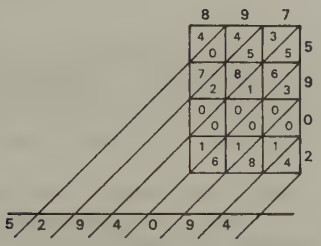
• *Valor aproximado.* — Sinónimo de aproximación.

## Aquiles y la tortuga

• *Paradoja de Aquiles y la tortuga.* — V. ZENÓN DE ELEA.

## Arabe

• *Multiplicación árabe.* — Nombre dado a veces en la actualidad al método presentado más abajo para efectuar una multiplicación (aquí 897 por 5.902).



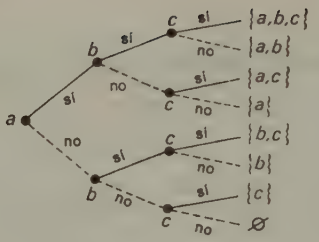

Ofrece varios puntos de interés, en particular el de no tener en cuenta las retenciones cuando se efectúan los productos intermedios, pudiendo efectuarse, además, esos productos en un orden arbitrario. En el siglo XV se llamaba «multiplicación por paralelogramos» o «multiplicación por celosía». Su principio es la base de las regletas de Néper.
V. NÉPER.

## Arabes

• *Cifras árabes.* — Símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Las cifras árabes sirven de soporte a la numeración decimal actual. Los partidarios de las cifras de numeración romana les reprochaban sus formas irregulares que, acentuadas por la caligrafía, podían prestarse a confusión. La aparición de la imprenta ha invalidado esa objeción. Por comodidad se utilizan cifras árabes para la escritura de los números en los diferentes sistemas de numeración cuya disposición se apoya en una base distinta de diez.

## Arbol

Grafo no orientado conexo sin ciclo. Usualmente se denomina así a un procedimiento frecuentemente utilizado para tratar los problemas de enumeración. Por ejemplo, el árbol que transcribimos aquí permite encontrar el conjunto de las partes del conjunto $E = \{a, b, c\}$.

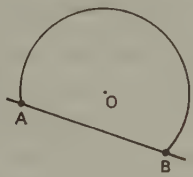



## Arborescencia

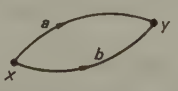
• *Arbol que posee una raíz.* — El árbol genealógico de los descendientes masculinos de un rey es una arborescencia cuya raíz es ese rey.

## Arco

Intuitivamente, un arco de curva es una porción de curva de una sola pieza. Por ejemplo, si A y B son dos puntos de una circunferencia, una cualquiera de las dos partes de esta circunferencia limitada por la cuerda que une A y B se llama un arco de círculo y es denotada por $\overset{\frown}{AB}$.
V. CAPAZ, GEOMÉTRICO, JORDAN, MAYOR, MENOR, PARÁMETRO.




• *Arco de un grafo* G = (S, U, *o*, *e*). — Elemento de U. Las aplicaciones *o* y *e* asocian a un arco dos vértices $x = o(a)$ e $y = e(a)$ llamadas respectivamente extremo inicial y extremo final del arco *a*. Dos arcos diferentes de un grafo pueden tener el mismo extremo inicial *x* y el mismo extremo final *y*. Cuando existe un único arco que admite por extremo inicial *x* y por extremo final *y*, se lo denota (*x*, *y*).
V. ADYACENTES, INCIDENTE.




• *Espacio conexo por arcos.* — V. CONEXO.

• *Medida de un arco de círculo.* — V. MEDIDA.

## arc cos

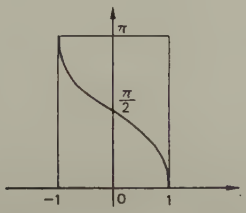
Sean $x$ e $y$ dos números tales que $x = \cos y$; se escribe entonces $y = \text{arc cos}\, x$. De este modo se define una función multiforme, denotada por arc cos, de $[\![-1, 1]\!]$ en **R** que a $x \in [\![-1, 1]\!]$ asocia una infinidad de números reales $y$ tales que $y = \text{arc cos}\, x$.
V. ARC COS.

## Arc cos

Abreviatura de Arco coseno.

## Arco coseno

• *Función Arco coseno.* — Biyección recíproca de la biyección $\theta \mapsto \cos\theta$ de $[\![0, \pi]\!]$ sobre $[\![-1, 1]\!]$. Se la denota por Arc cos. Para todo real $x$ del intervalo $[\![-1, 1]\!]$, el número Arc cos $x$ es el único real del intervalo $[\![0, \pi]\!]$ cuyo coseno sea $x$.



$y$=Arc cos $x$

## arc cotg

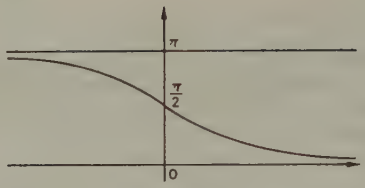
Sean $x$ e $y$ dos números reales tales que $x = \text{cotg}\, y$. Se escribe entonces $y = \text{arc cotg}\, x$ y de este modo se define una función multiforme, denotada por arc cotg, de **R** en **R** que a todo real $x$ asocia una infinidad de números reales $y$ tales que $y = \text{arc cotg}\, x$.
V. ARC COTG.

## Arc cotg

Abreviatura de Arco cotangente.

## Arco cotangente

• *Función Arco cotangente.* — Biyección recíproca de la biyección $\theta \mapsto \text{cotg}\,\theta$ de $]\!]0, \pi[\!]$ sobre **R**. Se denota Arc cotg. Para todo real $x$, el número Arc cotg $x$ es el único real del intervalo $]\!]0, \pi[\!]$ cuya cotangente sea $x$.




$y$=Arc cotg $x$

## arc sen

Sean $x$ e $y$ dos números reales tales que $x = \operatorname{sen} y$; se escribe entonces $y = \operatorname{arc\,sen} x$. De este modo se define una función multiforme, denotada por arc sen, de $[\![-1, 1]\!]$ en $\mathbf{R}$ que a $x \in [\![-1, 1]\!]$ asociada una infinidad de números reales $y$ tales que $y = \operatorname{arc\,sen} x$.

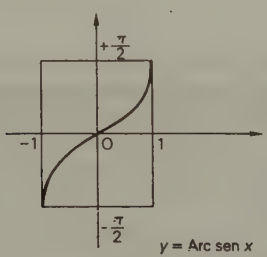
V. ARC SEN.

## Arc sen

Abreviatura de Arco seno.

## Arco seno

• *Función Arco seno.* — Biyección recíproca de la biyección $\theta \mapsto \operatorname{sen} \theta$ de $[\![-\pi/2, \pi/2]\!]$ sobre $[\![-1, 1]\!]$. Se la denota por Arc sen. Para todo número real $x$ del intervalo $[\![-1, 1]\!]$, el número Arc sen $x$ es el único número real del intervalo $[\![-\pi/2, +\pi/2[\!]$ cuyo seno es $x$.




$y = \operatorname{Arc\,sen} x$

## arc tg

Sean $x$ e $y$ dos números reales tales que $x = \operatorname{tg} y$; se escribe entonces $y = \operatorname{arc\,tg} x$. De este modo se define una función multiforme, denotada por arc tg, de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ que a todo número real $x$ asocia una infinidad de números reales $y$ tales que $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

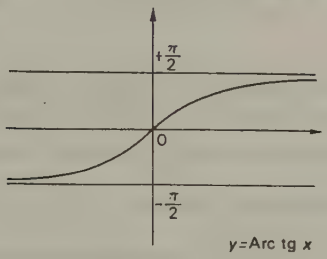
V. ARC TG.

## Arc tg

Abreviatura de Arco tangente.

## Arco tangente

• *Función Arco tangente.* — Biyección recíproca de la biyección $\theta \mapsto \operatorname{tg}\theta$ de $]-\pi/2, \pi/2[$ sobre **R**. Se la denota Arc tg. Para todo número real $x$, el número $\operatorname{arc\,tg}\, x$ es el único número real del intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ cuya tangente sea $x$.




## Area

• *Area de una parte de* $\mathbf{R}^2$. — Sobre $\mathbf{R}^2$ existe una única medida $\mu$, denominada de Lebesgue, tal que para todo rectángulo I × J, donde I es un intervalo de extremos $a_1$ y $b_1$ y J un intervalo de extremos $a_2$ y $b_2$, $\mu(\mathrm{I} \times \mathrm{J}) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$. Una parte D de $\mathbf{R}^2$ se denomina cuadrable y de área A (D) si D es $\mu$-medible y tiene por medida A (D). Con relación a un sistema de referencias ortonormado

$$\mathrm{A}(\mathrm{D}) = \iint_{\mathrm{D}} dx\ dy.$$

Los casos más corrientes son:
1/D es un dominio limitado por las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, el eje de las abscisas y un arco de curva de ecuación $y = f(x)$ con $f(x) > 0$, entonces

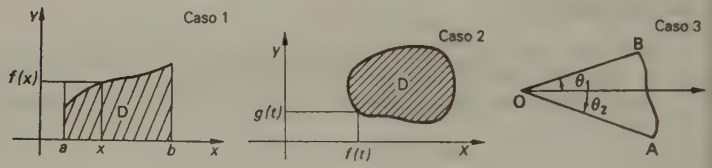
$$\mathrm{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b f(x)\ dx$$

2 / D es un dominio cuya frontera es una curva cerrada de ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$ donde $t \in [\![a, b]\!]$; entonces

$$A(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}\int_a^b [f(t)g'(t) - g(t)f'(t)]\ dt = \int_a^b f(t)g'(t)\ dt$$

3 / D está limitado por dos segmentos OA y OB y por un arco de curva AB de ecuación polar $\rho = f(\theta)$ (siendo O el polo): $\mathrm{A}(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\ d\theta$ o $\theta_1$ y $\theta_2$ son los ángulos polares de A y B.

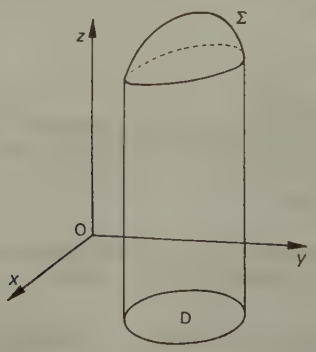
4 / Los puntos de D son conocidos por sus coordenadas polares $(\rho, \theta) \in \Delta$; entonces: $A(D) = \iint_{\Delta} \rho \, \delta\rho \, d\theta$.




• *Area de una porción* $\Sigma$ *de superficie.* — Cuando tiene sentido, el área de una porción $\Sigma$ de superficie es el número real $A(\Sigma)$ definido por la integral de su perficie $\iint_{\Sigma} dS$. Si la ecuación de $\Sigma$ es de la forma $z = f(x, y)$ y si D es la proyección de $\Sigma$ sobre el plano $xOy$, entonces $A(\Sigma) = \iint_{D} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$ donde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Si $\Sigma$ admite por representación paramétrica $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ y $z = h(u, v)$ donde $(u, v) \in \Delta$, entonces:

$$A(\Sigma) = \iint_{\Delta} \left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \right\| du \, dv.$$

V. GULDIN.



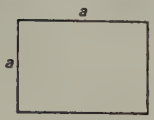

## Áreas

• *Areas de superficies usuales.*

Cuadrado

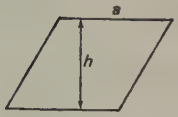
$A = a^2$

Rectángulo



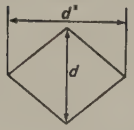

$A = ab$

Paralelogramo



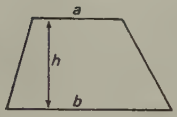

$A = ah$

Rombo



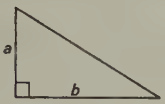

$A = \frac{1}{2} dd'$

Trapecio




$A = \frac{1}{2} h(a + b)$

Triángulo rectángulo




$A = \frac{1}{2} ab$

Triángulo isósceles

$A = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sin} \alpha$

Triángulo equilátero

$A = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

$A = \frac{1}{2} ah$

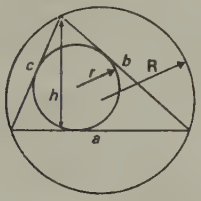
$A = pr$

con $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$

$A = \frac{abc}{4R}$

Cualquier triángulo




Polígono regular convexo

$A = \frac{1}{2} aP$ (P : perímetro)

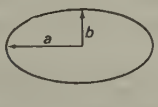
Círculo

$A = \pi R^2$

Corona

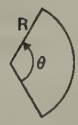
$A = \pi(R^2 - r^2)$

Elipse



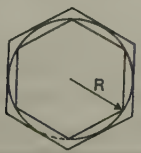

$A = \pi ab$

Sector circular




| *Medida α de θ en* | | |
|---|---|---|
| *radiantes* | *grados* | *grados* |
| $A = \frac{\alpha R^2}{2}$ | $A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ | $A = \frac{\pi R^2 \alpha}{400}$ |

**Areas A (resp. A') de los polígonos regulares convexos (resp. circunscritos) en un círculo de radio R.**

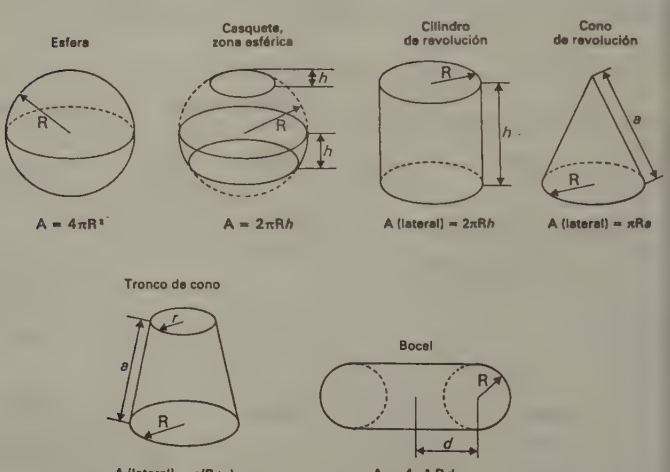



| | *3 lados Triángulo equilátero* | *4 lados Cuadrado* |
|---|---|---|
| A | $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ | $2R^2$ |
| A' | $3R^2\sqrt{3}$ | $4R^2$ |

| | 5 lados Pentágono | 6 lados Hexágono | 8 lados Octógono | 10 lados Decágono | 12 lados Dodecágono |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{5R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$ | $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ | $2R^2\sqrt{2}$ | $\frac{5R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $3R^2$ |
| A' | | $2R^2\sqrt{3}$ | $8R^2(\sqrt{2}-1)$ | | |

*Areas de poliedros regulares inscritos en una esfera de radio R.*

| Tetraedro | Cubo | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$ | $8R^2$ | $4\sqrt{3}R^2$ | $2\sqrt{10}\sqrt{5-\sqrt{5}}R^2$ | $2\sqrt{3}(5-\sqrt{5})R^2$ |



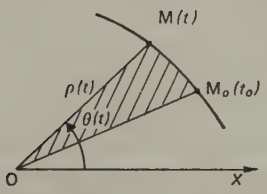

• *Ley de las areas.* — Un móvil puntual describe una trayectoria planeada conforme a la ley de las áreas con respecto a un punto O si la velocidad aerolar del móvil con respecto a O es constante. Esto es así, por ejemplo, en un movimiento de aceleración central.

## Areolar

• *Velocidad areolar por relación a un punto* O *de un móvil puntual* M *en trayectoria plana.* — Sean $M_0$ y M las posiciones del móvil en los instantes $t_0$ y $t$. El área $\mathcal{A}$ del dominio delimitado por los segmentos $OM_0$, OM y el arco $\overset{\frown}{M_0M}$ es una función de $t$. La derivada $d\mathcal{A}/dt$ con relación al tiempo se llama velocidad areolar de M con relación a O. Si las coordenadas polares de M en

un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{Ox})$ son $(\rho, \theta)$ la velocidad areolar de M viene dada por la fórmula:

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{dt}.$$




## Arg

- *Arg ch.* — Abreviatura de Argumento ch.
- *Arg coth.* — Abreviatura de Argumento coth.
- *Arg sh.* — Abreviatura de Argumento sh.
- *Arg th.* — Abreviatura de Argumento th.

## Argand, Jean Robert (1768-1822)

- *Plano de Argand-Gauss o de Argand-Cauchy.* — V. COMPLEJO (Plano).

## Arguesiano (derivado de Desargues)

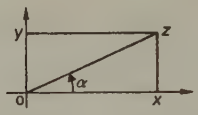
- *Espacio arguesiano.* — Nombre que a veces se da a la completitud proyectiva de un espacio afín. Esta terminología recuerda que fue Desargues quien creó el punto de partida de la geometría proyectiva al considerar que rectas paralelas eran concurrentes en puntos situados en el infinito.

## Argumento

- *Argumento de un número complejo no nulo z.* — Clase módulo $2\pi$ de $\mathrm{Arg}(z)$. Es un elemento de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ denotado por $\arg(z)$.

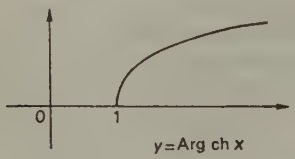
- *Argumento principal de un número complejo no nulo z.* — El número real, denotado $\mathrm{Arg}\, z$, igual a la medida principal de $\mathrm{Am}(z)$. Es por definición un número real $\alpha$ del intervalo $]-\pi, \pi]$ tal que $z = |z|e^{i\alpha}$ y si $\alpha'$ es un número real que verifica $z = |z|e^{i\alpha'}$ entonces $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, o sea, $\alpha' \equiv \mathrm{Arg}(z) \bmod 2\pi$. Cuando $z = x + iy$, tenemos todavía $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

La figura que va a continuación da una interpretación geométrica del argumento principal de un número complejo no nulo en el plano de Argand-Gauss.



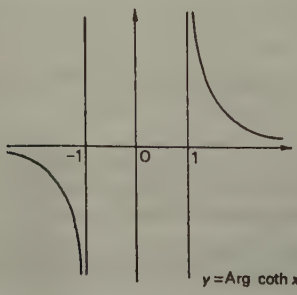

## Argumento ch

• *Función Argumento ch.* — Biyección recíproca de la biyección $t \mapsto \operatorname{ch} t$ de $[\![0, +\infty[\![$ sobre $[\![1, +\infty[\![$. Se la denota por Arg ch. Para todo real $x \geqslant 1$, el número $\operatorname{Arg\,ch}\, x$ es el único número real $t$ positivo tal que $\operatorname{ch} t = x$. Se demuestra que $\operatorname{Arg\,ch}\, x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1})$.



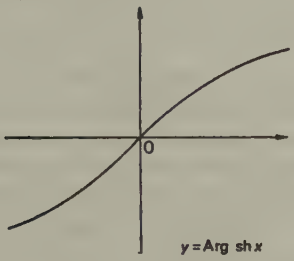

## Argumento coth

• *Función Argumento coth.* — Biyección recíproca de la biyección $t \mapsto \coth t$ de $\mathbf{R} - \{0\}$ sobre $\mathbf{R} - [\![-1, 1]\!]$. Se la denota por Arg coth. Para todo número real $x$ tal que $|x| > 1$, el número $\operatorname{Arg\,coth}\, x$ es el único real $t$ no nulo que verifica $\coth t = x$. Se demuestra que $\operatorname{Arg\,coth}\, x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x+1}{x-1}$.



## Argumento sh

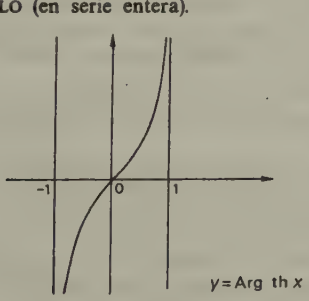
• *Función Argumento sh.* — Biyección recíproca de la biyección $t \mapsto \operatorname{sh} t$ de **R** sobre **R**. Se la denota Arg sh. Para todo número real $x$, el número Arg sh $x$ es el único número real $t$ tal que $\operatorname{sh} t = x$. Se demuestra que $\operatorname{Arg\,sh}\, x = \operatorname{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})$.




## Argumento th

• *Función Argumento th.* — Biyección recíproca de la biyección $t \mapsto \operatorname{th} t$ de **R** sobre $]-1, 1[$. Se la denota por Arg th. Para todo número real $x$ tal que $-1 < x < 1$, el número Arg th $x$ es el único número real $t$ tal que $\operatorname{th} t = x$. Se demuestra que $\operatorname{Arg\,th}\, x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}$.

V. DESARROLLO (en serie entera).




## Aria

• *Relación n-aria.* — V. *n*-ARIO.

## Arista

V. DIEDRO, POLIEDRO, POLÍGONO, TRIEDRO.

• *Arista de retroceso.* — V. RETROCESO.

• *Arista de un grafo no orientado* G = (S, E). — Elemento de E. V. ORIENTADO (No).

• *Arista de un grafo (orientado).* — Arista del grafo no orientado asociado a G.

• *Arista de un hipergrafo* (S, $\mathcal{E}$). — Elemento de la familia $\mathcal{E}$.

## Aritmética

Limitada al principio, con vistas a sus aplicaciones prácticas, a procedimientos de cálculo combinando enteros naturales mediante operaciones elementales (adición, substracción y multiplicación, luego división y, mucho más tarde, elevaciones al cuadrado y al cubo), la aritmética se dio luego por meta el estudio de las relaciones de los números racionales entre sí y con las operaciones. Semejante desarrollo se hizo posible por la adopción de un buen sistema de numeración de posición, más particularmente el de Occidente, de base decimal, con el cero. Vio incrementada su eficacia por la introducción del cálculo literal que debía abrir la vía a los métodos algebraicos.

La aritmética elemental así definida es un caso particular de una aritmética de los anillos principales. Constituyendo la adición y la multiplicación las operaciones de base de esos anillos, pueden distinguirse dos ramas de la aritmética que estudian la manera en que los enteros naturales pueden componerse por adición o por multiplicación con otros enteros naturales. Así es como la teoría de las particiones, la conjetura de Goldbach, la conjetura de Fermat, la conjetura de Waring y, más generalmente, el estudio de las funciones aritméticas aditivas derivan de la aritmética aditiva, mientras que el estudio de las funciones aritméticas multiplicativas, por ejemplo, la función Euler, deriva de la aritmética multiplicativa. También se habla de método y de teorías aditivas o multiplicativas.

Se consideran las aritméticas de anillos más generales que el anillo de los enteros naturales, por ejemplo, las aritméticas de anillos de polinomios, los anillos de Dedekind, etc.

El estudio de las funciones aritméticas llega a veces a introducirse en el análisis (real o $p$-ádico). Puede hablarse entonces de una aritmética asintótica —que se interesa en las propiedades asintóticas de funciones aritméticas, por ejemplo, la densidad asintótica de los números primos— de una aritmética analítica —que utiliza nociones que pertenecen a la teoría de las funciones analíticas, como en el estudio de la función zeta de Riemann—, etc. La teoría de los números enteros desemboca entonces en las teorías de los números algebraicos, trascendentes, de los números $p$-ádicos, etc., a los que mediante *deslizamientos de sentido* pueden asociarse las aritméticas correspondientes. En definitiva, hay interés en conservar abierta la definición de la palabra «aritmética» de forma que se le permita adaptarse a nuevas clases de números.

Desde la Antigüedad a nuestros días, numerosos matemáticos han intentado referir todas las matemáticas a la aritmética elemental (V. ARITMETIZACIÓN). De uno y otro lado, se debe a Frege, luego a Russell, haber intentado, siguiendo a Leibniz, deducir la aritmética de la lógica. Por último, Godel ha referido el problema de la consistencia (o coherencia, o no-contradicción) de la aritmética al de la consistencia de la lógica (clásica).

La aritmética (y en un sentido prácticamente equivalente, la teoría de números) tiene el privilegio de haber apasionado a los matemáticos más eminentes al mismo tiempo que no ha cesado de atraer a los aficionados. En este último caso, semejante seducción se debe, en gran parte, al hecho de que problemas dificilísimos, a veces no resueltos, tienen con frecuencia enunciados simples que pueden ser comprendidos a partir de una formación matemática casi inexistente. Gauss consideraba a la aritmética como la «reina de las matemáticas» y ha podido decirse que la teoría de los números era la «más pura de las matemáticas puras».
Más allá de las matemáticas puras y de las ciencias experimentales, la aritmética interviene en la actualidad en contabilidad y en ciencia económica.

F. LL.

V. ADITIVIDAD (Teoría de números), NÚMEROS, TRANSFINITA.

• *Aritmética formal.* — V. FORMAL.

• *Función aritmética.* — Se denomina a veces de este modo a funciones definidas sobre $\mathbf{N}^*$ con valores en $\mathbf{C}$.
V. ADITIVA (Función), MULTIPLICATIVA (Función), VON MANGOLDT.

• *Media aritmética de n números complejos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. — El número complejo $a$ definido por $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$.

• *Progresión o sucesión aritmética de razón* $a \in \mathbf{C}$. — Sucesión de término general $u_n = b + na$ con $b \in \mathbf{C}$ y $n \in \mathbf{N}$. La suma:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

de los $n$ primeros términos de una progresión aritmética es igual a:

$$nb + \frac{n(n-1)}{2} a.$$

• *Triángulo aritmético.* — Nombre que a veces se da al triángulo de Pascal.

## Aritmético-geométrica

• *Sucesión aritmético-geométrica.* — Una sucesión $(u_n)_{n \geq 0}$ de términos complejos es llamada aritmético-geométrica si existe un par $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ tal que $u_n = au_{n-1} + b$ para todo $n \geq 1$. Si $a = 1$, la sucesión es aritmética; si $a \neq 1$, la sucesión de término general $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ es geométrica, de razón $a$.

## Aritmo-geometría

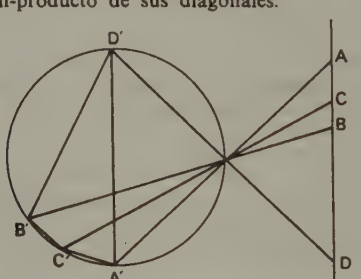
Nombre que a veces se da al estudio de los números figurados.

## Armónica

• *Armónica de una función $2\pi$-periódica f, acotada e integrable en el intervalo* $[-\pi, \pi]$ *de* **R**. — Sea $a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$ la serie de Fourier de $f$. La función $x \mapsto a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ se llama armónica de rango $n$ de $f$. Puede adquirir la forma $r_n \cos(nx - \varphi_n)$. Las reales $r_n$, $\varphi_n$, $n$ y $n/2\pi$ se llaman respectivamente la amplitud, la fase, la pulsación y la frecuencia de la armónica.

• *Análisis armónico.* — Nacido del estudio de las series, de la integral y de las transformaciones de Fourier, actualmente es la generalización de estas nociones a los grupos conmutativos localmente compactos; la teoría clásica se reconoce tomando los grupos $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{T}^n$ o $\mathbf{Z}^n$. Sus aplicaciones sobrepasan en estos momentos el cuadro del análisis funcional (ecuaciones lineales en derivadas parciales) y se extienden a otros campos, como, por ejemplo, la aritmética.

• *Cuadrángulo (o cuadrilátero) armónico.* — Cuadrángulo cuyos cuatro vértices son las imágenes recíprocas por inversión de cuatro puntos alineados formando una división armónica. Un cuadrángulo tal es inscribible. El producto de dos de sus lados es igual al producto de los otros dos y también igual al semi-producto de sus diagonales.



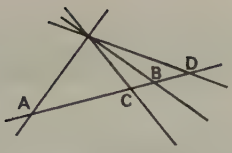

• *División armónica.* — Sean (A, B, C, D) cuatro puntos de una recta cuya birrelación es igual a $-1$. Se tiene $\overline{AC}/\overline{BC} = -\overline{AD}/\overline{BD}$.
V. Apolonio (Círculo de), Descartes (Relación de), Mac Laurin (Relación de), Newton (Relación de).

• *Función armónica.* — Función $f$ de clase $C^2$ sobre un abierto U de $\mathbf{R}^n$ para valores en C tales que:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

V. Laplace (Ecuación de).

• *Haz armónico de rectas.* — Cuatro rectas concurrentes cuyos puntos de intersección con una secante cualquiera determinan una división armónica sobre esta secante. Un par de rectas y sus bisectrices forman un haz armónico.




• *Homología armónica.* — Homología cuya birrelación es igual a $-1$.

• *Mediana armónica de n reales no nulos* $a_1$, ..., $a_n$. — Real $h$ definido por $\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right)$. Por ejemplo, la mediana armónica de 2,5 y 7,5 es 3,75.

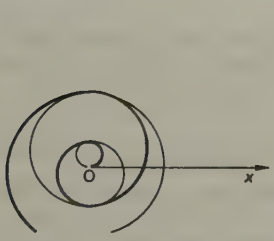
• *Serie armónica.* — Serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$. Esta serie es divergente. Sin embargo, la sucesión de término general $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \operatorname{Log} n$ converge y admite por suma la constante de Euler.

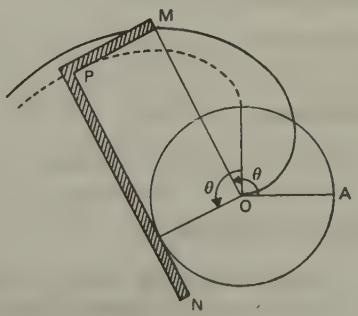
• *Serie armónica alternada.* — Serie semi-armónica.
V. SEMI-ARMÓNICA.

## Arquímedes (287-212 a. C.)

• *Axioma de Arquímedes.* — Un grupo totalmente ordenado es arquimediano, o verifica el axioma de Arquímedes si, cualquiera que sean los elementos $x > 0$ e $y \geqslant 0$ de ese grupo, existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $nx \geqslant y$. El grupo aditivo $\mathbf{R}$ de los números reales es un grupo arquimediano.

• *Espiral de Arquímedes.* — Curva plana de ecuación polar $\rho = k\theta$, donde $k$ es un real no nulo. Es el lugar de un punto M que recorre con una velocidad constante una semi-recta Ox del plano, girando esa semi-recta alrededor de O con una velocidad angular constante. Cuando la semi-recta Ox da una vuelta, el punto M se desplaza sobre Ox a una distancia $p = 2\pi k$ llamada paso de la espiral. La espiral de Arquímedes es la podaria de una envolvente de círculo con relación al centro. De este modo, si una escuadra (NPM) tal que PM = R tiene su lado PN que gira sin deslizarse sobre un círculo de radio R, el punto M describe una espiral de Arquímedes. La espiral de Arquímedes es una trisectriz.



## Arquimediano

• *Grupo arquimediano.* — Grupo totalmente ordenado que verifica el axioma de Arquímedes.
V. ARQUÍMEDES.

• *Valor absoluto arquimediano sobre un cuerpo* K. — Valor absoluto sobre K tal que existe un entero $n \in \mathbf{Z}$ que verifica $|n \cdot 1_K| > 1$, donde $1_K$ es el elemento unidad del cuerpo K. El valor absoluto habitual sobre C y sobre sus sub-cuerpos es arquimediano. El valor absoluto trivial sobre C o los valores absolutos *p*-ádicos sobre Q no son arquimedianos (se los denomina no arquimedianos).

## Arrastre

• *Movimiento de arrastre.* — Movimiento del espacio ligado a un sistema de referencia móvil con relación a un sistema de referencia fijo.

• *Vector velocidad (resp. vector aceleración ) de arrastre en el instante t de un punto* M *móvil con relación a un sistema de referencia* R′ *a su vez móvil con relación a un punto de referencia fijo* R. — Vector velocidad (resp. vector aceleración) con relación a un sistema de referencia fijo R del punto M′ ligado al espacio móvil y en coincidencia con M en el instante *t*.
V. ABSOLUTO.

## Artiniano

• *Anillo artiniano a derecha* [*resp. a izquierda*]. — Anillo unitario cuyo conjunto de ideales a derecha [resp. a izquierda] verifica la condición de cadena ascendente. Si A es conmutativo, se habla de anillo artiniano. Los anillos artinianos son los anillos noetherianos de dimensión de Krull nulo como $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ para todo $n \in \mathbf{N}^*$. Un anillo artiniano íntegro es un cuerpo.
V. NOETHERIANO.

## Arzela, Cesare (1847-1912)

• *Teorema de Cauchy-Arzela.* — V. CAUCHY.

## Ascendente

• *Condición de cadena ascendente.* — V. CADENA (Condición de).

## Ascoli, G. (1843-1896)

• *Teorema de Ascoli.* — Sean E un espacio métrico compacto, F un espacio de Banach y $\mathscr{C}(E, F)$ el espacio de Banach de las funciones continuas de E en

F. Una parte H de $\mathscr{C}(E, F)$ es relativamente compacta si y solamente si H es equicontinua y si para todo $x \in E$ el conjunto $H(x) = \{f(x) \in F / f \in H\}$ es relativamente compacto en F.

## Asimetría

• *Asimetría de una relación binaria.* — Propiedad de la relación de ser asimétrica.

## Asimétrica

• *Figura asimétrica.* — Figura que no admite ningún elemento de simetría.

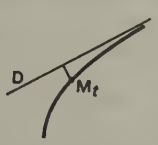
• *Relación asimétrica sobre un conjunto* E. — Relación binaria $\mathscr{R}$ sobre E tal que todo par $(x, y)$ de elementos distintos de E verifica bien $x \mathscr{R} y$, bien $y \mathscr{R} x$, pero no los dos a la vez. Las relaciones $<$, $>$ sobre **R** son asimétricas; la relación $\subset$ sobre (E) no lo es, a partir de que Card $E \geqslant 2$.

## Asíntota

En el plano proyectivo o en el espacio proyectivo, una asíntota a una curva es una tangente a la curva en un punto en el infinito.

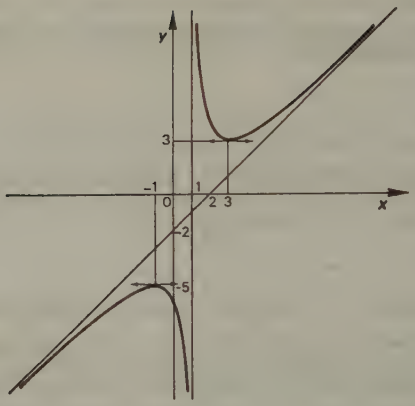
• *Asíntota (una).* — Recta asíntota.

• *Recta asíntota de una rama infinita de un arco paramétrico* $(I, f)$ *de* $\mathbf{R}^2$. — Si el arco $(I, f)$ admite una rama infinita relativa a $t_1 \in I$, se dice que una recta D es asíntota de la rama infinita si la distancia del punto $M_t$ del arco a la recta tiende hacia cero cuando $t$ tiende hacia $t_1$.




• *Recta asíntota de una rama infinita de una curva plana.* — Sean $\Gamma$ una curva plana de ecuación cartesiana $y = f(x)$ y $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ tales que el límite de $f(x)$ sea infinito cuando $x$ tiende hacia $x_0$. Una recta de ecuación $y = px + q$ es asíntota a la curva $\Gamma$ si $f(x) - px + q$ tiende hacia cero cuando $x$ tiende hacia el valor $x_0$. En este caso: $p = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x}$ y $q = \lim_{x \to x_0} f(x) - px$.

En el caso en que $x_0 \in \mathbf{R}$, la recta $x = x_0$ es asíntota a $\Gamma$ si el límite de $f(x)$ es infinito cuando $x$ tiende hacia $x_0$ por valores inferiores a $x_0$ o cuando $x$ tiende hacia $x_0$ por valores inferiores a $x_0$. La función $f$ definida sobre **R** por: $\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ admite por asíntotas las rectas de ecuaciones respectivas $x = 1$ e $y = x - 2$.



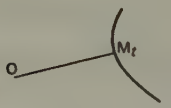

## Asintótica

• *Dirección asintótica de una curva plana.* — Una curva plana $\Gamma$ de ecuación cartesiana $y = f(x)$ admite la recta $y = px$ como dirección asintótica si $f(x)$ tiende hacia el infinito cuando $x$ tiende hacia $+\infty$ [resp. $-\infty$] y si:

$$\lim_{x+\infty} \frac{f(x)}{x} = p \quad \left[\text{resp.} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = p\right].$$

V. INFINITA (Rama), PARABÓLICA (Rama).

• *Dirección asintótica de una rama infinita de un arco paramétrico* (**I**, $f$) *del plano.* — Sean O un punto del plano y $M_t$ un punto del arco. Si el arco posee una rama infinita relativa a $t_1 \in \mathbf{I}$ y si la recta $OM_t$ admite una posición límite $D_0$ cuando $t$ tiende hacia $t_1$, entonces, la dirección de $D_0$ es independiente del punto O; se la llama dirección asintótica de la rama infinita. Una rama infinita no tiene necesariamente dirección asintótica; ése es el caso, por ejemplo, de la espiral de Arquímedes. Las ramas infinitas de las parábolas y de las hipérbolas tienen direcciones asintóticas.



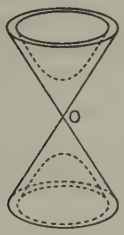
## Asintótico

• *Cono asintótico de una cuádrica* Q. — Cono cuyas direcciones de generatrices son las direcciones asintóticas de las cónicas trazadas sobre la cuádrica Q. Si la ecuación cartesiana de la cuádrica es:

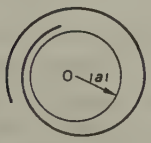
$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0,$$

la ecuación del cono asintótico de centro O, origen del sistema de referencia es:

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = 0.$$

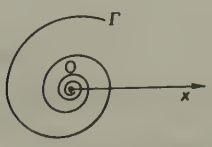



• *Círculo asintótico de una curva plana de ecuación polar* $\rho = f(\theta)$. — Si $f(\theta)$ tiende hacia un número real no nulo $a$ cuando $\theta$ tiende hacia el infinito, el círculo del que el centro O es el polo del sistema de referencia de coordenadas polares y de radio $|a|$ es llamado círculo asintótico a la curva.




• *Desarrollo asintótico.* — Sinónimo de desarrollo limitado al entorno del infinito.
V. LIMITADO.

• *Punto asintótico de una curva plana de ecuación polar* $\rho = f(\theta)$. — Intuitivamente, una curva plana admite un punto asintótico O si la curva se enrolla alrededor de O, acercándose cada vez más a O sin alcanzarlo nunca. Sea O el polo del sistema de referencia. La curva Γ admite O como punto asintótico si $f(\theta)$ tiende hacia cero cuando $\theta$ tiende hacia el infinito. Las espirales logarítmicas e hiperbólicas admiten un punto asintótico.



## Asociados

• *Elementos asociados en un anillo conmutativo.* — Dos elementos de un anillo conmutativo se denominan asociados si engendran el mismo ideal principal; de este modo, $-6$ y $6$ son asociados en $\mathbf{Z}$; igualmente, $1+i$ y $1-i$ son asociados en $\mathbf{Z}[i]$.

## Asociativa

• *Algebra asociativa.* — Algebra cuya multiplicación es asociativa.

• *Ley asociativa.* — Una ley de composición interna $*$ sobre un conjunto E es asociativa si, cualesquiera que sean los elementos $a$, $b$, $c$ de E, tenemos $a*(b*c)=(a*b)*c$. Se escribe entonces $a*b*c$ sin poner paréntesis. En $\mathbf{R}$ la adición es asociativa, pero la substracción no lo es.

## Asociatividad

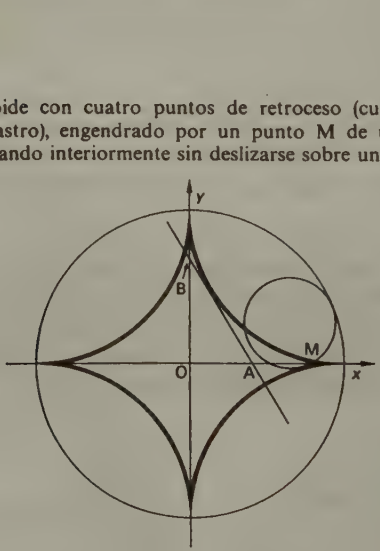
Propiedad de ser asociativo.
V. ASOCIATIVA, ASOCIATIVO.

## Asociativo

• *Magma asociativo.* — Par $(E, *)$, donde E es un conjunto y $*$ una ley de composición interna sobre E asociativa.

## Astroide

Hipocicloide con cuatro puntos de retroceso (cuyo nombre le viene de la palabra astro), engendrado por un punto M de un círculo de radio $a/4$ (o $3a/4$) rodando interiormente sin deslizarse sobre un círculo de radio $a$. Es tam-



bién la envolvente de un segmento AB de longitud constante cuyas extremidades A y B describen respectivamente los ejes de un sistema de referencias ortonormado. Con relación a ese sistema de referencia, la ecuación cartesiana de la astroide puede escribirse:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2} \quad \text{o} \quad (x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27\,a^2x^2y^2 = 0.$$

Es una curva algebraica circular de orden 6. Se parametriza por las ecuaciones $x = a\cos^3 t$ e $y = a\,\text{sen}^3 t$. La longitud del astroide vale $6a$ y su área $3\pi a^2/8$.

## Atlas

• *Atlas de clase* $C^k$ *y de dimensión n sobre* X. — Conjunto de mapas de dimensión *n* sobre X, dos a dos $C^k$-compatibles y cuyos dominios son un recubrimiento de X.
V. MAPA.

• *Atlas de una variedad diferencial.* — V. DIFERENCIAL (Variedad).
V. EQUIVALENTES.

## Atled ($\nabla$)

Delta «invertido» sinónimo de nabla. Representa el gradiente de una función.

## Atomo

• *Atomo de un conjunto ordenado* E *que posee un elemento más pequeño* $\mu$. — Elemento minimal en $E - \{\mu\}$.

## Atornillamiento

• *Atornillamiento de* $R^3$. — Sinónimo de desplazamiento helicoidal. V. HELICOIDAL.

## Atto

V. MÚLTIPLE.

## Auto-adjunta

• *Forma sesquilineal auto-adjunta.* — Sinónimo de forma sesquilineal hermitiana.

## Auto-adjunto

• *Endomorfismo auto-adjunto.* — Un endomorfismo $u$ de un K-espacio vectorial E provisto de una forma sesquilineal hermitiana (o de una forma bilineal asimétrica) se llama auto-adjunto si admite un adjunto $u^*$ y si $u = u^*$.

## Autómata

En el lenguaje corriente, un autómata es una máquina mecánica que imita los movimientos de un ser vivo. En matemáticas, se designa por autómata la formalización de un proceso que permite desembocar en un número de pasos finito o no en un estado final a partir de un estado inicial dado. En este sentido, la máquina de Turing es un autómata. En teoría de los lenguajes, un autómata de reconocimiento de un lenguaje $L \subset X^*$ es un autómata que, a partir de una palabra $f \in X^*$, efectúa sobre esa palabra cierto cálculo que concluye con la respuesta «sí», si y solamente si la palabra $f$ pertenece a L. La complejidad de estos autómatas está vinculada al tipo de gramática que engendra el lenguaje. El más simple es el autómata finito (o autómata de estados finitos).

V. CHOMSKY, FINITO (Autómata), FORMAL (Gramática), KLEENE.

## Autómatas

• *Teoría de los autómatas.* — Debida a von Neumann, la teoría de los autómatas trata de dar una formulación matemática a un principio según el cual las máquinas pueden autorreproducirse. Ha dado nacimiento a juegos evolutivos.

V. EVOLUTIVOS.

## Automomento

• *Automomento de un torsor cuyos elementos de reducción en un punto* O *son* $\vec{R}$ *y* $\overrightarrow{OK}$. — Producto escalar $\vec{R} \cdot \overrightarrow{OK}$. Se muestra que el automomento es independiente del punto O escogido para definirlo.

## Automorfismo

Endomorfismo biyectivo. Se habla de automorfismo de grupos, de cuerpos, de módulos, etc. Por ejemplo, en el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ las homotecias de razón $k \neq 0$ son automorfismo.

V. AFÍN, DIRECTO, FROBENIUS, INTERIOR, INVERSO, NEGATIVO, ORTOGONAL, POSITIVO, RETRÓGRADO, SIMPLÉCTICO, UNITARIO.

• *Automorfismo de una forma sesquilineal (o de una forma bilineal) no degenerada* $\varphi$ *sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Automorfismo $u$ de E tal que $\varphi(u(x), u(y)) = \varphi(x, y)$, cualesquiera que sean $x$ e $y$ en E.

## Auxiliar

Se dice de todo dato o de todo cálculo introducido en el curso de resolución de un problema a fin de facilitar su estudio.

## Ax

• *Teorema de Ax y Kochen.* — Para todo entero $d > 0$, hay un conjunto finito $E(d)$ de números primos tales que si $p$ es un número primo no en $E(d)$, todo polinomio $f \in \mathbf{Q}_p[x_1, ..., x_n]$ homogéneo de grado $d$ con $n > d^2$ posee un cero no trivial (*i.e.* distinto a $(0, 0, ..., 0)$) en $\mathbf{Q}_p^n$.

## Axial

• *Simetría axial.* — Simetría ortogonal por relación a una recta.

## Axioma

Para los matemáticos griegos y para muchos matemáticos hasta el siglo XVIII, un axioma era una proposición evidente para todos, de suerte que se admitía y no exigía ninguna demostración. En la actualidad, se considera que la base de una teoría matemática está constituida por nociones primeras (términos primitivos, por ejemplo, $\in$, $\subset$) y de axiomas que son relaciones entre las nociones primeras, es decir, proposiciones que se admiten como «verdaderas» (V. TEORÍA) y que se escogen arbitrariamente a condición de que no sean contradictorias. (V. POSTULADO.)
En lógica, un axioma es, por definición, un enunciado verdadero.
V. ARQUÍMEDES, DEDEKIND, ELECCIÓN, ENCAJADOS (Segmentos), INFINITO, PASCH, TALES, VACÍO, ZERMELO, ZORN.

• *Axioma de aditividad completa.* — V. KOLMOGOROV (Axiomas de).

• *Axioma de Borel-Lebesgue.* — V. BOREL.

• *Axioma de continuidad.* — V. KOLMOGOROV (Axiomas de ).

• *Axioma de Fréchet.* — Axioma de separación $[T_1]$.
V. ACCESIBLE (Espacio).

• *Axioma de Hausdorff.* — Axioma de separación $[T_2]$.
V. HAUSDORFF (Espacio de).

• *Axioma de inducción.* — V. PEANO.

• *Axioma de Kolmogorov.* — Axioma de separación $[T_0]$.
V. KOLMOGOROV (Espacio de).

• *Axioma de los cardinales medibles.* — V. MEDIBLES.

• *Axioma de probabilidades totales.* — V. KOLMOGOROV (Axiomas de).

• *Axioma de separación de un espacio accesible.* — Axioma de separación $T_1$.
V. ACCESIBLE.

• *Axioma de separación de un espacio normal.* — Axioma de separación $[T_4]$.
V. NORMAL.

• *Axioma de separación de un espacio regular.* — Axioma de separación $[T_3]$. V. REGULAR.

• *Axioma de σ-aditividad.* — Axioma de aditividad completa.

## Axiomas

V. INCIDENCIA, KOLMOGOROV, PÉANO.

• *Axiomas de la geometría.* — El primer sistema de axiomas de la geometría fue dado por Euclides: 15 axiomas explicitados (y un gran número no explicitados). Hubo que esperar a Hilbert (1898) para que fuera hallada una construcción rigurosa de la geometría; se apoyaba en 27 axiomas.

• *Axiomas de la teoría de conjuntos.* — Existen varios sistemas. Los dos más conocidos son los axiomas de Zermelo-Fraenkel y los axiomas de von Neumann-Bernays-Gödel.

• *Axiomas* $[T_i]$. — Axiomas de separación (V. SEPARACIÓN).

• *Axiomas de abiertos.* — V. ABIERTOS.

• *Axiomas de cálculo proposicional.* — V. PROPOSICIONAL.

• *Axiomas de cerrados.* — V. CERRADOS.

• *Axiomas de entornos.* — V. ENTORNOS.

• *Axiomas del cálculo de predicados.* — V. PREDICADOS.

## Axiomatización

V. AXIOMATIZAR.

• *Teoría axiomatizada.* — V. AXIOMATIZAR.

## Axiomatizar

Axiomatizar una teoría es encontrar un sistema de axioma de esa teoría (V. TEORÍA) y demostrar, a partir de esos axiomas, las principales proposiciones de la teoría. La axiomatización aporta informaciones sobre la coherencia interna o el rigor de las demostraciones; en raras ocasiones permite obtener nuevos resultados fuera de la lógica.

## Azar

El uso de esta palabra se ha introducido en las Matemáticas por medio de los juegos de su mismo nombre. El término ha de emplearse con suma precaución. V. BERTRAND (Paradoja de.).

• *Números de azar.* — Estas familias de números se obtienen mediante un proceso aleatorio similar al juego de ruleta. Mediante el ordenador pueden obtenerse tablas de números que son casi números al azar: para un observador, su aparición resulta equiprobable. La búsqueda de dichos números, denominados seudo-aleatorios, es una de las aplicaciones del llamado método de Monte Carlo.

# B

## Bachet de Méziriac, C. G. (1581-1638)

• *Teorema de Bachet de Méziriac.* — Ningún triángulo pitagórico tiene un área cuadrada. Este teorema viene a afirmar que el sistema de las dos ecuaciones $x^2 = y^2 + z^2$ e $yz = 2t^2$ no tiene soluciones en **Z**, y por tanto no las tiene en **Q**.

• *Teorema de Bachet de Méziriac o Bézout.* — Nombre que a veces se da al teorema de Bézout caracterizando los elementos extraños de un anillo principal.

## Baderna de Apolonio de Pérgamo

V. APOLONIO DE PÉRGAMO.

## Baire, René Louis (1874-1932)

• *Clases de Baire.* — Baire ha propuesto una clasificación de las funciones de variables reales de la siguiente forma: la clase 0 es el conjunto de las funciones continuas, la clase 1 el conjunto de las funciones límites simples de función continua y para todo entero $n \geqslant 1$, la clase $n$ está formada por funciones límites simples de funciones de la clase $(n - 1)$. Esta definición se prolonga por inducción transfinita. Las funciones de la clase 1 son las funciones discontinuas sobre todo conjunto perfecto (por ejemplo, las derivadas de funciones continuas). La función característica de **Q** en **R** (función de Dirichlet) es de la clase 2.

• *Espacio de Baire.* — Espacio topológico separado en el que la intersección de toda familia numerable de abiertos densos es un abierto denso. Ejemplos: todo espacio métrico completo (por tanto, todo espacio de Banach) y todo espacio localmente compacto.

• *Función de Baire.* — Función de variables reales que pertenecen a una clase de Baire. Lebesgue fue el primero en construir una función que no era una función de Baire.

## Baker, A. (1939- )

• *Teoremas de Baker.* — Generalizan el teorema de Gelfond-Schneider:
1. sean $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n, \alpha_1, ..., \alpha_n$ números reales algebraicos no nulos; el núme-

ro $e^{\beta_0 \alpha_1^{\beta_1} \ldots \alpha_n^{\beta_n}}$ es trascendente; por ejemplo, $e^{\sqrt{2}}$ es un número trascendente;
2. Sea $\alpha \neq 1$ un número real algebraico estrictamente positivo; entonces, $\operatorname{Log} \alpha$ es trascendente; en particular, $\operatorname{Log} 2$ es un número trascendente;
3. sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algebraicos no nulos y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números algebraicos. Si $x = \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n$ no es nulo ($\log \alpha_i$ es una determinación del logaritmo de $\alpha_i$), entonces $x$ es trascendente.
V. GELFOND-SCHNEIDER, MORDELL.

## **Banach,** Stefan (1892-1945)

• *Espacio de Banach.* — Espacio vectorial normado completo. Los espacios euclídeos ($\mathbf{R}^n$, por ejemplo), los espacios de Hilbert, así como numerosos espacios funcionales son espacios de Banach.

• *Teorema de Banach.* — Sean $E_1$ y $E_2$ dos espacios de Banach; el teorema de Banach afirma que si $f$ es una aplicación lineal continua sobreyectiva de $E_1$ sobre $E_2$, la imagen por $f$ de todo abierto de $E_1$ es un abierto de $E_2$. En particular, si $f$ es lineal, continuo y biyectivo, entonces $f^{-1}$ es continuo.

• *Teorema de Banach-Steinhaus.* — Sean E un espacio vectorial topológico de Baire (por ejemplo, un espacio de Banach) y F un espacio vectorial topológico. Si una sucesión $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de aplicaciones lineales continuas de E en F converge simplemente hacia una aplicación $u$, entonces $u$ es lineal continua; además, la sucesión $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformemente hacia $u$ sobre todo compacto de E y el conjunto H de los términos $u_n$ de la sucesión es equicontinuo.

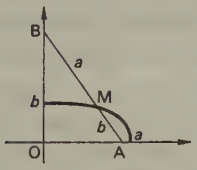
• *Teorema de Hahn-Banach.* — V. HAHN.

• *Teorema o paradoja de Banach-Tarski.* — Dados dos conjuntos acotados cualesquiera B y B′ de $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ conteniendo cada uno por lo menos un punto interior (por ejemplo, dos bolas de radios diferentes), cada uno se puede descomponer en un número finito e igual de las partes disjuntas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$, de tal modo que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_i$ y $A'_i$ se deduzcan uno de otro por un desplazamiento del espacio. Intuitivamente, este teorema afirma que se pueden recortar dos bolas, de radios finitos diferentes en un número finito de trozos de tal forma que se pueda reunir por desplazamiento (sin deformarlos) todos los trozos de una para reconstruir exactamente la otra y recíprocamente. De ahí la calificación de «paradoja» de Banach-Tarski dada a este teorema. De igual forma, disecando convenientemente una bola dada, pueden reunirse sus trozos de forma que se obtengan dos bolas, cada una de las cuales tiene las mismas dimensiones que la primera. Raphaël Robinson ha mostrado que cinco trozos bastan. Este teorema no es válido en $\mathbf{R}$ o $\mathbf{R}^2$. Por ejemplo, para dos polígonos planos arbitrarios, uno de los cuales está contenido en el otro, nunca se puede, por decomposición finita y desplazamientos, recubrir el grande a partir del pequeño. El teorema de Banach-Tarski muestra que hay que utilizar con precaución las nociones fundamentales de volumen. Su demostración utiliza el axioma de la elección.
V. UNIVERSAL (Medida).

## Banda

• *Banda de Möbius.* — V. MÖBIUS.

• *Método de la banda de papel.* — Método práctico que permite trazar una elipse. Sean un sistema de referencias cartesiano ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$ del plano y un segmento móvil AB de longitud constante cuya extremidad A describe el eje de las abscisas y la extremidad B el de las ordenadas. El punto M del segmento AB situado a una distancia $a$ de B y una distancia $b$ de A con $b \leqslant a$ describe una elipse de centro O, de semi-eje mayor $a$ y de semi-eje menor $b$.




## Barbero

• *Paradoja de barbero.* — En la población V, el barbero afeita a todos los hombres de V que no se afeitan por sí mismos ni por ningún otro. ¿Se afeita el barbero? Se puede resolver la paradoja añadiendo el axioma: «El barbero no es un hombre de V».

## Baricéntricas

• *Coordenadas baricéntricas de un punto* M *de un espacio afín* $\mathscr{E}$ *de dimensión* $n$. — Dado $n+1$ puntos $A_0, A_1, ..., A_n$ de $\mathscr{E}$ afínmente independientes, para todo punto M de $\mathscr{E}$ existe una $n$-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de escalares tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ y tal que:

$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}$. Los reales $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son llamados coordenadas baricéntricas de M en el sistema de referencias afín $(A_0, A_1, ..., A_n)$.

## Baricentro

La noción de baricentro, en matemáticas, generaliza la noción de centro de gravedad en mecánica. Dados los puntos $M_1, M_2, M_n$ de un espacio afín $\mathscr{E}$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$, si la suma de los $\alpha_i$ no es nula, existe un único punto G de $\mathscr{E}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

El punto G es denominado el baricentro de los puntos $M_i$ afectados de los coeficientes $\alpha_i$; también se define por:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

El conjunto de los baricentros de $n$ puntos $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$ de $\mathcal{E}$ es la variedad lineal afín de $\mathcal{E}$ engendrada por esos $n$ puntos.
Si $\mathcal{E}$ es el espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$, el baricentro de dos puntos A y B afectados de los mismos coeficientes es el punto medio del segmento AB. El baricentro de tres puntos A, B, C afectados de los mismos coeficientes es el centro de gravedad del triángulo ABC.
V. ISOBARICENTRO.

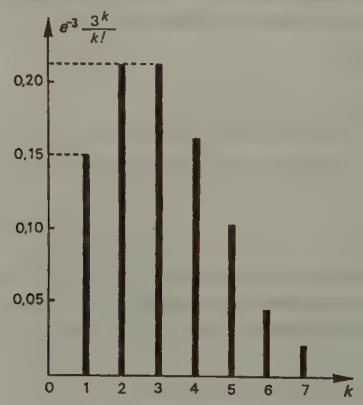
## Barra

• *Barra de Sheffer.* — V. SHEFFER.

## Barras (diagrama de bastones)

• *Barras de Néper.* — V. NÉPER.

• *Diagrama en barras.* — Procedimiento de dibujo utilizado en estadística y en probabilidad para representar ciertas funciones numéricas definidas sobre un conjunto finito o numerable. Se representa, por ejemplo, con la ayuda de tales diagramas, la ley de probabilidad de una variable aleatoria discreta X: a cada valor $k$ tomado por X se asocia un segmento (barra) cuya longitud es proporcional a $P(X = k)$. Se representan igualmente mediante tales diagramas los valores tomados por un carácter cuantitativo discreto.



Ley de Poisson

**Base**

• *Base de abiertos de un espacio topológico* E. — Familia $\mathscr{B}$ de abiertos tal que todo abierto de E sea reunión de elementos de $\mathscr{B}$. El conjunto de las bolas abiertas de un espacio métrico E es una base de abiertos de E.

• *Base de desarrollo de un número.* — V. DESARROLLO.

• *Base de entornos.* — Sinónimo de sistema fundamental de entornos.

• *Base de Hamel.* — V. HAMEL.

• *Base de logaritmo.* — V. LOGARITMO.

• *Base de numeración.* — V. POSICIÓN.

• *Base en el movimiento de un plano sobre un plano.* — V. RODANTE.

• *Base hilbertiana.* — V. HILBERTIANA.

• *Base de un* A*-módulo* E. — Familia B de vectores de E, tal que todo vector de E se escribe, de forma única, como combinación lineal finita de vectores de B. Un módulo no admite necesariamente base.

• *Base de un haz lineal engendrado por dos curvas algebraicas (o dos superficies algebraicas).* — Nombre dado a las dos curvas (o a las dos superficies) consideradas.

• *Base de un filtro* $\mathscr{F}$. — Parte $\mathscr{B}$ de $\mathscr{F}$ tal que todo elemento de $\mathscr{F}$ contiene un elemento de $\mathscr{B}$. El conjunto de las secciones finales no vacías de N es una base del filtro de Fréchet. Las bases del filtro de los entornos de un punto $x$ de un espacio topológico son los sistemas fundamentales de entornos de $x$.

• *Base de un grupo conmutativo* G. — Base, si existe, del Z-módulo G.

• *Base de un* K*-espacio vectorial* E. — Base del K-módulo E. Una familia B de vectores de E es una base si y solamente si B es una familia libre maximal o también si y solamente si B es una familia generatriz minimal.
V. CANÓNICO, DIMENSIÓN, DIRECTA, DUAL, ORTOGONAL, ORTONORMADA, ORTONORMAL, RETRÓGRADA.

• *Base de un matroide.* — Independiente del matroide que es maximal para la relación de inclusión.
V. RANGO.

• *Base de una figura geométrica.* — Ciertos elementos de ciertas figuras geométricas son usualmente denominados bases. Por ejemplo, se llama base de un cono o de un cilindro una directriz plana de ese cono o de ese cilindro.
V. CONO (Tronco de), PIRÁMIDE, PRISMA, TRAPECIO.

• *Puntos de base de un haz de círculos.* — V. HAZ (de círculos).

## **Bayes,** Thomas (1702-1761)

• *Fórmula de Bayes.* — Sea $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ una familia de sucesos de probabilida-

des no nulas y que constituyen una partición del suceso seguro; si A es un suceso de probabilidad no nulo, la fórmula de Bayes (o fórmula de probabilidad de las causas) afirma que:

$$P_A(B_j) = \frac{P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A)}$$

donde $P_X(Y)$ designa la probabilidad condicional de Y relativa a X.

## Bebé

• *Bebé monstruo de Fischer.* — V. FISCHER.

## Bei

• *Función Bei.* — V. KELVIN.

## Bell, Eric Temple (1883-1960)

• *Número de Bell.* — Número $B_n$ de particiones de un conjunto finito E de cardinal *n*. Es igual a una suma de números de Stirling de segunda especie: $B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_n^k$. Es un límite de la serie convergente:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{p \geq 0} \frac{p^n}{p!}$$

## Beltrami, Eugenio (1835-1900)

• *Modelo de Beltrami de la geometría de Lobatchewski.* — Los puntos son los de un disco plano abierto y las rectas son las cuerdas. Dos rectas se llaman paralelas si se cortan sobre la circunferencia que limita el disco.

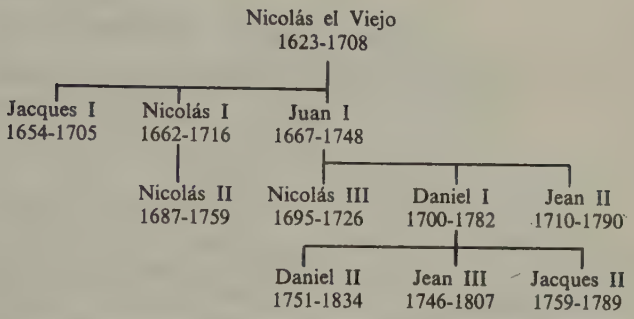
## Ber

• *Función Ber.* — V. KELVIN.

**Bernays,** Paul Isaak (1888-1972)

V. CONJUNTO.

**Bernoulli**

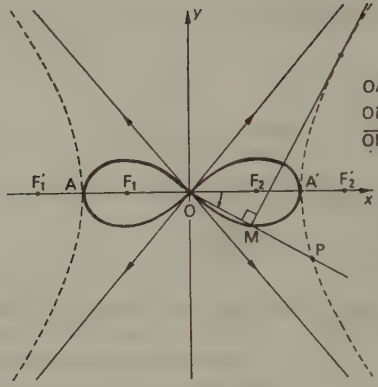


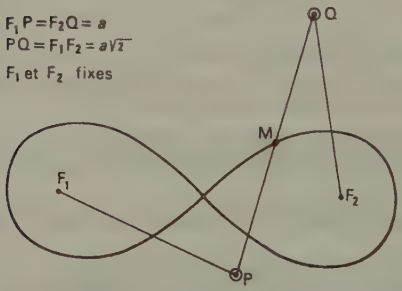

• *Ecuación diferencial de Bernoulli (Jacques I).* — Ecuación de primer orden de la forma $a(t)y^m + b(t)y + y' = 0$ con $m \neq 1$. Su resolución se reduce a la de una ecuación diferencial lineal, haciendo $z = y^{1-m}$.

• *Desigualdad de Bernoulli (Jacques I).* — Si dos números reales $x$ y $a$ son tales que $x > -1$ y $a > 1$, verifican la desigualdad $(1 + x)^a > 1 + ax$ llamada de Bernoulli.

• *Espiral de Bernoulli (Jacques I).* — Sinónimo de Espiral logarítmica y de Espiral equiángula.
Aunque descubierta por Descartes, fue estudiadísima por Jacques Bernoulli I. Mostró que es igual a su envolvente y a otras numerosas curvas derivadas o conjugadas. Pidió que se grabara sobre su tumba (en la catedral de Basilea) una espiral logarítmica encima de la inscripción: «eadem mutata resurgo», «Cambiada en mí misma resurjo». «Esta espiral maravillosa, escribe, me gusta de modo tan sorprendente por sus propiedades singulares y admirables que apenas puedo saciarme de su contemplación.» Figura sobre el traje del Père Ubú y sobre la corbata del Colegio de Patafísica.

• *Lemniscata de Bernoulli (Jean I).* — Lemniscata de dos focos $F_1$ y $F_2$ cuya ecuación bipolar por relación a $F_1$ y $F_2$ es $rr' = k^2$, donde $2k$ es la distancia de $F_1$ a $F_2$. La podaria de una hipérbola equilátera de vértices A y A' con relación a su centro O y la inversa de esa hipérbola en la inversión de centro O que deja A y A' invariantes son una misma lemniscata de Bernoulli tangente a la hipérbola en A y A' y cuyos focos $F_1$ y $F_2$ son los inversos de los focos $F'_1$ y $F'_2$ de la hipérbola. Si la ecuación cartesiana de la hipérbola es $x^2 - y^2 = a^2$, la de la lemniscata es $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ y su ecuación polar es $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ en el sistema de referencias (O, Ox). Si dos puntos P y Q describen dos círculos de radios $a$ y de centros $F_1$, $F_2$ tales que $F_1F_2 = a\sqrt{2}$ y si la distancia PQ es constante e igual a $a\sqrt{2}$, el punto medio M de PQ describe una lemniscata de Bernoulli de focos $F_1$ y $F_2$.
V. CASSINI, SINUSOIDAL (Espiral).




• *Números de Bernoulli (Jacques I).* — Números racionales $B_n (n \in \mathbf{N}^*)$ definidos como coeficientes del desarrollo en serie entera:

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^n \quad \text{para} \quad 0 < |t| < 2\pi.$$

Se tiene $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$; para todo $k \in \mathbf{N}^*$, $B_{2k+1} = 0$ y $B^2{}_k$ se explica en ayuda de la función $\zeta$ de Riemann:

$$B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \quad \text{(Teorema de Euler).}$$

Los primeros valores de $B_{2k}$ son:

| $2k$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_{2k}$ | 1 | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ | $-\frac{691}{2730}$ | $\frac{7}{6}$ | $-\frac{3617}{510}$ | $\frac{43867}{798}$ |

Para todo $k \in \mathbf{N}^*$, $B_{2k}$ tiene el signo $(-1)^{k-1}$ y para todo $k \geq 4$ resultaría $|B_{2k}| > |B_{2k-2}|$. Cuando $k$ tiende al infinito $|B_{2k}|$ es equivalente a

$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}$ y en consecuencia $4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}$ según la fórmula de Stirling.

Además, para todo $N \geqslant 1$: $\lim_{k \to +\infty} \frac{|B_{2k}|}{(2k)^N} = +\infty$.

Una fórmula de Euler afirma que $1 - \frac{t}{2} \operatorname{cotg} \frac{t}{2} = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} B_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

Permiten por último expresar la suma de las potencias de $k$ de los $n$ primeros enteros naturales:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}.$$

Para algunos, los números de Bernoulli son los números $b_n = |B_{2n}|$.

V. BERNOULLI (Polinomios de), EULER-MAC LAURIN (Fórmula de), GENOCCHI, IRREGULAR, KUMMER (Criterio de), RIEMANN (Función de), STAUDT (Teorema de von).

• *Polinomios de Bernoulli (Daniel I)*. — Polinomios $B_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) definidos por el desarrollo en serie entera:

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Se expresan con ayuda de los números de Bernoulli:

$$B_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i X^{n-i}.$$

Verifican las relaciones

$$B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}; \quad B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X);$$
$$B'_n(X) = nB_{n-1}(X).$$

Entre los resultados más recientes, se concluye: $B_{2k+1}(X)$ no tiene sino raíces simples y no admite sino 1,0 y 1/2 como raíces racionales y éstas son sus únicas raíces posibles en $[\![0,1]\!]$.

$B_{2k}(X)$ no tiene raíces racionales y tiene exactamente dos raíces en $[\![0, 1]\!]$.

$B_{2^n}(X)$ y $B_{14}(X)$ son irreductibles a $\mathbb{Q}[X]$. No se sabe prácticamente nada de los factores irreductibles de los $B_k(X)$ en general.

• *Variable de Bernoulli (Jacques I) sobre* $\{a, b\}$. — Función característica de un singleton de este conjunto.

• *Variable aleatoria de Bernoulli*. — Variable aleatoria X que no toma más que los dos valores 0 y 1 de suerte que si $p = P(X = 0)$ y $q = P(X = 1)$ tenemos: $p + q = 1$.

• *Teorema de Bernoulli (Jacques I)*. — Caso particular de la ley de los grandes números. Sea un suceso A de probabilidad $p$ cuya realización es el resultado aleatorio de una prueba y sea $f_n$ la frecuencia de realización de A tras $n$

repeticiones de la prueba en las mismas condiciones. El teorema de Bernoulli afirma que para todo real $\varepsilon > 0$ la probabilidad de tener $|f_n - p| \geqslant \varepsilon$ tiende hacia cero cuando $n$ tiende hacia el infinito. En otros términos, para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} [P(|f_n - p|) \geqslant \varepsilon] = 0$$

o, de forma equivalente: $\lim_{n \to +\infty} [P(|f_n - p|) < \varepsilon] = 1$.

Intuitivamente, cuando el número de pruebas aumenta, la probabilidad para que la frecuencia difiera mucho de la probabilidad del suceso A es cada vez más escasa.

V. GRANDES NÚMEROS (ley de los).

## Bernstein, Sergei Natanovic (1880-1968)

• *Fórmula de Bernstein.* — Para todo ordinal $\alpha$ y todo entero $n \in \mathbf{N}^*$ tenemos: $_n{}^{\alpha} = 2^{\alpha \cdot}{}_n$. Esta fórmula se deduce de la fórmula de Hausdorff.

• *Polinomios de Bernstein.* — Sea $f$ una función definida sobre $\mathbf{I} = [\![0, 1]\!]$. Para $n \in \mathbf{N}^*$, el polinomio de grado $n$ definido por:

$$B_n(f)(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) (1 - X)^{n-i} X^i$$

es denominado $n$-ésimo polinomio de Bernstein asociado a $f$. Si $f$ es continua en $\mathbf{I}$, la sucesión $(B_n(f))_{n \geqslant 0}$ converge uniformemente hacia $f$ en $\mathbf{I}$.

• *Teorema de Bernstein, de Schröder o de Cantor-Bernstein.* — Dados dos conjuntos E y F, si existe una inyección de E en F y una inyección de F en E, estos dos conjuntos son equipotentes. Este resultado, evidente para los conjuntos finitos, es delicado de demostrar en el caso general; conjeturado por Cantor, fue demostrado por Bernstein.

## Bertrand, Joseph Louis François (1822-1900)

• *Paradoja de Bertrand.* — Dado un círculo de radio R, tomemos una cuerda al azar. ¿Cuál es la probabilidad para que esa cuerda sea más larga que el lado del triángulo equilateral inscrito? ¡Existen tres soluciones!

*Primer razonamiento:* La longitud de una cuerda está determinada por la posición de su punto medio M en el interior del círculo. Si se admite que la distribución del punto M es uniforme en el círculo, la probabilidad buscada es igual a 1/4.

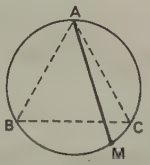
*Segundo razonamiento:* La longitud de una cuerda está determinada por la distancia $h$ de su punto medio al centro del círculo. Puede considerarse que el punto medio M está tomado sobre un radio dado y suponer que la distribución de M sobre ese radio es uniforme. En este caso la probabilidad buscada es 1/2.

*Tercer razonamiento:* Podemos suponer que se ha fijado uno de los extremos A de la cuerda, y que se ha escogido el otro M al azar sobre la circunferencia.

Si se supone que la distribución de los puntos sobre la circunferencia es uniforme, la probabilidad buscada es igual a 1/3.

*1.er razonamiento*

*2.° razonamiento*




*3.er razonamiento*

La coexistencia de estas tres respuestas es evidentemente paradójica. Ello se debe al hecho de que en cada caso el medio de escoger al azar una cuerda conduce a tres probabilidades diferentes sobre un mismo espacio probabilizable.

• *Postulado o conjetura de Bertrand.* — Sea $\pi(x)$ el número de enteros primos inferiores o iguales a $x$; tenemos $\pi(2x) - \pi(x) > 0$ para todo $x > 1$; o también, existe un entero primo comprendido entre $n$ y $2n$ para todo $n \geqslant 1$. Esta proposición, admitida por Bertrand después de verificarla para todo $x < 3\,000\,000$, fue demostrada en 1851 por Tchebychev.
V. BREUSCH, INGHAM.

## **Bessel,** Friedrich Wilhelm (1784-1846)

• *Desigualdad de Bessel.* — Afirma que si $(e_i)_{i \in I}$ es una familia ortonormal de un espacio prehilbertiano E, para todo vector $x \in E$, la familia $(|(x|e_i)|)_{i \in I}$ es sumable y $\sum_{i \in I} |(x|e_i)|^2 \leqslant \|x\|^2$.

• *Ecuación de Bessel.* — Ecuación diferencial $y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0$, donde $\lambda \in \mathbf{C}$.

• *Funciones de Bessel.* — Funciones complejas de variables complejas que juegan un papel importante tanto en matemáticas aplicadas como en física. Dado $\lambda \in \mathbf{C}$, la función de Bessel $J_\lambda$ puede ser definida por su desarrollo en serie entera:

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-z^2)^n}{2^{2n} n! \Gamma(n + \lambda + 1)}.$$

Estas funciones verifican la relación:

$$J'_\lambda(z) = \frac{\lambda}{z} J_\lambda(z) - J_{\lambda+1}(z)$$

y son soluciones particulares de la ecuación diferencial de Bessel (V. HANKEL, (Funciones de), NEUMANN (Funciones de)). Pueden escribirse también:

$$J_\lambda(z) = \frac{(z/2)^\lambda}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} \, e^{-itx} \, dt \quad \text{si} \quad \mathrm{Re}(\lambda) + \frac{1}{2} > 0.$$

• *Función de Bessel del índice entero.* — Cuando $\lambda = n$ es un entero tenemos:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-z^2)^k}{2^{2k} k!(k+n+1)!} \quad \text{para } n \geqslant 0.$$

Estas funciones verifican la fórmula de recurrencia:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z).$$

$J_n(z)$ es igualmente el $n$-ésimo coeficiente de Fourier de la función $t \mapsto e^{iz \operatorname{sen} t}$, es decir, que $e^{iz \operatorname{sen} t} = \sum_{n \in Z} J_n(z) e^{int}$, o también que $e^{\frac{z}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)} = \sum_{n \in Z} J_n(z) u^n$. V. GENERATRIZ (Función). $J_n(z)$ puede igualmente ser definida por integrales:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz \operatorname{sen} t} e^{-int}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - z \operatorname{sen} t)\, dt.$$

V. NEUMANN (Teorema de), SCHLÖMILCH (Fórmula de), ESPECIALES.

## Beta

• *Función beta.* — Función euleriana de segunda especie.
V. EULERIANA.

• *Ley beta de órdenes* $a \in \mathbf{R}_+^*$ *y* $b \in \mathbf{R}_+^*$. — Ley de una variable aleatoria absolutamente continua X definida sobre $[\![0, 1]\!]$ cuya función de distribución es:

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt$$

donde B es la función beta. Tenèmos:

$$E[X] = a/(a+b) \text{ y } V[X] = ab/[(a+b)^2(a+b+1)].$$

## Betti, Enrico (1823-1892)

• *Números de Betti.* — Invariantes numéricos asociados, por ejemplo a ciertos espacios topológicos (Poincaré), a ciertas variedades, a los grafos, etc.
V. EULER (Característica de Euler-Poincaré).

• *Números de Betti de un complejo de cadenas.* — Sea:

$$M: \ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \to \ldots$$

un complejo de cadenas donde los $M_n$ son unos Z-módulos. El $n$-ésimo número de Betti [resp. el $n$-ésimo número de Betti módulo $p$], $b_n(M)$ es la dimensión del Q-espacio vectorial $H_n(M \otimes_Z Q$ [resp. del $F_p$-espacio vectorial

$H_n(M \otimes_Z F_p)]$, donde $M \otimes_Z Q$ [resp. $M \otimes_Z F_p$] designa el complejo de cadena:

$$M \otimes_Z Q: \ldots \to M_{n+1} \otimes_Z Q \to M_n \otimes_Z Q \to M_{n-1} \otimes_Z Q \to \ldots$$

$$[\text{resp. } M \otimes_Z F_p: \ldots \to M_{n+1} \otimes_Z F_p \to M_n \otimes_Z F_p \to M_{n-1} \otimes_Z F_p \to \ldots$$

• *Números de Betti de un grafo conexo* G. — Sea G' un árbol maximal de G. Los números de Betti $b_i(G)$ son definidos por $b_0(G) = 1$; $b_1(G) = a(G) - a(G')$ y $b_i(G) = 0$ para $i \geqslant 2$, donde $a(G)$ [resp. $a'(G')$] designa el número de aristas de G [resp. de G'].

## Bézout, Etienne (1730-1783)

• *Identidad o relación de Bézout.* — V. BÉZOUT (Teorema de).

• *Teorema de Bézout.* — Dadas dos curvas algebraicas planas de $C^2$, de grados $m$ y $n$, el número de puntos de intersección de esas curvas es $mn$ (hablando en rigor debe intervenir la multiplicidad de cada punto de intersección).

• *Teorema de Bézout.* — \Dos elementos $a$ y $b$ de un anillo principal son extraños si y solamente si $aA + bA = A$, es decir, si existe $u$ y $v$ en A tales que $1 = au + bv$. Semejante igualdad se denomina una identidad (o una relación) de Bézout entre $a$ y $b$.
V. BACHET.

## Bicondicional

Nombre dado a veces a la equivalencia lógica (V. EQUIVALENCIA).

## Bicontinua

• *Biyección bicontinua.* — Homeomorfismo.

## Bicromático

• *Grafo bicromático.* — Grafo cuyo número cromático es 2. Un grafo es bicromático si y sólo si es bipartido.

## Bicuadrada

• *Ecuación bicuadrada.* — Ecuación de coeficientes en C de la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

con $a \neq 0$. Se resuelve buscando las soluciones $t_1$ y $t_2$ de la ecuación $at^2 + bt + c = 0$, luego las soluciones de las dos ecuaciones $x^2 = t_1$ y $x^2 = t_2$.

## Bicuaternios

Elementos de un sistema hipercomplejo sobre $C^2$, isomorfo a $M_2(C)$. V. HIPERCOMPLEJO (Sistema).

## Bidual

• *Bidual de un espacio vectorial* E. — Espacio vectorial dual del dual $E^*$ de E. Se lo nota $E^{**}$. Cuando E es de dimensión finita, E y $E^{**}$ son canónicamente isomorfos.

## Bien

• *Conjunto bien ordenado.* — Conjunto provisto de un buen orden. V. ZERMELO.

• *Estimador bien centrado.* — V. CENTRADO.

## Bienaymé, Irénée Jules (1796-1878)

• *Desigualdad de Bienaymé-Tchebychev.* — Dada una variable aleatoria X de esperanza matemática E[X], la desigualdad de Bienaymé-Tchebychev da una mayorante de la probabilidad para que $|X - E[X]|$ sea superior a un número estrictamente positivo dado. Si $\sigma$ es la desviación típica de X:

$$P(|X - E[X]| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Esta desigualdad generaliza el teorema de Jacques Bernoulli y conduce a la ley de los grandes números para variables aleatorias.

## Bilátero

Utilizado en un caso no conmutativo como sinónimo de «a derecha y a izquierda». Por ejemplo, un ideal bilátero de un anillo no conmutativo es un ideal a derecha y a izquierda.

## Bilatino (cuadrado)

Sinónimo de Greco-Latino (cuadrado).

## Bilineal

• *Aplicación y forma bilineal.* — Sean E, F y G tres K-espacios vectoriales. Una aplicación $\varphi: E \times F \to G$ se llama bilineal si, para todo $(x, y) \in E \times F$, las aplicaciones $\varphi_y: E \to G$ y $\varphi_x: F \to G$ definidas por $\varphi_y(t) = \varphi(t, y)$ y $\varphi_x(u) =$

$= \varphi(x, u)$ son lineales, es decir, si $\varphi$ es lineal con relación a cada variable. Cuando G = K, se dice que $\varphi$ es una forma bilineal. Un producto escalar es una forma bilineal que verifica condiciones suplementarias.
V. ADJUNTA, DEGENERADA, DISCRIMINANTE, ESCALAR (Producto), SIMÉTRICO.

- *Aplicaciones lineales asociadas a una forma bilineal.* — V. LINEALES.
- *Automorfismo de una forma bilineal.* — V. AUTOMORFISMO.
- *Matriz asociada a una forma bilineal.* — V. MATRIZ.

## Bilinearidad

- *Bilinearidad de una aplicación.* — Propiedad de la aplicación de ser bilineal.

## Billón

V. DECIMAL (Sistema).

## Bimodal

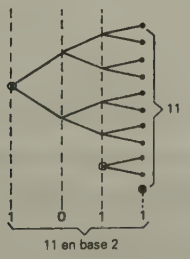
- *Distribución bimodal.* — Distribución que admite dos modas.

## Bimorfismo

Morfismo que es a la vez un epimorfismo y un monomorfismo. Los isomorfismos son bimorfismos particulares.

## Binario

- *Numeración binaria.* — Numeración que utiliza el sistema binario.
- *Relación binaria en un conjunto* E. — Relación de E en E.
V. ANTIRREFLEXIVA, ANTISIMÉTRICA, ASIMÉTRICA, DOMINANCIA, EQUIVALENCIA, ORDEN, PREORDEN, REFLEXIVA, SEMEJANZA, SIMÉTRICA, TRANSITIVA.
- *Sistema binario.* — Sistema de numeración de posición de base dos. Si 0 y



1 son los dos signos utilizados, los números naturales se escriben sucesivamente 0, 1, 10, 11, 100, 110, etcétera. Por ejemplo, once se escribe 1011 en numeración binaria. Este sistema juega un papel importante en informática.

## Binet, Jacques P. M. (1786-1856)

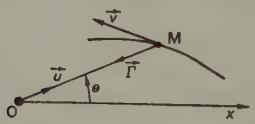
• *Fórmula de Binet.* — Da el $n$-ésimo término $u_n$ de la sucesión de Fibonacci:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

• *Fórmulas de Binet.* — Sean M un móvil puntual animado de un movimiento de aceleración central $\vec{\Gamma}$ de centro O y $(\rho, \theta)$ las coordenadas polares de M en un sistema de referencia $(O, \overrightarrow{Ox})$. La velocidad $v$ y el vector de aceleración $\vec{\Gamma}$ de M verifican las fórmulas siguientes llamadas fórmulas de Binet:

$$v^2 = C^2\left[h^2 + \left(\frac{dh}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$\vec{\Gamma} = -C^2h^2\left[\frac{d^2h}{d\theta^2} + h\right]\vec{u}$$




siendo $h$ igual a $1/\rho$, y $\vec{u}$ el vector unitario tal que $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$ y siendo C una constante igual al doble de la velocidad areolar (constante) de M.

## Binomial

• *Coeficiente binomial.* — Coeficiente del binomio de Newton.
Los coeficientes binomiales son denotados por $\binom{n}{p}$ o $C_n^p$ ($n \in \mathbf{N}$ y $0 \leqslant p \leqslant n$). Tenemos:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-p+1)}{p!}.$$

V. Combinación, Newton.

• *Ley binomial.* — Sean $n$ variables de Bernoulli $(X_i)_{i=1, 2, \ldots, n}$, de igual ley y mutuamente independientes, $p$ la probabilidad para que $X_i$ tome el valor 1 y $q = 1 - p$ la probabilidad para que tome el valor 0. La variable aleatoria discreta $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ cuyo conjunto de valores tomados es $\{0, 1, \ldots, n\}$ obedece a una ley llamada binomial. Su función de distribución es definida por:

$$P(S = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Los números reales $p$ y $n$ son llamados parámetros de la ley. Por ejemplo, a cara o cruz, da la probabilidad de $k$ sucesos en una partida de $n$ tiradas

$$p = q = \frac{1}{2}. \text{ Tenemos } E(S) = np \quad \text{y} \quad V[S] = npq.$$

• *Ley binomial negativa.* — V. NEGATIVA.

## Binomio

Suma de dos monomios.

• *Binomio de Newton.* — V. NEWTON.

• *Coeficiente del binomio.* — Coeficiente binomial.

• *Ecuación del binomio.* — Ecuación de la forma $x^n - a = 0$, donde $a$ es un número complejo.

• *Serie del binomio.* — Serie entera $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ (\alpha - 2)\ \ldots\ (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$, donde $\alpha$ y $x$ son números reales. Si $|x| < 1$, esta serie converge y:

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{\alpha(\alpha - 1)\ (\alpha - 2)\ \ldots\ (\alpha - n + 1)}{n!} x^n = (1 + x)^\alpha$$

de donde su nombre de serie del binomio.

## Binormal

• *Binormal en un punto* M *de un arco geométrico de* $\mathbf{R}^3$ *de clase* $C^k$ $(k \geqslant 2)$ *sin puntos estacionarios.* — Recta perpendicular en M al plano osculador. Admite por vector director el vector $\vec{b}$ de la base del triedro de Frenet.

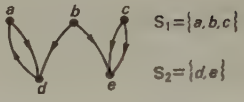
• *Vector binormal.* — Expresión utilizada a veces para designar un vector director de la binormal en un punto de un arco geométrico.

## Biometría

Rama de la biología que se desarrolla esencialmente por la utilización de las estadísticas. Es la ciencia de las variaciones biológicas a las que aplica los métodos estadísticos y probabilísticos, ejemplo: el estudio estadístico de la tasa de colesterol, de las causas de muerte de una población o de la talla de los conscriptos, etc. Juega un papel fundamental en genética.

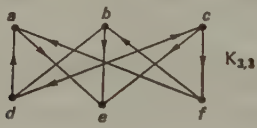
## Bipartido

• *Grupo bipartido.* — Grafo que admite una partición del conjunto S de sus vértices en dos clases $S_1$ y $S_2$ tales que todo arco del grafo tenga uno de sus extremos en $S_1$ y el otro en $S_2$. Si U es el conjunto de sus arcos, es denotado por $(S_1, S_2, U)$.




## Bipartido-completo

• *Grafo bipartido-completo.* — Grafo bipartido ($S_1$, $S_2$, U) tal que, para todo vértice $x_1$ de $S_1$ y todo vértice $x_2$ de $S_2$ existe un arco de extremos $x_1$ y $x_2$. Un grafo simple bipartido completo se denota $K_{p,q}$ donde $p = \text{Card } S_1$ y $q = \text{Card } S_2$. El grafo asociado al problema de los tres pozos y de las tres casas es un grafo bipartido-completo.




## Biperiódica

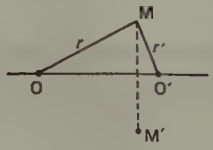
• *Función biperiódica.* — Función doblemente periódica.
V. PERIÓDICA.

## Bipolar

• *Ecuación bipolar de una curva plana.* — Ciertas curvas planas (por ejemplo, la elipse, la hipérbola, los óvalos de Cassini y Descartes) pueden ser definidas como el conjunto de puntos M cuyas coordenadas bipolares por relación a dos puntos O y O′ verifican una relación denominada ecuación bipolar de la curva. La ecuación bipolar de la elipse con relación a sus focos es $r + r' = 2a$.

## Bipolares

• *Coordenadas bipolares de un punto* M *del plano con relación a dos puntos distintos* O *y* O′. — Par $(r, r')$ donde $r$ es la distancia de M a O y $r'$ la de M a O′. El punto M′, simétrico de M por relación a la recta (OO′), tiene las mismas coordenadas bipolares que M.



## Bipunto

• *Bipunto de origen* A *y de extremo* B. — Par de puntos (A, B) de un espacio afín.
V. EQUIPOLENCIA, MOMENTO.

## Birracional

• *Biyección birracional.* — Biyección $f$ tal que $f$ y $f^{-1}$ sean racionales.

## Birracionalmente

• *Variedades algebraicas birracionalmente equivalentes.* — V. EQUIVALENTES.

## Birrelación

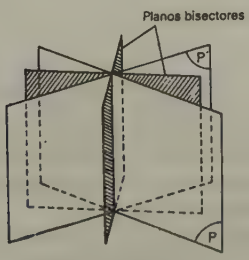
• *Birrelación de cuatro puntos de una recta* D. — Birrelación de sus abscisas en relación con un eje fijo en D. Es independiente de las referencias escogidas sobre D e igual a la birrelación de las proyecciones de los cuatro puntos sobre otra recta.

• *Birrelación de cuatro rectas concurrentes del plano.* — Birrelación de sus cuatro puntos de intersección con otra recta $\Delta$; si existe, es independiente de la recta $\Delta$.

• *Birrelación (o razón anarmónica) de cuatro números reales o complejos a, b, c, d tomados dos a dos y distintos.* — El número $\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}$, que se nota $[a, b, c, d]$.

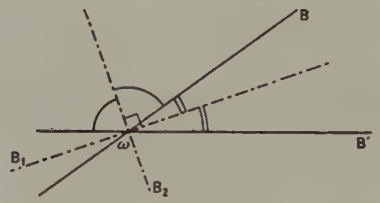
## Bisectores

• *Planos bisectores de dos planos* P *y* P'. — Lugar geométrico de los puntos equidistantes de esos dos planos. Está formado por dos planos perpendiculares.



## Bisectrices

• *Bisectrices de dos rectas concurrentes distintas* B *y* B′. — Lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de esas dos rectas. Está formado por dos rectas perpendiculares $B_1$ y $B_2$ que son los ejes de simetría de las rectas B y B′. Los ángulos de las rectas $(\widehat{B, B_1})$ y $(\widehat{B_1, B'})$ son iguales. Del mismo modo, $(\widehat{B, B_2})$ y $(\widehat{B_2, B'})$ son iguales. Esto se expresa diciendo que $B_1$ y $B_2$ son las rectas que «dividen» el ángulo $(\widehat{B, B'})$ en dos ángulos iguales.




• *Bisectriz de un ángulo de rectas.* — Por abuso de lenguaje, se llama así a las bisectrices de las rectas que definen ese ángulo.

• *Bisectriz en un vértice* A *de un triángulo* ABC. — Bisectrices de las rectas (AB) y (AC).

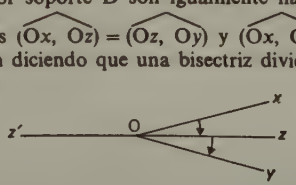
V. Exterior, Interior.

## Bisectriz

• *Bisectriz de un ángulo de semi-rectas* $(\widehat{Ox, Oy})$. — Bisectriz de la pareja de semi-rectas $(\widehat{Ox, Oy})$.

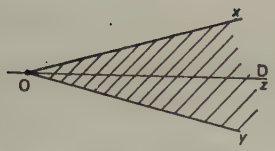
• *Bisectriz de un par de semi-rectas* (Ox, Oy). — Eje D de la simetría ortogonal que transforma Ox en Oy. Las dos semi-rectas Oz y Oz′ de origen O que tienen por soporte D son igualmente llamadas bisectrices del par (Ox, Oy).

Tenemos $(\widehat{Ox, Oz}) = (\widehat{Oz, Oy})$ y $(\widehat{Ox, Oz'}) = (\widehat{Oz', Oy})$. Estas igualdades se expresan diciendo que una bisectriz divide un ángulo en dos ángulos iguales.




• *Bisectriz de un sector angular* (Ox, Oy). — Semi-recta Oz contenida en el sector angular y que es bisectriz del par de semi-rectas (Ox, Oy). Tiene por soporte el eje de simetría D del sector angular. Por esta razón, suele decirse que la bisectriz divide al sector angular en dos partes «iguales». En el caso de un sector saliente, la bisectriz es el conjunto de los puntos del plano equidistantes de las semi-rectas Ox y Oy.

V. Exterior, Interior.




## Bit

Unidad de información cuyo nombre procede de Binary digiT. Es la información que anuncia el valor tomado por una variable que puede adoptar dos valores distintos.

## Bitangente

• *Bitangente a una curva plana.* — Recta tangente en dos puntos de la curva.

## Bitangentes

• *Curvas bitangentes.* — Dos curvas $C_1$ y $C_2$ se llaman bitangentes si existen dos puntos en los que son tangentes.

## Biuniforme

• *Aplicación biuniforme de un espacio métrico* E *en otro* F. — Aplicación biyectiva uniformemente continua $f$ tal que $f^{-1}$ sea también uniformemente continua.

## Biunívoca

• *Aplicación o correspondencia biunívoca.* — Aplicación biyectiva.

## Biyección

Aplicación biyectiva.

## Biyectiva

• *Aplicación biyectiva de* E *hacia* F. — (Antiguamente, aplicación biunívoca o correspondencia biunívoca.) Aplicación $f: E \to F$ inyectiva y sobreyectiva. Todo elemento de F es la imagen por $f$ de un único elemento de E. Una aplicación $f: E \to F$ es biyectiva si y solamente si existe $g: F \to E$ tal que $f \circ g = id_F$ y $g \circ f = id_E$.
V. PERMUTACIÓN, RECÍPROCO.

## Bloque

• *Bloque de un conjunto finito* E. — Parte de E; bloque es, por tanto, sinónimo de combinación de elementos de E.
V. COMBINACIÓN, CONFIGURACIÓN.

## Bola

Dado un espacio métrico E, un punto $x_0$ de E y un real $r$ estrictamente positivo, se llama bola cerrada (resp. abierta) de centro $x_0$ y de radio $r$ al conjunto de los puntos $x$ de E tales que $d(x, x_0) \leqslant r$ (resp. $d(x, x_0) < r$). La palabra bola encuentra su sentido usual en el caso en que E sea el espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$. Cuando E es un plano euclidiano, una bola se denomina un círculo o, por abuso, una circunferencia. Cuando $E = \mathbf{R}$, una bola cerrada (resp. abierta) es el intervalo.

$$[\![x_0 - r,\ x_0 + r]\!] \quad \text{(resp.)} \quad ]\!]x_0 - r,\ x_0 + r[\![.$$

A continuación se indican tres tipos de bolas de $\mathbf{R}^2$ que corresponden a las normas:

$$\|x,\ y\|_1 = |x| + |y|,\ \|(x,\ y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y $$\|(x,\ y)\|_\infty = \text{Sup}(|x|,\ |y|).$$

V. UNIDAD.

Bolas cerradas de $\mathbf{R}^2$

## Bolyai, Janos o Johann (1802-1860)

• *Geometría de Lobatchevski-Bolyai.* — V. LOBATCHEVSKI.

## Bolzano, Bernard (1781-1848)

• *Teorema de Bolzano.* — Toda función continua de **R** en **R** que cambia de signo entre $a$ y $b$ se anula en un punto de $[\![a, b]\!]$.

• *Teorema de Bolzano-Weierstrass.* — Un espacio métrico E es compacto si y solamente si toda sucesión de elementos de E posee un valor de adherencia. Aplicado a un intervalo cerrado $[\![a, b]\!]$ de **R**, este teorema permite afirmar que para toda sucesión acotada de números reales, se puede extraer una sucesión convergente.

## **Bombieri**, Enrico

• *Teorema de Bombieri.* — Existe una infinidad de números primos $p$ tales que $p + 2$ tenga como máximo cuatro factores primos.
V. GEMELOS.

## **Bonnet**, Ossian (1819-1892)

• *Teorema de Bonnet.* — Segunda fórmula de la media.
V. MEDIA.

## **Boole**, George (1815-1864)

• *Algebra de Boole.* — Algebra cuyos fundamentos debidos a George Boole tenían por fin someter el razonamiento lógico a reglas de cálculo. En la actualidad es utilizada en el estudio de los circuitos eléctricos cuyas estructuras sirven de base a la construcción de calculadoras y ordenadores.

• *Algebra de Boole (estructura).* — Sean E un conjunto provisto de una adición y de una multiplicación y $f$ una aplicación involutiva $x \mapsto \bar{x}$ de E en E llamada complementariedad. Se dice que $(E, +, ., f)$ es un álgebra de Boole si:
1) las dos leyes son asociativas y conmutativas;
2) la ley $+$ admite un elemento neutro denotado por 0;
3) la ley $\cdot$ admite un elemento neutro denotado por 1;
4) cada una de las leyes es distributiva en relación a la otra.
5) todo elemento $x$ de E es idempotente para cada una de las leyes y verifica $x + \bar{x} = 1$ y $x \cdot \bar{x} = 0$;
6) para todo par $(x, y) \in E^2$, tenemos $x + y = \bar{x} \,.\, \bar{y}$ y $\bar{x}\bar{y} = \bar{x} + \bar{y}$ (leyes de Morgan). Se deduce de estas propiedades que 0 es absorbente para la multiplicación y que 1 lo es para la adición: $x \,.\, 0 = 0$ y $x + 1 = 1$. Ejemplo de álgebra de Boole: $(\mathfrak{P}(E), \cap, \cup, \complement_E)$ donde $\complement_E$ es la aplicación $A \mapsto \complement_E^A$. En cálculo proposicional, el conjunto cociente de los enunciados por la equivalencia lógica puede ser provisto de una estructura de álgebra de Boole para las leyes inducidas por $\wedge$, $\vee$ y $\Gamma$, llamada álgebra de Lindenbaum-Tarski.
V. ELÉCTRICOS (Circuitos), STONE.

• *Anillo de Boole.* — Anillo conmutativo unitario en el que todo elemento $x$ es idempotente, es decir, verifica $x^2 = x$. Si $(E, +, ., f)$ es un álgebra de Boole, y si $\oplus$ es la ley $x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$, entonces $(E, \oplus, \cdot)$ es un anillo de Boole. Igualmente, si $\otimes$ es la ley $x \otimes y = (x + \bar{y})(\bar{x} + y)$, entonces $(E, \otimes, +)$ es un anillo de Boole. El anillo $(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap)$ es un anillo de Boole.
V. FILTRO.

• *Desigualdad de Boole o de Boole-Poincaré.* — Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y una serie $(A_n)_{n \geq 0}$ de sucesos de $\mathscr{A}$, tenemos:

$$P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 0} P(A_n).$$

V. KOLMOGOROV (Axiomas de).

• *Función de Boole.* — Si $(E, +, ., f)$ es un álgebra de Boole, se denomina

función de Boole de $n$ variables a una aplicación de $E^n$ en E. El conjunto $\mathscr{A}(E^n, E)$ de las funciones de Boole de $n$ variables puede estar provisto de una estructura de álgebra de Boole planteando:

$$\varphi + \psi : x \mapsto \varphi(x) + \psi(x); \qquad \varphi \,.\, \psi : x \mapsto \varphi(x) \,.\, \psi(x);$$
$$\bar{\varphi} : x \mapsto \varphi(x).$$

V. MAXTÉRMINO, MINTÉRMINO.

• *Red de Boole.* — Sinónimo de retículo de Boole.

• *Retículo de Boole.* — Retículo (E, $\leqslant$) distributivo y complementario. Si se pone:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}, \; x \wedge y = \inf\{x, y\} \quad y \quad f : x \mapsto \bar{x},$$

entonces (E, $\vee$, $\wedge$, $f$) es un álgebra de Boole. Recíprocamente, si (E, +, . , $f$) es un álgebra de Boole, la relación $\mathscr{R}$ definida sobre E por $x \mathscr{R} y$ y solamente si $x \,.\, y = x$ es una relación de orden y (E, $\mathscr{R}$) es un retículo de Boole.

## Booleana

• *Algebra booleana.* — Algebra de Boole.

## Booleano

• *Anillo booleano.* — Anillo de Boole.

## Bordes

Dado un complejo de cadenas M: $\ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \to \ldots$, se denomina bordes o $n$-bordes a los elementos de $\partial_{n+1}(M_{n+1}) = I_m \partial_{n+1}$. Para todo $n \in \mathbf{Z}$ forman un sub-módulo del módulo $\operatorname{Ker} \partial_n$ de los ciclos; es el $n$-ésimo módulo $B_n(M)$ de los bordes. Todo borde es un ciclo.
V. CICLOS, COBORDES, HOMÓLOGO.

## Borel, Emile Félix Edouard Justin (1871-1956)

V. INACCESIBLES (Números).

• *Axioma de Borel-Lebesgue.* — Se dice que un espacio topológico E verifica el axioma de Borel-Lebegue si de todo recubrimiento abierto de E puede extraerse un recubrimiento finito (V. CUASI COMPACTO).

• *Cuerpos de Borel.* — Tribu de Borel de R; contiene todos los intervalos de R acotados o no.

• *Sumas de Borel de una serie divergente.* — Dada una serie divergente $\Sigma u_n$ de números reales, se le asocian dos sumas, llamadas de Borel, cuando están definidas:

$$S_1 = \lim_{\alpha \to +\infty} \left( e^{-\alpha} \sum_{n \geqslant 0} \frac{s_n}{n!} \alpha^n \right),$$

por el método exponencial, donde $(s_n)$ designa la sucesión de sumas parciales de la serie $\Sigma u_n$, y por el método integral:

$$S_2 = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sum_{n \geqslant 0} u_n \frac{x^n}{n!} dx.$$

Estas dos definiciones de la suma de una serie divergente son regulares. V. REGULAR.

• *Teorema de Borel-Lebesgue.* — En un espacio normado de dimensión finita, las partes compactas son las partes cerradas acotadas; de este modo, en **R**, los compactos son las reuniones finitas de intervalos cerrados.

• *Teorema de Heine-Borel.* — Nombre dado en ciertos países al teorema de Borel-Lebesgue.

• *Teorema o lema de Borel-Cantelli.* — Sea $(A_n)_{n \geqslant 0}$ una serie de sucesos de un espacio de probabilidad. Si la serie $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge, entonces la probabilidad de realizarse simultáneamente una infinidad de sucesos $A_n$ es nula. Si los sucesos $A_n$ son mutuamente independientes (o solamente independientes dos a dos) y si la serie $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ tiene por límite $+\infty$, entonces la probabilidad para que una infinidad de sucesos $A_n$ se realicen es igual a 1.

• *Tribu de Borel sobre un espacio topológico* E. — Tribu engendrada por la familia de las partes abiertas de E. Es también la tribu engendrada por las cerradas de E. Los conjuntos de esta tribu son llamados conjuntos borelianos de E.

## Boreliana

• *Aplicación boreliana.* — Dados dos espacios topológicos X e Y, una aplicación $f: X \to Y$ es boreliana si para todo conjunto boreliano B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un conjunto boreliano en X. Toda aplicación continua es boreliana, así como la compuesta de dos aplicaciones borelianas.

• *Tribu boreliana sobre un espacio topológico.* — Tribu de Borel sobre ese espacio.

## Boreliano

• *Boreliano de un espacio topológico* E. — Se emplea, según los autores, por tribu de Borel de E o por elemento de esa tribu.

• *Conjunto boreliano.* — V. BOREL (Tribu de).

• *Espacio boreliano.* — Sinónimo de espacio medible.

## Bose, Parker y Shrikhande (Teorema de)

Invirtiendo una conjetura de Euler demostraron en 1959, con la ayuda de un ordenador, que existen cuadrados greco-latinos de todos los órdenes salvo 2 y 6.
V. OFICIALES (Problema de los 36 – de Euler).

## Bosques

Grafos sin ciclo. Los componentes conexos de un bosque son los árboles.

## Botella

• *Botella de Klein.* — V. KLEIN.

## Bowley, Sir Arthur Lyon (1869-1957)

• *Punto de Bowley.* — Sea un juego de dos jugadores de suma no nula. Al partir de la hipótesis de que el jugador B trata de maximizar su ganancia, la mejor ganancia posible para el jugador A conduce a un resultado de juego llamado un punto de Bowley.

## Boy, Werner

• *Superficie de Boy.* — Superficie no orientable representada a continuación. Formada por tres tubos, posee unos puntos singulares que forman una curva cuya apariencia recuerda el contorno de una hoja de trébol cuyos tres folíolos estuvieran respectivamente en tres planos perpendiculares dos a dos. Existe una inmersión $\mu$ de $P(\mathbf{R}^2)$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $\Sigma = \mu[P(\mathbf{R}^2)]$.

## Brahmagupta (598(?)-628)

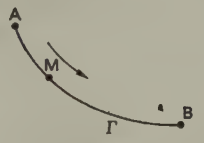
• *Fórmula de Brahmagupta.* — El área S de un cuadrángulo inscriptible cuyos lados tienen por longitudes $a$, $b$, $c$, $d$ es:

$$S = \sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}$$

donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ es el semi-perímetro del cuadrángulo. Esta fórmula generaliza la de Héron relativa al triángulo.

## Braquistocrona

• *Curva braquistocrona.* — Sean A y B dos puntos del espacio, una curva que pasa por A y B, M un punto material desplazándose sin rozamiento sobre Γ bajo la acción de la gravedad y abandonado en A, sin velocidad inicial; la curva Γ, que hace mínimo el tiempo tardado por M para alcanzar B, se llama braquistocrona. En el espacio euclídeo es un arco de cicloide del que A es un punto de retroceso y no un segmento de recta AB. En la vida corriente, donde las duraciones de los trayectos son a veces más importantes que sus longitudes, las braquistocronas pueden ser preferibles a las geodésicas.




## Bravais, Auguste (1811-1863)

• *Coeficiente de correlación de Bravais-Pearson.* — Coeficiente de correlación de dos variables aleatorias.
V. CORRELACIÓN.

## Bucle

• *Bucle de un grafo.* — Arco cuyos extremos son iguales.

• *Bucle de un multigrafo.* — Arista cuyos extremos son iguales.

## Buen orden

Orden sobre un conjunto no vacío E tal que toda parte no vacía de E posea un primer elemento. El orden usual es un buen orden en **N** pero no hay uno en **Z**, **Q** o **R**.
El axioma de Zermelo permite afirmar que en todo conjunto existe al menos un buen orden; pero no se conoce explícitamente un buen orden en **R**.

**Bretzel**

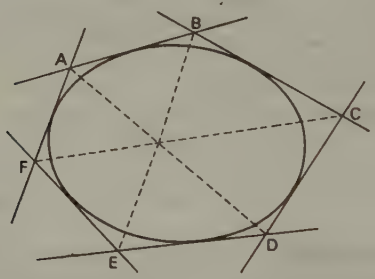
Toro de dos agujeros, también llamado doble toro.
V. TORO.

**Breusch,** Robert H. (1907-1995)

• *Teorema de Breusch.* — Para todo entero $n \geqslant 48$, existe un entero primo entre $n$ y $9/8\ n$. Este teorema demostrado en 1931 emparenta con el postulado de Bertrand (V. INGHAM).

**Brianchon,** Charles Julien (1785-1864)

• *Teorema de Brianchon.* — Si un hexágono tiene sus lados tangentes a una cónica, tres de sus diagonales son concurrentes. Tal hexágono es llamado hexágono de Brianchon, y el punto de concurrencia de las diagonales es el punto de Brianchon.
V. PASCAL (Teorema de).




**Bricard,** Raoul (1870-1944)

• *Octaedro de Bricard.* — Nombre dado a una armadura metálica octoédrica y flexible descubierta por Bricard (1897). Su estudio ha servido de punto de partida a Connelly para construir su poliedro flexible de caras rígidas.
V. CONNELLY.

**Briggs,** Henry (1561-1630)

• *Logaritmo briggsiano o de Briggs.* — Logaritmo decimal. Si $y = 10^x$, $x$ es llamado logaritmo de Briggs de $y$.

## **Brocard,** Henri (1845-1922)

• *Angulo de Brocard de un triángulo.* — Angulo $\omega$ definido por:

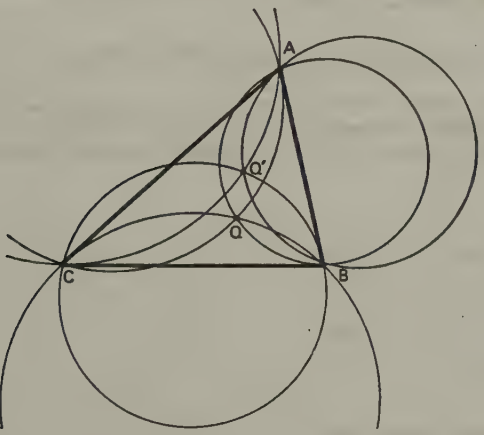
$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C,$$

donde A, B, C designan los ángulos de vértices del triángulo.
En realidad ha sido utilizado por K. F. A. Jacobi (1886).

• *Eje de Brocard de un triángulo.* — Recta que pasa por el centro O del círculo circunscrito y el punto de Lemoine K.

• *Círculo de Brocard.* — Círculo que pasa por los dos puntos de Brocard de un triángulo y por el centro O del círculo circunscrito. El círculo de Brocard pasa igualmente por el punto de Lemoine K que es diametralmente opuesto a O, y tiene el mismo centro que el primer círculo de Lemoine.

• *Puntos de Brocard de un triángulo* ABC. — Consideremos tres círculos; aquél que pasa por B y C y tangente a AC, aquél que pasa por C y A y tangente a BA y aquél que pasa por A y B y tangente a CB. Estos tres círculos pasan por un mismo punto Q. Asimismo, el círculo que pasa por C y B y tangente a AB, el que pasa por A y C y tangente a BC y el que pasa por B y A y tangente a AC, los tres pasan por un mismo punto Q'. Los puntos Q y Q' se llaman puntos de Brocard del triángulo. En realidad, fueron hallados por A. L. Grelle en 1884.




## **Brounker,** William (1620-1684)

• *Fórmula de Brounker.* — Afirma que:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}}$$

## **Brouwer,** Luitzen Egbertus Jan (1881-1966)

• *Teorema de Brouwer.* — Es un teorema del punto fijo. Afirma que toda aplicación continua de un disco cerrado D de $\mathbf{R}^2$ en sí mismo posee un punto fijo. De forma intuitiva, se puede expresar diciendo que, si se quita un mantel que recubre una mesa circular, si se arruga sin desgarrarlo y si se tira así sobre la mesa, tendrá al menos un punto del mantel que no habrá cambiado de lugar. Más generalmente, toda aplicación continua de la bola unidad cerrada en $\mathbf{R}^n$ en ella misma, para $n \geqslant 2$ posee un punto fijo.
V. FIJO.

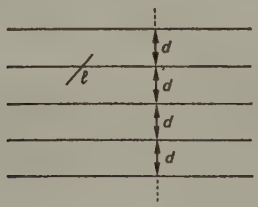
• *Teorema de la invarianza de la dimensión de Brouwer.* — Para $m \neq n$ no existe homeomorfismo de un abierto de $\mathbf{R}^m$ sobre un abierto de $\mathbf{R}^n$.

## **Brun,** Viggo (1885-1978)

• *Teorema de Brun.* — La serie $\Sigma 1/p$ en que $p$ recorre el conjunto de los números primos gemelos es convergente.

## **Buffon,** Georges Louis Leclerc, Conde de (1707-1788)

• *Problema de la aguja de Buffon.* — Sea un plano horizontal sobre el que se trazan rectas paralelas distantes una longitud $d$. Si se deja caer sobre ese plano una aguja de longitud $l \leqslant d$, la probabilidad de que esa aguja corte una recta es igual a $2l/\pi d$.




## **Burali Forti,** Cesare (1861-1931)

• *Paradoja de Burali Forti.* — La colección de ordinales no es un conjunto. Ya observado por Cantor, este resultado paradójico en esa época fue demostrado por Burali Forti en 1897.

## **Burnside**, William Snow (1852-1927)

● *Conjeturas (o problemas) de Burnside.* — Burnside enunció un gran número de conjeturas y de problemas en teoría de grupos; entre los más célebres citemos:

1) todo grupo engendrado por un número finito de elementos y en el que todo elemento es de orden finito, ¿es necesariamente un grupo finito? La respuesta negativa a esta pregunta se debe a Novikov (1959), Golod y Shafarevic (1964);

2) todo grupo simple finito no conmutativo es necesariamente de orden par. V. FEIT (Teorema de Feit-Thomson).

● *Fórmula de doble integración de Burnside.* — Sea $f \in \mathbf{R}[X, Y]$ un polinomio de grado inferior o igual a 5. La fórmula de Burnside afirma que:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{40}{49}[f(a, 0) + f(0, a) + f(-a, 0) + f(0, -a)] + \frac{9}{49}[f(b, b) + f(b, -b) + f(-b, b) + f(-b, -b)]$$

ó

$$a = \sqrt{\frac{7}{15}}, \quad b = \sqrt{\frac{7}{9}}.$$

● *Teorema de Burnside.* — Sean $p$ y $q$ dos enteros primos distintos; todo grupo de orden $p^2q$ es resoluble.

V. RESOLUBLE.

# C

## C

• *Constante de Euler.* — V. EULER.

## C

• *Cuerpo de números complejos.* — V. COMPLEJOS.

## Cadena

• *Cadena de Markov.* — V. MARKOV.

• *Cadena de un conjunto ordenado* E. — Sub-conjunto de E totalmente ordenado por el orden inducido.

• *Cadena de un grafo* G. — Sucesión $u_1, u_2, ..., u_n$, de arcos de G tal que cada arco $u_i (1 < i < n)$ que la compone tenga un extremo en común con el arco que le precede y el otro extremo en común con el arco que le sigue.
V. ELEMENTAL, EULERIANA, HAMILTONIANA, LONGITUD, SIMPLE.

• *Condición de cadena.* — Un conjunto ordenado verifica la condición de cadena ascendente [resp. descendente] si toda cadena posee un elemento mayor [resp. uno menor].
V. ARTINIANO, NOETHERIANO.

## Cadenas

• *Complejo de cadenas.* — Un complejo de módulos $(M^n, \partial^n)_{n \in Z}$ se llama complejo de cadenas si $M^n = 0$ para todo $n > 0$. Con las convenciones habituales (V. COMPLEJO) viene dado, por tanto por una serie:

$$M: ... \to M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \to ... \to M_1 \xrightarrow{\partial_1} M_0 \to 0$$

tal que $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(\partial_n)$
V. COCADENAS (Complejo de), COMPLEJO, EXACTA (Sucesión), HOMOLOGÍA.

## Cajones

• *Principio de los cajones o principio de las cajas.* — Nombre dado al principio de Dirichlet-Schläfli si se enuncia así: si $n$ objetos están distribuidos en $m$ cajones y si $m$ es estrictamente inferior a $n$, entonces hay un cajón que contiene al menos dos objetos. Sinónimo del principio del agujero de pichón.

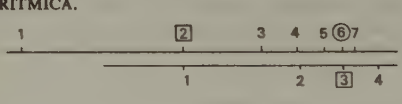
## Calculador o calculadora

Máquina de calcular electrónica que puede realizar cálculos numéricos u operaciones lógicas. Sinónimo práctico: ordenador.

## Cálculo

En origen, sinónimo de utilización de las operaciones sobre los números; en la actualidad, la palabra cálculo se emplea para designar toda manipulación de reglas operatorias (abstractas o no), la demostración de fórmulas, las aplicaciones numéricas de resultados teóricos por oposición a las demostraciones que se obtienen con la ayuda de razonamientos puramente lógicos y abstractos.
V. DIFERENCIAL, ESTADÍSTICO, INFINITESIMAL, INTEGRAL, LITERAL, MATRICIAL, NUMÉRICO, PREDICADOS, PROBABILIDADES, PROPOSICIONAL, TENSORIAL, VARIACIONES, VECTORIAL.

• *Regla de cálculo.* — Instrumento que permite calcular valores aproximados de productos o de cocientes desplazando una escala logarítmica con relación a otra.
V. LOGARÍTMICA.




Ciertas reglas de cálculos comportan diferentes escalas que permiten determinar las inversas, los cuadrados, los cubos, los logaritmos, las razones trigonométricas de ciertos ángulos, etc.

• *Reglas de cálculo en una teoría.* — Teorema que permite calcular en esa teoría. Por ejemplo, en un grupo $(G, \cdot)$, el teorema $ab = c$ si y solamente si $b = a^{-1}c$ es una regla de cálculo.

## Calor

• *Ecuación del calor o ecuación de difusión del calor.* — V. DIFUSIÓN.

## Cambio

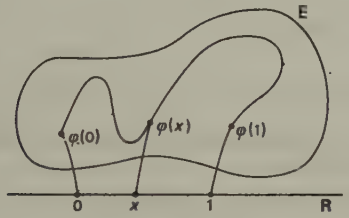
• *Cambio de incógnita.* — Sea una ecuación $f(x) = g(x)$, donde $f$ y $g$ son aplicaciones de un conjunto E en un conjunto F, y sea $u$ una aplicación de un

conjunto H en E. La ecuación $(f \circ u)(y) = (g \circ u)(y)$ de incógnita $y \in H$ se dice obtenida por cambio de incógnita.

• *Cambio de variable.* — Sea una aplicación $f: x \mapsto f(x)$ de B en C y sea una aplicación $u: t \mapsto u(t)$ de A en B; la aplicación F de A en C definida por $F(t) = (f \circ u)(t)$ se llama aplicación deducida de $f$ por el cambio de variable $u$.

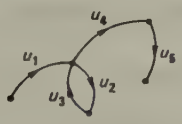
## Camino

• *Camino de un espacio topológico* E. — Aplicación continua $\varphi$ de $[\![0, 1]\!]$ en E; $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$ son respectivamente el origen y el extremo de ese camino.
V. Abierto, Cerrado, Homotopos, Indice, Lazo.




• *Camino en el plano complejo.* — Aplicación $\gamma: [\![a, b]\!] \to \mathbf{C}$ continua y continuamente derivable por trozos (V. Integral).

• *Caminos en un grafo* G. — Cadena $(u_1, u_2, ..., u_n)$, donde para todo arco $u_i (1 \leqslant i < n)$ el extremo final de $u_i$ coincide con el extremo inicial de $u_{i+1}$.
V. Elemental, Euleriano, Hamiltoniano, Longitud, Simple.




## Campana

• *Curva en campana.* — Nombre que a veces se da a la curva de Gauss debido a su forma. En las ciencias experimentales se ha abandonado a veces la exigencia de que se trate de una curva de Gauss.

## Campo

• *Campo de Galois.* — Sinónimo cada vez menos utilizado de cuerpo finito.

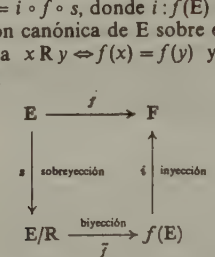
• *Campo vectorial definido sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^3$. — Aplicación diferenciable de U en $\mathbf{R}^3$. Es el modelo matemático de los campos de la física (campos de momentos, campos de fuerzas, etc.).
V. Circulación, Divergencia, Gradiente, Momentos, Rotacional, Solenoidal.

## Canónica

Sinónimo de natural, de intrínseco.

• *Base canónica de* $K^n$, *donde* K *es un cuerpo.* — Base del K-espacio vectorial $K^n$ formado por los vectores (1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0, 1).

• *Descomposición canónica de una aplicación* $f: E \to F$. — Escritura de $f$ bajo la forma $f = i \circ \tilde{f} \circ s$, donde $i: f(E) \to F$ es la inyección canónica, $s: E \to E/R$ la sobreyección canónica de E sobre el conjunto cociente de E por la relación de equivalencia $x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ y $\tilde{f}: E/R \to f(E)$ la biyección definida por $\tilde{f}(\dot{x}) = f(x)$.




• *Inyección canónica de* A *en un conjunto* B *del que* A *es una parte.* — La inyección definida por $x \mapsto x$.

• *Proyector y proyección canónicas.* — V. COORDENADAS (Función).

• *Suprayección canónica.* — Si $\mathcal{R}$ es una equivalencia sobre el conjunto E, la sobreyección de E sobre $E/\mathcal{R}$, que a $x$ asocia la clase $\dot{x}$ de $x$ módulo $\mathcal{R}$, es denominada sobreyección canónica de E sobre $E/\mathcal{R}$.

## Canónicas

• *Sistema de ecuaciones canónicas de un movimiento.* — V. HAMILTONIANO.

## Cantelli, Francesco Paolo (1875-1966)

• *Teorema de Borel Cantelli.* — V. BOREL.

## Cantidad

En el lenguaje corriente se denomina cantidad a todo lo que se puede contar o medir y representar por un número. Una gran parte de las matemáticas tradicionales procede del afinamiento de esta noción primitiva.

• *Cantidad de aceleración de un punto material* M. — Producto $m \cdot \vec{\Gamma}$ del vector aceleración de M por su masa $m$.

• *Cantidad de información.* — V. INFORMACIÓN.

• *Cantidad de movimiento.* — Se denomina cantidad de movimiento o impulso de un punto material M de masa $m$ y de vector velocidad $\vec{V}$ al vector $m \cdot \vec{V}$.

Más generalmente, la cantidad de movimiento de un sistema de puntos materiales es la suma de las cantidades de movimiento de cada punto. Es igual a la cantidad de movimiento de un punto material colocado en el centro de inercia cuya masa es igual a la suma de las masas de cada punto; por esta razón se denomina también resultante cinética del sistema.

## Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845-1918)

• *Conjetura de Cantor.* — V. CONTINUO (Hipótesis del).

• *Conjunto triádico de Cantor.* — V. TRIÁDICO.

• *Principio de Cantor.* — Principio de los segmentos encajados.

• *Sucesión fundamental de Cantor.* — Sinónimo de sucesión de Cauchy de números racionales.

• *Teorema de Cantor.* — Los teoremas más célebres de Cantor conciernen a los cardinales:

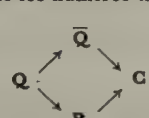
1) Para todo conjunto E, se tiene:

$$\text{Card } \mathfrak{P}(E) > \text{Card } E \quad \text{y} \quad \text{Card } \mathfrak{P}(E) = 2^{\text{Card } E}.$$

De ello resulta, que para todo cardinal $\alpha$ existe un cardinal $\beta$ que le es estrictamente superior y que la clase de todos los conjuntos no es un conjunto. Este teorema implica que $2^{\aleph_\alpha} \geqslant \aleph_{\alpha+1}$ para todo ordinal $\alpha$.

V. EASTON.

2) El cuerpo $\overline{\mathbf{Q}}$ de los números complejos algebraicos es numerable y el conjunto de los números trascendentes $(\mathbf{C} - \overline{\mathbf{Q}})$ tiene la potencia del continuo.



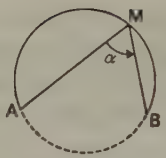

3) El cardinal de todo intervalo no vacío de **R** tiene la potencia del continuo.

4) Si la serie trigonométrica $\Sigma a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ converge hacia cero para todo $x \in \mathbf{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Fue tratando de debilitar las hipótesis de este teorema como Cantor introdujo los conjuntos derivados.

• *Teorema de Cantor-Bernstein.* — Teorema de Bernstein.

## Capaz

• *Arco capaz relativo a un ángulo* $\alpha$ *y a dos puntos* A *y* B. — Conjunto de los puntos M del plano tales que el ángulo de vectores $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ sea constante e igual a $\alpha$. Es un arco de circunferencia de extremos A y B.




## Caracol

V. PASCAL.

## Carácter

El criterio sobre el que descansa un estudio estadístico se llama carácter. Por ejemplo, la talla o el sexo de un individuo o el peso de un objeto. Se distinguen dos tipos de caracteres: aquéllos a los que se pueden hacer corresponder números (edad, talla, peso, etc.) y los otros, como el color de los cabellos, la nacionalidad, etc. Los primeros se denominan cuantitativos, los otros son cualitativos. También un carácter cuantitativo se denomina una variable estadística.
V. CLASES, CONTINUO, DATOS (Análisis de), DISCRETO.

• *Carácter de un grupo conmutativo finito* G. — Homomorfismo de G en el grupo multiplicativo $\mathbf{C}^*$.

• *Carácter de una* K*-álgebra conmutativa* E. — Homomorfismo no nulo de la K-álgebra E en la K-álgebra K.

## Característica

• *Característica de Euler-Poincaré de un complejo de cadena, de un grafo, de un poliedro, de una superficie, de una variedad diferencial.* — V. EULER.

• *Característica de un anillo que posee un elemento neutro e.* — Es el entero 0 si para todo $n \in \mathbf{N}^*$ tenemos $n \cdot e \neq 0$; en caso contrario es el más pequeño entero $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $n \cdot e = 0$. El anillo $\mathbf{Z}$ es de característica nula y $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de característica $n$, para $n \geqslant 2$.

• *Característica de un logaritmo decimal.* — Parte entera notada $c$ del logaritmo decimal. La característica $c$ de $\log x$ se encuentra al examinar la escritura decimal de $x$: si $x \geqslant 1$ es igual a $n - 1$, donde $n$ es el número de cifras antes de la coma. Si $0 < x < 1$ es igual a $-p$, donde $p$ es el lugar a partir de la coma de la primera cifra no nula. Así, $\log 898$; $\log 1{,}304$ y $\log 0{,}0071$ tienen, respectivamente, por característica 2, 0 y $-3$.
V. MANTISA.

• *Ecuación característica de un endomorfismo o de una matriz cuadrada.* — Ecuación $f(x) = 0$, donde $f$ es el polinomio característico del endomorfismo o de la matriz considerada.

• *Función característica de una parte* X *de un conjunto* E. — Aplicación $\varphi$ de E en $\{0, 1\}$ tal que $\varphi(x) = 1$ si $x \in X$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \notin X$.

• *Función característica de una variable aleatoria* X. — Función $\varphi(t)$ definida por algunos como la esperanza matemática de $e^{-2\pi i X t}$ y por otros como la esperanza matemática de $e^{iXt}$. Si X es absolutamente continua, $\varphi$ es la transformada de Fourier de la función de densidad de probabilidad $f$ de X.

• *Polinomio característico de un endomorfismo u de un* K*-espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Polinomio característico de la matriz de $u$; es independiente de la base considerada. Como el polinomio minimal de $u$ del que es múltiple, sus raíces en K constituyen el espectro de $f$.

• *Polinomio característico de una matriz cuadrada* $M \in M_n(K)$. — El polinomio tiene una indeterminada $\det(XI_n - M) \in K[X]$. Es un múltiplo del polinomio minimal de M; como para este último, sus raíces en K constituyen el espectro de M.

• *Propiedad característica de un objeto matemático.* — Cuando varias aserciones son equivalentes, si una de ellas es escogida como una definición de un objeto matemático, las otras aserciones se denominan entonces propiedades características de ese objeto. De este modo, para un triángulo T las dos aserciones siguientes son equivalentes: «T posee dos lados isométricos» y «T posee dos ángulos de medidas iguales». Usualmente, la primera aserción es escogida como definición de un triángulo isósceles; la segunda es entonces una propiedad característica. Esta elección es evidentemente arbitraria y no está motivada más que por razones psicológicas o pedagógicas, no matemáticas.

## Características

• *Determinantes característicos de un sistema de n ecuaciones lineales con p incógnitas* $\sum_{i=1}^{p} a_{ji}x_i = b_j$, *para* $1 \leqslant j \leqslant n$ *con* $a_{ji} \in \mathbf{C}$ *y* $b_j \in \mathbf{C}$. — Si el determinante principal del sistema es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \quad \text{con } r \leqslant n,$$

los $(n - r)$ determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix}$$

con $r < s \leqslant n$ se llaman determinantes característicos del sistema.

## Cardan, Jerome (o Hieronimo) (1501-1576)

• *Fórmula de Cardan.* — Da las raíces de la ecuación general del tercer grado. Condujo al descubrimiento y luego al estudio, de los números complejos. V. TERCERO (Grado).

## Cardinal

Extensión de la noción de número de elementos de un conjunto finito. Dado un conjunto E, se llama cardinal de E al más pequeño ordinal equipotente a E. (Un cardinal es, por tanto, un ordinal particular.) Así, los conjuntos $\omega$, $\omega+3$ y $\omega+\omega$ son equipotentes a N, pero el más pequeño de los ordinales equipotentes a N es $\omega$, se dice que $\omega$ es el cardinal de N. Se escribe la mayor parte de las veces $\aleph_0$ y $\aleph_1$ designa el primer cardinal no numerable. Más generalmente, para todo ordinal $\alpha$, se nota $\aleph_{\alpha+1}$ el primer cardinal estrictamente superior a $\aleph_\alpha$ (V. ALEPH). Según las obras, el cardinal de un conjunto E es notado Card(E), $|E|$, $\#E$, $\overline{E}$ o $\bar{\bar{E}}$.

Dos conjuntos tienen igual cardinal si y solamente si son equipotentes. Los cardinales finitos (V. FINITO) son los enteros naturales y el cardinal de un conjunto finito es el número de sus elementos.

Los cardinales finitos forman el conjunto N, pero no existe conjunto del que todos los cardinales sean elementos.

Se desarrolla la aritmética de los cardinales infinitos (o transfinitos) por analogía con la de los cardinales finitos (V. TRANSFINITA (Aritmética)).

V. ALEPH, CANTOR, CONTINUO (Hipótesis del), INACCESIBLE, MEDIBLE, ORDINAL, REGULAR, SINGULAR.

• *Suma cardinal de dos cardinales.* — Viene definida por:

$$\text{Card}(E) + \text{Card}(F) = \text{Card}(E \cup F)$$

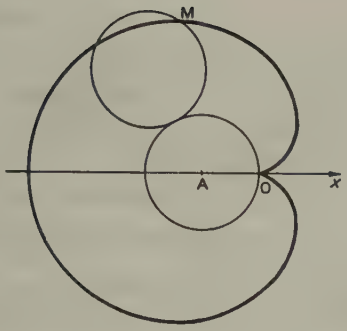
donde E y F son conjuntos disjuntos. Para dos conjuntos A y B cualesquiera tenemos:

$$\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(A \cap B).$$

V. TRANSFINITA (Aritmética).

## Cardioide

Epicicloide con un punto de retroceso engendrada por un punto de un círculo de radio $a$ que rueda exteriormente sin deslizarse sobre un círculo de igual radio. Su forma recuerda la del corazón, de ahí su nombre. La cardioide es la curva inversa de una parábola por relación a su foco; es, por tanto, un caracol de Pascal. Si O es el punto de retroceso de la cardioide, su ecuación polar en un sistema de referencia de polo O es $\rho = 2a(1 - \cos\theta)$; longitud $16a$; área $6\pi a^2$.




## Cardo de Van der Waerden

Figura cuyo contorno es una curva de Koch. Sinónimos: Curva en copo de nieve, Isla de Von Koch (V. KOCH).

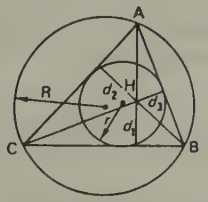
## Carmichael, Robert Daniel (1879-1967)

• *Conjetura o hipótesis de Carmichael.* — Sea $\varphi$ el indicador de Euler. Para todo entero $n \geqslant 1$, existe por lo menos un entero $m$ diferente de $n$ tal que $\varphi(m) = \varphi(n)$.

• *Número de Carmichael.* — Número compuesto $n$ tal que $a^n \equiv a \bmod n$ para todo entero $a$ extraño a $n$. Se ignora si su conjunto es finito o infinito. A veces se les denominan números absolutamente pseudo-primos.
V. PSEUDO-PRIMO.

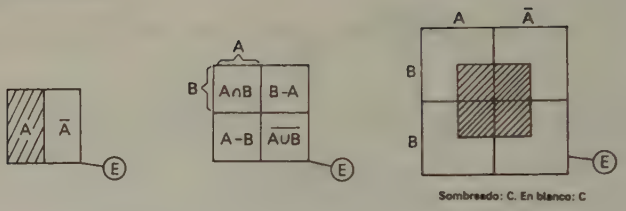
## Carnot, Lazare Nicolas Marguerite (1753-1823)

• *Fórmula de Carnot.* — La suma de las distancias del ortocentro a los tres lados de un triángulo es igual a la suma de los radios de los círculos circunscritos e inscritos: $d_1 + d_2 + d_3 = R + r$.




## Carroll, Lewis (1832-1898)
## (de verdadero nombre Ch. L. Dodgson)

• *Diagrama de Carroll.* — Representación esquemática de conjuntos por rectángulos según el principio ilustrado por el esquema que a continuación se detalla a la izquierda:




Los diagramas de Carroll demuestran con toda evidencia la dualidad entre una parte de A y su complementaria $\bar{A}$ en E.
Si se quiere hacer que intervengan tres sub-conjuntos de E, se adopta la disposición anterior de la derecha.
K. KARNAUGH.

## Cartesiana

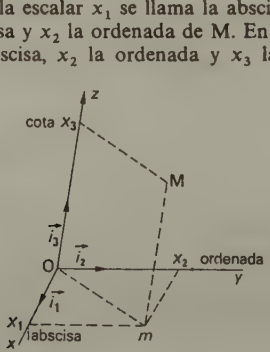
• *Ecuación cartesiana de una curva plana con relación a un sistema de referencias cartesiano* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. — Relación de la forma $f(x, y) = 0$ que da una condición necesaria y suficiente para que el punto de coordenadas cartesianas $(x, y)$ pertenezca a la curva.

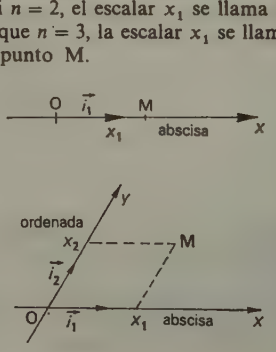
• *Ecuación cartesiana de una superficie de* $\mathbf{R}^3$ *con relación a un sistema de referencia cartesiano* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. — Relación de la forma $f(x, y, z) = 0$ que da una condición necesaria y suficiente para que el punto de coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ pertenezca a la superficie.

• *Forma cartesiana de un número complejo.* — Sinónimo de forma algebraica.

## Cartesianas

• *Coordenadas cartesianas de un punto* M *de un espacio afín de dimensión n en el sistema de referencia afín* $(O, \vec{i}_1, ..., \vec{i}_n)$. — Componentes $(x_1, x_2, ..., x_n)$ del vector $\overrightarrow{OM}$ sobre la base $(\vec{i}_1, ..., \vec{i}_n)$. Convencionalmente, en el caso en que $n = 1$, la escalar $x_1$ se llama la abscisa de M. Si $n = 2$, el escalar $x_1$ se llama la abscisa y $x_2$ la ordenada de M. En el caso en que $n = 3$, la escalar $x_1$ se llama la abscisa, $x_2$ la ordenada y $x_3$ la cota del punto M.



## Cartesiano

• *Cuadrado cartesiano de un conjunto* E. — Producto cartesiano $E^2$ de E por sí mismo.

• *Producto cartesiano de dos conjuntos* E y F. — Conjunto $E \times F$ de las parejas $(x, y)$, donde $x \in E$ e $y \in F$. Si $E \neq F$, entonces $E \times F \neq F \times E$. Dados tres conjuntos $E_1$, $E_2$, $E_3$, los dos productos cartesianos $(E_1 \times E_2) \times E_3$ y $E_1 \times (E_2 \times E_3)$ son identificables al producto cartesiano $E_1 \times E_2 \times E_3$ de la familia $(E_i)_{i \in \{1,2,3\}}$.

V. *n*-UPLO.

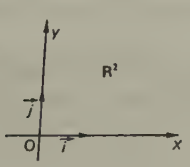
• *Producto cartesiano de una familia de conjunto* $(E_i)_{i \in I}$. — Conjunto de las aplicaciones $f$ de I en la reunión $\bigcup_{i \in I} E_i$ tales que para todo $i \in I$, $f(i)$ pertenezca a $E_i$. Este conjunto se denota por $\prod_{i \in I} E_i$.

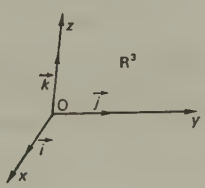
V. *n*-UPLO.

• *Sistema de referencias cartesiano de un espacio afín* $\mathscr{E}$. — Sinónimo de sistema de referencias afín utilizado esencialmente cuando $\mathscr{E}$ es el espacio $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$.

• *Sistema de referencias cartesiano de* $\mathbf{R}^2$. — Triplete $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donde $(\vec{i}, \vec{j})$ es una base de $\mathbf{R}^2$, el eje $(O, D_1, \vec{i})$ también denotado por $Ox$, se llama el eje de las abscisas, el eje $(O, D_2, \vec{j})$ denotado también por $Oy$, es el de las ordenadas (véase dibujo inferior a la izquierda).

• *Sistema de referencias cartesiano de* $\mathbf{R}^3$. — Cuadruplete $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, donde $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es una base de $\mathbf{R}^3$, los ejes $(O, D_1, \vec{i})$, $(O, D_2, \vec{j})$ y $(O, D_3, \vec{k})$, denotados usualmente por $Ox$, $Oy$ y $Oz$ se denominan, respectivamente, el eje de las abscisas, el eje de las ordenadas y el eje de los lados.




• *Sistema de ejes cartesiano.* — Sinónimo de sistema de referencias cartesiano.

## Casi

En el lenguaje corriente y en sus extensiones científicas o técnicas, palabras como «casi» o «cuasi» admiten un margen de imprecisión que, debidamente empleado, no es entorpecedor y puede incluso permitir progresar en el conocimiento de un fenómeno o en el logro de un objetivo. En matemáticas, este

laxismo está proscrito. Sin embargo, estas palabras recobran una legitimidad perfecta en matemáticas en un gran número de casos particulares, cuando van acompañadas de complementos de definiciones que hacen desaparecer todo resto de ambigüedad.
Ejemplos: denso casi por todas partes, casi periódico, casi paralelizable, cuasi analítico, cuasi invariante, etc.
V. CIERTO, IMPOSIBLE, CUASI, SEGURO, SEGURAMENTE.

## Caso

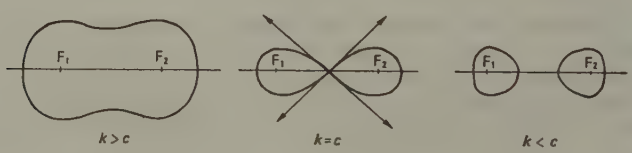
- *Caso de igualdad de los triángulos.* — V. IGUALDAD.
- *Caso de semejanza de triángulos.* — V. SIMILITUD.
- *Caso de isometría de triángulos.* — V. ISOMETRÍA.

## Casquete

V. ESFÉRICO.

## Cassini, Jean-Dominique (1625-1712)

- *Ovalo de Cassini.* — Lemniscata de dos focos, es decir, conjunto de los puntos del plano cuyo producto $k^2 > 0$ de sus distancias a dos puntos fijos $F_1$ y $F_2$ distantes $2c > 0$ es constante. Su ecuación bipolar con relación a $F_1$ y $F_2$ es $rr' = k^2$. Las formas de los óvalos de Cassini difieren según que $k$ sea inferior o superior a $c$. Para $k = c$ es una lemniscata de Bernoulli.




## Casuales

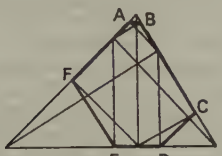
- *Números casuales.* — Familia de números enteros introducidos en 1956 por Ulam, y cuyas propiedades asintóticas recuerdan las de los números primos: su densidad es $1/\text{Log}\, n$; parece que todo miembro par es la suma de dos números casuales (V. GOLDBACH). Así se han descubierto que numerosas propiedades de números primos no estaban ligadas directamente a su «primariedad». Se encuentran los primeros números casuales mediante la aplicación de la criba de Ulam (V. ULAM). También se los llama números *fastos*.

## Catalán, Eugene Charles (1814-1894)

• *Conjetura de Catalán.* — No demostrada en la actualidad, afirma que la ecuación de Catalán no admite más que la solución $x = 3$, $y = 2$, $n = 2$ y $m = 3$. Es objeto de numerosos trabajos. Por ahora sólo se sabe que tiene un número finito de soluciones (V. TIJDEMAN).

• *Ecuación de Catalán.* — Ecuación diofantiana $x^n - y^m = 1$, donde $x$, $y$, $n$ y $m$ son enteros estrictamente superiores a 1.

• *Hexágono de Catalán.* — Hexágono inscriptible en un círculo que tiene por vértices las proyecciones de los pies de las alturas de un triángulo sobre los lados de ese mismo triángulo.




• *Números de Catalán.* — Serie $u_n$ de números enteros positivos que se define por $u_1 = 1$ y para $n \geqslant 2$ por:

$$u_n = \frac{2(2n-3)}{n} u_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Los diez primeros términos de esta serie son: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1.430, 4.862. Estos números aparecen en problemas de naturaleza combinatoria tales como el problema de Catalán o el número de ciertas triangulaciones de polígonos convexos. Verifican la fórmula: $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k}$ para $n \geqslant 2$.

• *Problema de Catalán.* — Dado un producto P de $n$ números $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ en este orden, $P = x_1 x_2 \ldots x_n$, ¿cuál es el número $u_n$ de parentescos diferentes de que se puede proveer P para calcularlo por multiplicaciones sucesivas que siempre operan sobre dos factores adyacentes? El número $u_n$ es un número de Catalán.
La conjetura de Catalán se llama a veces problema de Catalán.

• *Trisectriz de Catalán.* — Otro nombre de la cúbica de Tschirnhausen.

## Catálogos

• *Paradoja de los catálogos.* — V. RUSSELL.

## Catástrofe

V. CATÁSTROFES.

## **Catástrofes** (Teoría de las)

La teoría de las catástrofes nacida principalmente de los trabajos de René Thom tiene por objeto, a partir de una morfología dada empíricamente o de fenómenos discontinuos, reconstruir el modelo dinámico continuo más simple que pueda engendrarlo.

Mientras que el estudio clásico de las funciones diferenciables permite la descripción de fenómenos que no varían de forma repentina, el punto de partida de la teoría de las catástrofes es el de fenómenos que presentan singularidades, por ejemplo, ciertas clases de ecuaciones diferenciales que dependen de parámetros que varían continuamente.

En la teoría de las catástrofes restringidas, uno se interesa en un proceso que comporta variables internas numerosas ocultas y/o en la acción de algún estímulo que depende de un pequeño número de parámetros bien conocidos (que se llaman dimensiones). Se dice que este proceso es definido en cada punto por una función potencial $V_M$ dependiente de parámetros $x_1, ..., x_n$. Un punto M es llamado entonces un punto catastrófico (o bien se dice que tiene una catástrofe en M) si después de pequeñas variaciones de los parámetros $x_i$ no se puede seguir describiendo el proceso de la misma forma.

La función $V_M$ presenta en este punto una singularidad: en un punto M próximo a un punto catastrófico $M_0$ no se puede identificar $V_M$ y $V_{M_0}$.

Uno de los resultados de base de la teoría de las catástrofes restringidas proporciona una clasificación de las catástrofes denominadas elementales. Dejando de lado una catástrofe llamada «trivial», hay 5 catástrofes elementales en dimensión inferior o igual a 3 (tres parámetros como máximo); hay 7 de dimensión inferior o igual a 4 (cuatro parámetros como máximo).

Los nombres de las siete primeras catástrofes elementales han sido escogidos para subrayar el parecido de las superficies que les están asociadas con formas familiares.

El pliegue:

Potencial de la forma: $F_p(x) = x^3 + p_1 x$.

El frunce:

Potencial: $G_p(x) = x^4 - p_1 x^2 - p_2 x$.

La cola de milano:

Potencial: $H_p(x) = x^5 + p_1 x^3 + p_2 x^2 + p_3 x$.

La ola u ombligo hiperbólico:

Potencial: $J_p(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + p_1 x_1 x_2 + p_1 x_2 + p_2 x_1$.

El pelo u ombligo elíptico:

Potencial: $K_p(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{3} - x_1 x_2^2 + p_1(x_1^2 + x_2^2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$.

La mariposa:

Potencial: $L_p(x) = x^6 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x$.

El champiñón u ombligo parabólico:

Potencial: $M_p(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^4 + p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + p_3 x_1 + p_4 x_2$.

Estas formas vienen a enriquecer la lista de las formas simples de la geometría elemental tradicional.
La teoría de las catástrofes generales ambicione vincularse a la descripción de las formas y a situaciones naturales más complejas: forma de nubes, grietas de una vieja pared, espuma sobre la cerveza, etc.
La teoría de las catástrofes parece capaz de intervenir en numerosas disciplinas. En la hora presente se la encuentra en geología, en mecánica aplicada, en hidrodinámica, en óptica geométrica, en fisiología, en biología, en lingüística. Su extensión a las ciencias humanas por Zeeman es objeto de polémicas.

## Catastrófico

• *Punto catastrófico.* — V. CATÁSTROFES.

## Categoría

Una categoría $\mathscr{C}$ consta de:
1) de dos clases, una llamada de los objetos, otra llamada de los morfismos de $\mathscr{C}$;
2) para todo par (X, Y) de objetos de la categoría, de un conjunto denotado $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ o $\mathrm{Hom}(X, Y)$, llamado de los morfismos de X hacia Y, tal que $\mathrm{Hom}(X, Y)$ y $\mathrm{Hom}(X', Y')$ sean disjuntos salvo si $X = X'$ e $Y = Y'$;
3) para todo triplete (X, Y, Z) de objetos de la categoría, de una aplicación de $\mathrm{Hom}(Y, Z) \times \mathrm{Hom}(X, Y)$ en $\mathrm{Hom}(X, Z)$, llamada composición de los morfismos, denotada por $(f, g) \mapsto g \circ f$, donde $g \circ f$ es llamado el morfismo compuesto de $f$ de $g$, y que verifica dos condiciones:

a) cuando las composiciones tienen un sentido: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
b) para todo objeto X existe un morfismo, denotado por $\mathrm{id}_X$, llamado identidad de X y tal que, cuando las composiciones tienen un sentido: $\mathrm{id}_X \circ f = f$ y $g \circ \mathrm{id}_X = g$.

Por ejemplo, para la categoría TOP de los espacios topológicos, los objetos son los espacios topológicos; los morfismos, las aplicaciones continuas, y la composición de los morfismos, la composición de las aplicaciones.
Ejemplos más usuales:

| *Terminología* | *Notación* | *Objetos* | *Morfismos* |
|---|---|---|---|
| Conjuntos | Cto | Los conjuntos | Las aplicaciones |
| Grupos | Gr | Los grupos | Los homomorfismos de grupos |
| Grupos abelianos | Ab | Los grupos conmutativos | Los homomorfismos de grupos |
| Espacios topológicos | Top | Los espacios topológicos | Las aplicaciones continuas |
| A-módulos | Mod(A) | Los A-módulos | Las aplicaciones A-lineales |

Sea $u \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Los objetos X e Y son llamados, respectivamente, original y final del morfismo $u$ y entonces se escribe $u: X \to Y$, aunque $u$ no sea necesariamente una aplicación (V. CONCRETO, DUAL, EPIMORFISMO, FUNTOR, ISOMORFISMO, MONOMORFISMO).

## Categorías

• *Teoría de las categorías.* — Teoría introducida hacia 1940 por Eilenberg y Mac Lane como útil y lenguaje indispensables en dominios avanzados, sobre todo en topología algebraica, luego en geometría algebraica, donde los problemas se expresan principalmente en términos de funtores entre ciertas categorías de morfismos funtoriales, de problemas universales, de funtores adjuntos, etc.

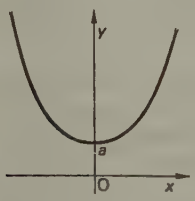
## Categórica

• *Teoría categórica.* — (Lógica.) Una teoría matemática es categórica si, para toda proposición P de esta teoría, una de las dos proposiciones P y (no-P) es un teorema de esa teoría.

## Catenaria

De *catena:* cadena. Antiguo nombre de la *cadeneta.*

Curva que tiene por ecuación cartesiana en un sistema de referencias ortonormado $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{b}$, así llamada porque proporciona la configuración de un hilo pesado de longitud dada cuyas extremidades están unidas a dos puntos fijos. V. CATENOIDE, TRACTRIZ.




## Catenoide

Superficie de revolución engendrada por una catenaria que gira alrededor de su eje de simetría.

**Catetos**

Lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo.

## Cauchy, Agustin-Louis (1789-1857)

Debido a la abundancia de trabajos de Cauchy, en el momento en que el análisis escapaba del dominio de la intuición geométrica para descubrir el rigor matemático, numerosos teoremas, criterios, nociones diversas llevan su nombre. No citamos más que los más conocidos y los más elementales.

• *Condición de Cauchy para una sucesión.* — Una sucesión $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de números reales [resp. complejos] converge en $\mathbf{R}$ [resp. en $\mathbf{C}$] si y solamente si verifica la condición de Cauchy: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $m > n \geqslant n_0$ entraña $|u_m - u_n| \leqslant \varepsilon$. En otros términos, $\mathbf{R}$ y $\mathbf{C}$, en tanto que espacios normados, son espacios de Banach. Esta condición es frecuentemente denominada criterio de convergencia de Cauchy para las series numéricas.

• *Condiciones de Cauchy.* — Una función compleja de dos variables reales $f:(x, y) \mapsto P(x, y) + iQ(x, y)$ verifica las condiciones de Cauchy si las derivadas parciales de las funciones reales P y Q existen y verifican:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Se muestra que $f$ es analítica sobre un abierto D de $\mathbf{R}^2$ si y solamente si las derivadas parciales de P y Q son continuas y verifican las condiciones de Cauchy en D.

• *Conjeturas de Cauchy-Euler.* — Todo poliedro de caras rígidas es inflexible. Fue refutada por Connelly en 1978.
V. CONNELLY.

• *Criterio de convergencia de Cauchy para una serie $\Sigma u_n$ de términos en un espacio de Banach.* — Esta serie converge si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ y $p \geqslant 0$:

$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| \leqslant \varepsilon.$$

• *Criterio de convergencia de Cauchy para una sucesión $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en términos en un espacio de Banach.* — Esta sucesión converge si y solamente si es una sucesión de Cauchy.

• *Criterio de convergencia uniforme de Cauchy.* — Nombre particular dado a todo criterio de convergencia de Cauchy en un espacio funcional provisto de la norma de la convergencia uniforme.

• *Criterio de sumabilidad de Cauchy.* — Una familia $(u_i)_{i\in I}$ de números complejos es sumable si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe una parte finita J de I tal que para toda parte finita K de I disjunta con J se tenga $\left|\sum_{i\in K} u_i\right| \leqslant \varepsilon$.

• *Desigualdad de Cauchy.* — Sea $f$ una función holomorfa en un disco abierto $D = D(O, R)$ de C. Sea: $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ el desarrollo de $f$ en serie entera en D, sea $0 \leqslant r < R$ un número real y $M(r)$ el máximo de $|f(z)|$ para $|z| = r$. Las desigualdades de Cauchy afirman que para todo $n \geqslant 0$ tenemos:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

• *Desigualdad de Cauchy-Schwarz.* — Afirma que si $\varphi$ es un producto escalar sobre un espacio vectorial real E, tenemos por todo elemento $(x, y)$ de $E^2$:

$$[\varphi(x, y)]^2 \leqslant \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y).$$

En particular, en $\mathbf{R}^3$, tenemos $|\vec{V} \cdot \vec{W}|^2 \leqslant |\vec{V}|^2 |\vec{W}|^2$. En $\mathbf{R}^n$, si $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$ son dos $n$-uplos de reales:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

En el espacio hilbertiano $l^2_{\mathbf{R}}$ de las series reales $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tales que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge tenemos: $\left(\sum_{n\geqslant 0} |a_n b_n|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n^2\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n^2\right)$ para todas las series $(a_n)_{n\geqslant 0}$ y $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de $l^2_{\mathbf{R}}$.

Si $f$ y $g$ son funciones reales continuas sobre $[\![a, b]\!]$:

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right).$$

• *Fórmula integral de Cauchy.* — Sean $f$ una función holomorfa sobre un abierto D de C, un punto $a \in D$ y $\gamma$ un camino cerrado de D que no pasa por $a$ y homótopo a un punto en D. La fórmula integral de Cauchy permite calcular el índice $I(\gamma, a)$ de $\gamma$ en el punto $a$:

$$f(a) \cdot I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

• *Ley de Cauchy.* — Ley de Student con 1 grado de libertad. La densidad de probabilidad de una variable aleatoria que sigue la ley de Cauchy es:

$$q(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

• *Plano de Argand-Cauchy.* — Plano complejo.

• *Problema de Cauchy.* — Sean $n > 0$ un entero, $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ un abierto, $f_1, \ldots, f_n$ de las funciones reales continuas en D y

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \ldots, x_n) \\ x'_2 = f_2(t, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

un sistema de $n$ ecuaciones diferenciales del primer orden en un abierto I de R. Dado $(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in D$, el problema de Cauchy consiste en buscar $n$ funciones reales $t \mapsto u_i(t)$ derivables sobre I, tales que:

$$(t, u_1(t), \ldots, u_n(t)) \in D \quad \text{para todo } t \in I,$$

solución del sistema dado y que verifica la *condición inicial* $u_i(t_0) = x_{0i}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$.

Se definen de igual forma los problemas de Cauchy mediante ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, hallar una solución de la ecuación de las cuerdas vibrantes que corresponden a condiciones iniciales dadas:

$u_0(x) = u(x, 0)$ : forma de la cuerda en el instante $t = 0$;

$u_1(x) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$: distribución de las velocidades $\partial u/\partial t$ a lo largo de la cuerda en el instante $t = 0$.

• *Producto de Cauchy de dos series numéricas* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ y $\sum_{n\geqslant 0} v_n$. — Serie: $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ donde $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.

V. CAUCHY (Teoremas de), MERTENS (Teorema de).

• *Regla o criterio de convergencia para una serie* $\Sigma u_n$ *en términos reales positivos.* — Si la serie $\sqrt[n]{u_n}$ admite un límite $\lambda$ finito o no cuando $n$ tiende hacia el infinito, y si $\lambda < 1$ [resp. $\lambda > 1$], la serie es convergente [resp. divergente]. Este criterio no permite concluir si $\lambda = 1$. Dada una serie $\Sigma u_n$ de términos complejos, al aplicarlo a la serie $\Sigma|u_n|$ proporciona una regla de convergencia absoluta.

• *Sucesión de Cauchy de un espacio métrico* (E, $d$). — Una sucesión $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de E es de Cauchy si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $p > q \geqslant n_0$ implica $d(u_0, u_q) \leqslant \varepsilon$. Toda sucesión convergente es de Cauchy. La recíproca no es cierta si el espacio no es completo.

• *Teoremas de Cauchy.*

1) Si $f$ es una función holomorfa en un abierto D de C entonces la forma diferencial $f(z)\,dz$ es cerrada en D. Si el abierto D es simplemente conexo $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para todo lazo $\gamma$ contenido en D.

2) Principio del máximo: si una función $f$ no constante es holomorfa en un dominio limitado D de C y sobre la frontera $\Gamma$ de D, el máximo del módulo de $f(z)$ en $D \cup \Gamma$ es alcanzado en un punto de $\Gamma$.

3) El producto de Cauchy de dos series numéricas absolutamente convergentes y de sumas U y V es una serie absolutamente convergente de suma UV.
4) Un poliedro convexo de caras rígidas es inflexible (1813) (V. CONNELLY).

• *Teorema de Cauchy-Arzéla.* — Sea $f:(x, y) \mapsto f(x, y)$ una función numérica continua sobre un abierto D de $\mathbf{R}^2$. Si la derivada parcial $\partial f/\partial y$ existe y está acotada en D, entonces $f$ es lipschitziana en $y$.

• *Valor principal de Cauchy de una función real definida sobre* $[a, b]$ *e integrable sobre* $[a, c[\ \cup\ ]c, b]$. — Límite, si existe, de $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ cuando $\varepsilon$ tiende hacia cero. Se la denota $\text{vp} \int_a^b f(x)\,dx$. Por ejemplo, para $a < 0 < b$ tenemos: $\text{vp} \int_a^b \frac{dx}{x} = \text{Log} \left|\frac{b}{a}\right|$.

## Causas

• *Fórmula de probabilidad de las causas.* — Fórmula de Bayes.

## Cáustica

(Optica matemática.) Superficie tangente al conjunto de los radios luminosos salidos de un punto objeto. La etimología de esta palabra (que «puede hacer arder») recuerda que ese fenómeno se traduce por una acumulación de luz. La cáustica por reflexión de un círculo es la desarrollable de un caracol de Pascal.

## Cayley, Arthur (1821-1895)

• *Absoluto de Cayley.* — V. CAYLEY (Geometrías de).

• *Algebra de los octoniones de Cayley.* — Sea $\{1, i, j, k\}$ la base canónica sobre $\mathbf{R}$ del álgebra de los cuaterniones de Hamilton. Se llama álgebra de los octoniones de Cayley la $\mathbf{R}$-álgebra de dimensión 8 denotada $\mathbf{O}$, que tiene por base $e_0 = (1, 0); e_1 = (i, 0); e_2 = (j, 0); e_3 = (k, 0); e_4 = (0, 1); e_5 = (0, i); e_6 = (0, j); e_7 = (0, k)$. Se observa que $e_i^2 = -e_0$ para $i = 1, \ldots, 7$ y que $e_i e_j = -e_j e_i$ para $1 \leqslant i < j \leqslant 7$.
Esta álgebra no es ni asociativa ni conmutativa; su centro es $\mathbf{R}$. Es alternativa y con división; todo octonión no nulo: $x = \sum_{i=0}^{7} \alpha_i e_i$, con $\alpha_i \in \mathbf{R}$ admite un inverso dado por: $x^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{7} \alpha_i^2\right)\left(\alpha_0 e_0 - \sum_{i=1}^{7} \alpha_i e_i\right)$. Los octoniones de Cayley se utilizan en mecánica cuántica. Se puede definir una noción más general de álgebra de octoniones.
V. ALTERNATIVA (Algebra), DIVISIÓN (Algebra de).

• *Geometrías de Cayley.* — Geometrías derivadas de la geometría proyectiva, obtenidas considerando sobre $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ el sub-grupo del grupo de las homografías sobre $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ que dejan invariante una cuádrica, llamada absoluta de Cayley. Si la cuádrica tiene por ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$, esta geometría es

equivalente a la geometría de Riemann, también llamada elíptica. Si la cuádrica tiene por ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$, la geometría obtenida es equivalente a la geometría de Lobatchevski, también llamada hiperbólica. No se clasifica generalmente entre las geometrías cayleyanas la geometría euclídea, que es equivalente a la geometría derivada de la geometría proyectiva, en la que se considera el sub-grupo del grupo de las homografías sobre $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ que dejan invariante no una cuádrica, sino el círculo del infinito de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ situado en el plano del infinito $t = 0$.

• *Número, octonio u octava de Cayley.* — Elemento del álgebra de octoniones de Cayley.

• *Superficie de Cayley.* — Sean $\Gamma$ una cónica propia y $\Delta$ una recta no situada en el plano de $\Gamma$ y que encuentra $\Gamma$ en un punto O. El lugar de una recta G que encuentra a $\Delta$ y a $\Gamma$, respectivamente, en dos puntos A y B que se corresponden homográficamente de forma que O no sea el punto doble de las divisiones descritas por A y B es una superficie llamada de Cayley. Es una superficie reglada del tercer orden que admite $\Delta$ como recta doble.

• *Teorema de Cayley-Hamilton.* — Sea E un espacio vectorial de dimensión finita no nula sobre un cuerpo K; todo endomorfismo $f$ de E anula su polinomio característico P, es decir, que $P(f) = 0$. Asimismo, toda matriz cuadrada de coeficientes en K anula su polinomio característico.

## Cayleyanas

• *Geometrías cayleyanas.* — Geometrías de Cayley.

## Čech, Eduard (1893-1960)

• *Compactificado de Stone-Čech.* — V. STONE.

## Célula

Una célula o $n$-célula cerrada [resp. abierta] de $\mathbf{R}^m$ es una parte de $\mathbf{R}^m$ homeomorfa al conjunto de los $(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1 \text{ [resp. } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\text{]}.$$

Una 1-célula es homeomorfa a un intervalo.

## Celular

• *Representación celular de un grafo.* — La representación de un grafo en una superficie se llama celular si sus caras son abiertos homeomorfos a un disco del plano.

## Celulariamente

• *Grafo representable celulariamente.* — Grafo que admite una representación celular.

## Centi

V. MÚLTIPLE.

## Centiles

V. CUANTILES.

## Centrado/a

• *Estimador bien (resp. mal) centrado.* — Se dice que un estimador está bien centrado o sin sesgo si su esperanza matemática es igual al valor del parámetro a estimar. En caso contrario se dice que está mal centrado, sesgado o con sesgo.

• *Variable aleatoria centrada.* — Variable aleatoria cuya esperanza matemática es nula. Es el caso de la variable aleatoria $X - E[X]$, donde X es una variable aleatoria cualquiera y $E[X]$ su esperanza matemática; $X - E[X]$ se llama variable aleatoria centrada asociada a X. Si además la desviación típica es igual a 1 se dice que es centrada reducida o también que es reducida.

## Central

• *Eje central de un torsor cuya resultante no es nula.* — Recta definida como el lugar de los puntos para los que el momento del torsor es colineal con la resultante.

• *Elemento central de un magma.* — Elemento de su centro.

• *Momento central de orden* $r \in \mathbb{N}^*$ *de un carácter cuantitativo* X *que toma los valores* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. — Número real $\mu_r$ definido por:

$$\mu_r = (x_1 - \overline{X})^r f_1 + (x_2 - \overline{X})^r f_2 + \cdots + (x_n - \overline{X})^r f_n$$

donde $\overline{X}$ es la media de X y $f_i$ la frecuencia del valor tomado $x_i$. El momento central de orden 2 es la varianza de X.

• *Momento central de orden* $r \in \mathbb{N}^*$ *de una variable aleatoria discreta* X. — Sean $E[X]$ la esperanza matemática de X y $p_i$ la probabilidad para que X tome el valor $x_i$. Si la familia es sumable, se dice que X admite un momento central de orden r, denotado $\mu_r$ y definido por:

$$\mu_r = \sum_{i \in I} (x_i - E[X])^r p_i.$$

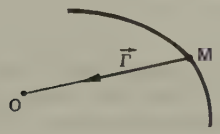
El momento central de orden 2 es la varianza de X.

• *Momento central de orden* $r \in \mathbf{N}^*$ *de una variable aleatoria absolutamente continua* X. — Número real $\mu_r$ definido, cuando existe, por la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathrm{E}[X])^r \cdot f(t)\, dt$$

donde E[X] es la esperanza matemática de X y $f(t)$ la densidad de probabilidad de X en $t$. El momento centrado de orden 2 es la varianza de X.

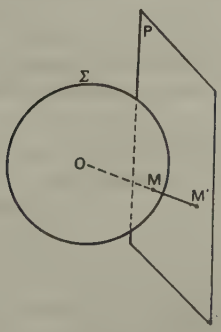
• *Movimiento de aceleración central.* — Movimiento de un móvil puntual M tal que el soporte del vector aceleración en M pase constantemente por un punto fijo O.




La trayectoria es plana y la velocidad areolar de M con relación a O es constante.

• *Proyección central en un espacio proyectivo* P(E) *de dimensión finita.* — Sean C y D dos sub-espacios proyectivos suplementarios de P(E). Se llama proyección central de P(E) sobre D de centro C a la aplicación proyectiva definida por $x \mapsto \mathrm{D} \cap \mathrm{V}(x, \mathrm{C})$, donde $\mathrm{V}(x, \mathrm{C})$ es el sub-espacio proyectivo engendrado por $\mathrm{C} \cup \{x\}$.

• *Proyección central en* $\mathbf{R}^3$. — Sean P un plano de $\mathbf{R}^3$, O un punto que no pertenece a P, y P′ el plano que pasa por O y es paralelo a P. Se llama proyección central de centro O sobre P a la aplicación de $\mathbf{R}^3 - \mathrm{P}'$ sobre P que en M asocia el punto de intersección de OM con el plano P.



• *Proyección central de una esfera* Σ *de centro* O *sobre un plano* P *tangente a la esfera.* — Sea Γ la intersección de Σ con el plano que pasa por O y paralelo a P. Se llama proyección central de Σ sobre P a la aplicación de $\Sigma - \Gamma$ sobre P que en $M \in \Sigma - \Gamma$ asocia la intersección M' de la recta OM con P.

• *Simetría central.* — Simetría con relación a un punto.
V. SIMETRÍA.

• *Teorema central del límite o teoremas centrales del límite.* — Teoremas que expresan bajo hipótesis más o menos restrictivas la propiedad general siguiente: la ley de una suma de un gran número de variables aleatorias independientes se acerca a la ley de Laplace-Gauss. Permiten comprender por qué, en numerosas aplicaciones del cálculo de probabilidades, se encuentran leyes próximas a la ley de Laplace-Gauss. Sean $(X_i)_{i \in N^*}$ variables aleatorias mutuamente independientes, de igual ley de probabilidad, que admiten una esperanza matemática y una desviación típica y sea:

$$Y_n^* = \frac{Y_n - E[Y_n]}{\sigma[Y_n]}$$

la variable aleatoria reducida asociada a la variable $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Desde estas hipótesis, el teorema central del límite afirma que la sucesión $(Y_n^*)$ converge en ley hacia una variable normal reducida.
V. MOIVRE-LAPLACE.

## Centrales

• *Teoremas centrales limitados.* — V. CENTRADO (Teoremas del límite).

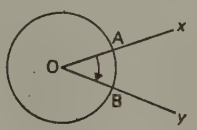
## Centralizador

Dado un elemento $x$ [resp. una parte E] de un grupo G, se llama centralizador de $x$ [resp. de E] al sub-grupo de G formado por los elementos que conmutan con $x$ [resp. con todos los elementos de E]. Es una generalización de la noción de centro.

## Centro

V. CÍRCULO, CIRCUNFERENCIA, CURVATURA, ESFERA, GRAVEDAD, HOMOLOGÍA, HOMOTECIA, INERCIA, INSTANTÁNEO, INVERSIÓN, RADICAL, ROTACIÓN, SEMEJANZA, SIMETRÍA.

• *Angulo central.* — Dado un círculo de centro O, se llama ángulo central un ángulo $(\overset{\frown}{Ox, Oy})$ de semirrectas de origen O.
V. INSCRITO (Angulo).



• *Centro de un cuerpo* K. — Centro de K para la multiplicación.

• *Centro de un magma* (E, $*$). — Subconjunto $\Gamma$ formado por los elementos que permutan con todos los elementos de E. Por tanto, $x \in \Gamma$ si y solamente si para todo $y \in E$ tenemos $x * y = y * x$. Si E es un grupo, $\Gamma$ es un sub-grupo distinguido en E (V. CENTRALIZADOR).

• *Centro de una aplicación lineal proyectiva.* — V. PROYECTIVA.

• *Centro de una bola cerrada o abierta.* — V. BOLA.

• *Centro de una figura.* — Centro de simetría de esa figura si es que posee uno.

• *Centro de una proyección central.* — V. CENTRAL.

• *Centro de simetría de una figura.* — Punto O (si existe) tal que la simetría con relación a O deja a esa figura globalmente invariante.

• *Cónicas de centro.* — Nombre dado a las elipses y a las hipérbolas que son las únicas cónicas propias que admiten un centro de simetría.

• *Cuádricas de centro.* — Nombre dado a los elipsoides y a los hiperboloides que son las únicas cuádricas propias que admiten un centro de simetría.

## Cero

Cardinal del conjunto vacío, es el único elemento de N sin predecesor. Se escribe 0. También es el ordinal más pequeño. Se llama a menudo cero al elemento neutro de un grupo cuya ley se nota aditivamente.

La introducción del cero en la numeración ha permitido progresos considerables en cálculo numérico (sobre todo en los cálculos ténicos y en contabilidad comercial). Es el común múltiplo más pequeño para todos los enteros, propiedad utilizada por Hilbert para simplificar las demostraciones de Hermite y de Lindemann de la transcendencia de $e$ y de $\pi$.

• *Cero de una función analítica.* — Dada una función $f$ analítica sobre un abierto D, se llama cero de $f$ a un punto $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$. En el entorno de $z_0$, la función $f$ se escribe $f(z) = (z - z_0)^n \, g(z)$ donde $g$ es una función analítica que no se anula en $z_0$ y donde $n$ es un entero llamado orden de multiplicidad de $z_0$.

• *Cero de un polinomio.* — Sinónimo de raíz de este polinomio.

• *Divisor de cero a la izquierda (resp. a la derecha) en un anillo* A. — Elemento $a \in A$ tal que existe $b \in A^*$ verificando $ab = 0$ (resp. $ba = 0$). En $M_2(R)$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$ la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un divisor de cero a la izquierda y la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un divisor de cero a la derecha.

• *Divisor de cero en un anillo* A. — Divisor de cero a la derecha y a la izquierda.

## Ceros

• *Teorema de los ceros de Hilbert.* — V. HILBERT.

## Cerrada

V. BOLA, CÉLULA, CORONA.

• *Aplicación cerrada.* — V. ABIERTA.

• *Curva cerrada.* — Empleada para camino cerrado, también llamado lazo. V. LAZO, SIMPLE.

• *Forma diferencial cerrada.* — Sea U un abierto de un espacio de Banach E. Una $p$-forma diferencial $\omega$ definida en U es cerrada si su diferencial exterior $d\omega$ es nula. Una 1-forma diferencial $\omega$ en U es cerrada si todo punto $x_0$ de U posee un entorno abierto V en el cual $\omega$ admite una primitiva.

• *Parte cerrada de un espacio topológico* E. — Sinónimo de cerrado del espacio topológico. Una parte cerrada es igual a su adherencia.

• *Parte de un conjunto* E *cerrado con relación a una ley de composición interna sobre* E. — Sinónimo de parte estable.

• *Parte localmente cerrada de un espacio topológico.* — Intersección de un abierto y un cerrado de este espacio.

• *Relación de equivalencia cerrada.* — V. ABIERTA.

• *Sección inicial cerrada.* — V. INICIAL.

• *Sección final cerrada.* — V. FINAL.

• *Superficie cerrada.* — Sinónimo de superficie clausa.

• *Superficie cerrada o superficie clausa.* — Se llama superficie cerrada o superficie clausa a un espacio topológico compacto y conexo cada uno de cuyos puntos posee un entorno abierto homeomorfo a un disco abierto de $\mathbf{R}^2$. Ejemplos: una esfera, una botella de Klein, un toro.
V. GÉNERO.

## Cerrado

V. ANGULAR (Sector), SEMIESPACIO, SEMIPLANO, DISCO, PAVIMENTO, POLIDISCO.

• *Camino cerrado.* — Sinónimo de Lazo.

• *Cerrado de un espacio topológico* E. — Complementario en E de un abierto de E. Esta noción es fundamental en topología. Se puede definir la noción de

espacio topológico tanto a partir de la noción de cerrado como a partir de la noción de abierto o de entorno.
V. CERRADA (Parte), CERRADOS, TOPOLOGÍA.

• *Cuerpo algebraicamente cerrado.* — V. ALGEBRAICAMENTE.

• *Intervalo cerrado a la derecha y abierto a la izquierda.* — V. ABIERTO.

• *Intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha.* — V. ABIERTO.

• *Intervalo cerrado de un conjunto ordenado* E. — Sean $a$ y $b$ dos elementos de E tales que $a \leqslant b$. El conjunto $(a, b]$ de los elementos $x$ de E tales que $a \leqslant x \leqslant b$ es un intervalo llamado intervalo cerrado de extremos $a$ y $b$.

• *Teorema del grafo cerrado.* — Dados dos espacios de Banach E y F, una aplicación lineal $f$ de E en E es continua si y sólo si su grafo es un cerrado del producto topológico E × F.

• (Lógica.) *Término cerrado.* — Término sin variable.

## Cerrados

• *Axiomas de los cerrados.* — Una topología sobre un conjunto E puede definirse dando un conjunto $\mathcal{F}$ de partes de E que satisfacen a los axiomas de los cerrados.
$[F_1]$ La intersección de toda familia de elementos de $\mathcal{F}$ es un elemento de $\mathcal{F}$.
$[F_2]$ La reunión de dos elementos de $\mathcal{F}$ es un elemento de $\mathcal{F}$.
$[F_3]$ La parte vacía y E son elementos de $\mathcal{F}$.
V. TOPOLOGÍA.

## César, Ernesto (1859-1906)

• *Convergencia en el sentido de César de una serie.* — Una serie $\Sigma u_n$ converge en el sentido de César (o en media) hacia $\sigma$ si la sucesión $(s_n)$ de sus sumas parciales converge en el sentido de César hacia $\sigma$. Se dice entonces que $\sigma$[resp. $\sigma_n = \frac{1}{n}(s_0 + s_1 + \ldots + s_n)$] es la suma [resp. la $n$-ésima suma parcial] de César o de César-Féjer de la serie $\Sigma u_n$. La serie $\Sigma(-1)^n$, aunque divergente, converge en el sentido de César hacia 1/2. Esta definición de la suma de una serie divergente es regular.
V. FÉJER, REGULAR.

• *Convergencia en el sentido de César de una sucesión.* — Una sucesión $(u_n)$ converge en el sentido de César (o en media) hacia $\sigma$ si la sucesión $(\sigma_n)_{n \geqslant 1}$ definida por:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)$$

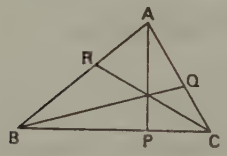
converge hacia $\sigma$. Los términos $\sigma_n$ son denominados sumas de César de la sucesión $(u_n)$. La sucesión $(-1)^n$, aunque divergente, converge en el sentido de César hacia 0.

• *Sumas de Césaro.* — V. CÉSARO (Convergencia en el sentido de).

## Céva, Giovanni (o Juan) (1648-1734)

• *Teorema de Céva.* — Dados tres puntos P, Q, R, respectivamente, sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, una condición necesaria y suficiente para que las rectas AP, BQ y CR sean concurrentes es que:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \times \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \times \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$




## Ceviana

Recta que pasa por el vértice de un triángulo. Las medianas, las alturas y las bisectrices son cevianas particulares.

## Cíclico

• *Grupo cíclico.* — Grupo monógeno finito; a veces sinónimo de grupo monógeno. Todo grupo cíclico de orden $n$ es isomorfo en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

## Cíclicos

• *Puntos cíclicos.* — Sea $\hat{\mathbf{R}}^2$ el completado proyectivo del plano afín $\mathbf{R}^2$. Los dos puntos de $\hat{\mathbf{R}}^2$ cuyas coordenadas homogéneas $(x, y, t)$ verifican las ecuaciones $X^2 + Y^2 = 0$ y $T = 0$ son imaginarios y se llaman puntos cíclicos. Habitualmente se los denota $I(i, 1, 0)$ y $J(i, -1, 0)$. A veces se dice que éstos son los «puntos de intersección» de un círculo con la recta del infinito.

## Cíclido

• *Cíclido de Dupin.* — V. DUPIN.

## Ciclo

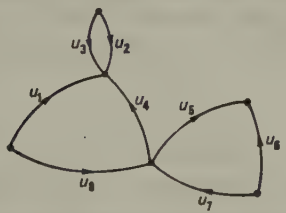
Permutación $\sigma \in S_n$ de la forma

$$\begin{cases} \sigma(i) = i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k \text{ o si } h+1 \leqslant i \leqslant n \\ \sigma(i) = i+1 & \text{si } k+1 \leqslant i \leqslant h-1 \\ \sigma(h) = k+1 \end{cases}$$

donde $k$ y $h$ son dos enteros tales que $0 \leqslant k < h \leqslant n$. Para el ciclo descrito inmediatamente $k = 1$ y $h = 5$:

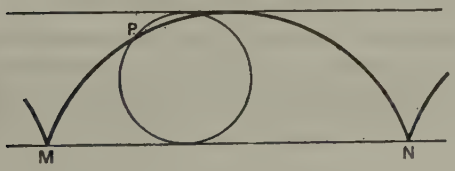
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & n \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 7 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

• (Grafos.) *Ciclo en un grafo.* — Cadena $u_1, u_2, \dots, u_q$, donde los arcos $u_i$ son distintos y tal que el extremo de $u_1$ no común con $u_2$ coincide con el extremo de $u_q$ no común con $u_{q-1}$.
V. ELEMENTAL, EULERIANO, HAMILTONIANO, LONGITUD.




## Cicloide

Lugar geométrico de un punto P de un círculo de radio R rodando sin deslizarse sobre una recta D. Es una curva tautócrona, braquistócrona e isócrona; admite una infinidad de puntos de retroceso situados sobre la recta D y puede ser definida paramétricamente por las ecuaciones $x = R(t - \operatorname{sen} t)$ e $y = R(1 - \cos t)$. El área de un arco es $3\pi R^2$ y su longitud $8R$.
V. ALARGADA, CICLOIDES, REDUCCIÓN.




## Cicloides

Familia de curvas engendradas por un punto del plano de un círculo que gira sin deslizamientos sobre una recta o sobre otro círculo. Son ruletas. Se distingue la cicloide propiamente dicha, las epicicloides, las hipocicloides, las cicloi-

des alargadas o reducidas, así como las epitrocoides y las hipotrocoides. Estas diversas curvas se llamaban antiguamente trocoides.

V. ALARGADA, EPICICLOIDE, EPITROCOIDE, HIPOCICLOIDE, HIPOTROCOIDE, REDUCIDA.

## Ciclomático

• *Número ciclomático de un grafo* G. — El entero $\gamma(G) = m - n + p$, donde $m$ es el número de arcos, $n$ el número de vértices y $p$ el número de componentes conexos del grafo. Verifica con el número cociclomático $\lambda(G)$ la relación $\lambda(G) + \nu(G) = m$.

## Ciclos

Dado un complejo de cadenas M: ... $M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \to$ ... se llama ciclos a los elementos de Ker $\partial_n$. Para todo $n \in \mathbf{Z}$, forman un sub-módulo de $M_n$; es el $n$-ésimo módulo de los ciclos, denotado $Z_n(M)$.
V. BORDES, COCICLOS, HOMOLOGÍA.

## Ciclotómico

• *Polinomio ciclotómico de índice n.* — Polinomio

$$\Phi_n(X) = (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_k)$$

donde $x_1, x_2, \dots, x_k$ son las $k$ raíces primitivas $n$-ésimas de la unidad en el cuerpo de los números complejos. Tenemos $k = \varphi(n)$ (indicador de Euler). Los polinomios $\Phi_n$ tienen sus coeficientes en $\mathbf{Z}$, son irreductibles sobre $\mathbf{Q}$ y verifican $X^n - 1 = \prod_{d/n} \Phi_d$. Por ejemplo:

$$\Phi_4(X)^2 = X^2 + 1; \quad \Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

y $$\Phi_{18}(X) = X^6 - X^3 + 1.$$

Estos polinomios deben su nombre al problema de la división del círculo en $n$ partes iguales que equivale a la resolución de la ecuación $\Phi_n(x) = 0$.

• *Cuerpo o extensión ciclotómica de índice n.* — Cuerpo de dislocación del polinomio ciclotómico $\Phi_n$. Se lo denota $\mathbf{Q}_n$ o $\mathbf{Q}(\zeta_n)$ con $\zeta_n$ raíz primitiva $n$-ésima de 1 en C. Tenemos $[\mathbf{Q}_n : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$. Por ejemplo, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}(i)$ y $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}(j)$.
• *Entero ciclotómico.* — Elemento de un cuerpo ciclotómico entero sobre $\mathbf{Z}$.

## Cierre

• *Aplicación de cierre.* — Aplicación $f$ de un conjunto ordenado E en sí mismo que es creciente [$x \leqslant y$ entraña $f(x) \leqslant f(y)$], extensiva [$x \leqslant f(x)$] e idempotente [$f(f(x)) = f(x)$]. Sean E un espacio topológico y (E) el conjunto de sus partes ordenado por la inclusión. La aplicación de (E) en (E) definida por $A \mapsto \bar{A}$ donde $\bar{A}$ es el adherente de A es una aplicación de cierre.

• *Cierre algebráico de un cuerpo.* — V. ALGEBRÁICO.

• *Cierre convexo de una parte A de un espacio afín* E. — V. CONVEXO.

• *Cierra de una parte A de un espacio topológico.* — Cerrado más pequeño $\overline{A}$ conteniendo a A. Es igual al adherente de A.

• *Cierre transitivo de un grafo.* — V. TRANSITIVO.

## Cifra

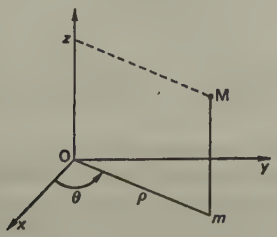
Carácter (símbolo escrito) utilizado para representar ciertos números. Las cifras usuales son las cifras romanas (I, V, X, L, C, D, M) y las cifras árabes (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Por abuso de lenguaje algunos dicen que 125 es una cifra.
Las cifras, cuando están confundidas con los números que representan, han sido a veces objeto de consideraciones religiosas y metafísicas que siembran la confusión sobre su naturaleza matemática. Para el matemático, las cifras 2 y 5 no tienen ninguna propiedad, lo mismo que la letra $x$ o la letra E; son los números *dos* y *cinco* que poseen propiedades matemáticas.
V. ARABES, NUMERACIÓN, ROMANOS.

## Cilíndrica

• *Superficie cilíndrica.* — Sinónimo de cilindro.

## Cilíndricas

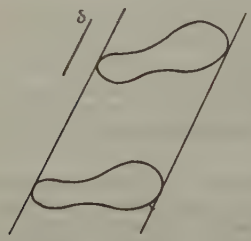
• *Coordenadas cilíndricas de un punto* M *de* $\mathbf{R}^3$ *en un sistema cartesiano ortonormado* (O, $x$, $y$, $z$). — Triplete ($\rho$, $\theta$, $z$), donde $z$ es la cota de M y ($\rho$, $\theta$) las coordenadas polares en el sistema de referencias (O, O$x$) de la proyección $m$ de M sobre el plano $xOy$.



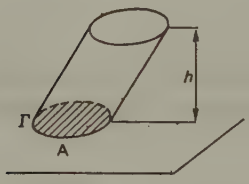

## Cilindro

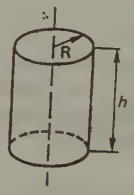
Superficie reglada cuyas generatrices tienen una dirección fija $\delta$. Un cilindro está perfectamente determinado por la dirección de sus generatrices y una

curva de su superficie que encuentra a todas las generatrices llamada una directriz del cilindro. Una propiedad característica del cilindro es ser una superficie invariante para toda traslación de dirección $\delta$. La ecuación $f(x, y) = 0$, donde $f$ es una función cualquiera, es la ecuación cartesiana de un cilindro cuyas generatrices tienen la dirección del eje Oz.
V. CIRCUNSCRITO, ELÍPTICO, HIPERBÓLICO, PARABÓLICO, REVOLUCIÓN.




• (Usual.) *Cilindro de altura h.* — Sólido limitado por un cilindro y dos planos paralelos, distantes de $h$, cuyas intersecciones con el cilindro son dos curvas cerradas llamadas bases. Su volumen es $Ah$, donde A es el área de una base. En el caso en que el cilindro sea de revolución y en que las bases sean círculos de radios R perpendiculares al eje de revolución, el volumen del sólido es $\pi R^2 h$ y el área lateral $2\pi Rh$.




## Cinemática

Rama de la mecánica que estudia los movimientos sin interesarse en las causas que los producen ni en la naturaleza de los móviles. Se distingue la cinemática del punto que introduce las nociones de trayectoria, velocidad y aceleración y la cinemática del sólido, que se interesa en la repartición de las velocidades de diferentes puntos del sólido móvil. El estudio de un punto móvil es esencialmente el estudio matemático de un punto de $\mathbf{R}^3$ cuyas coordenadas en un sistema de referencia dependen de un parámetro $t$ (el tiempo). Por consiguiente, el vocabulario de la cinemática del punto se define inmediatamente a partir de conceptos matemáticos.
V. DINÁMICA.

## Cinética

• *Energía cinética.* — La energía cinética de un móvil puntual M de masa $m$ y de velocidad $v$ es el número $C = \frac{1}{2}mv^2$. La energía cinética de un sistema de puntos materiales es la suma de las energías cinéticas de cada punto. Se demuestra que el incremento de la energía cinética de un sistema es igual a la suma de los trabajos de todas las fuerzas que actúan sobre sus puntos.

• *Momento cinético.* — El momento cinético de un móvil puntual de masa $m$ es el vector $\overrightarrow{OM} \wedge m\overline{V}$, momento en O de la cantidad de movimiento $m\overline{V}$ de M. Si el movimiento de M es de aceleración central de centro O, su momento cinético por relación a O es constante. El momento cinético de un sistema de puntos materiales es la suma de los momentos cinéticos de cada punto.

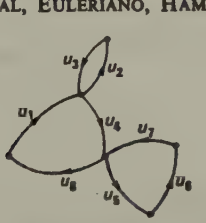
• *Resultante cinética de un sistema de puntos materiales.* — Cantidad de movimiento de ese sistema (V. CANTIDAD).

## Cinta de Möbius

V. MÖBIUS.

## Circuito

• *Circuito en un grafo* G. — Ciclo $(u_1, u_2, ..., u_n)$ tal que para $1 \leqslant i < q$ la extremidad final de $u_i$ coincide con la extremidad inicial de $u_{i+1}$.
V. ELEMENTAL, EULERIANO, HAMILTONIANO, LONGITUD.




• *Circuito de una matroide.* — Conjunto dependiente de la matroide que es minimal por la relación de inclusión.

## Circuitos eléctricos

• *Algebra de circuitos eléctricos.* — V. ELÉCTRICOS.

## Circulación

• *Circulación de un campo de vectores.* — Dado un campo de vectores $\overline{V}$ definido sobre un abierto U de $\mathbf{R}^3$ y un arco parametrado $\Gamma$ contenido en U,

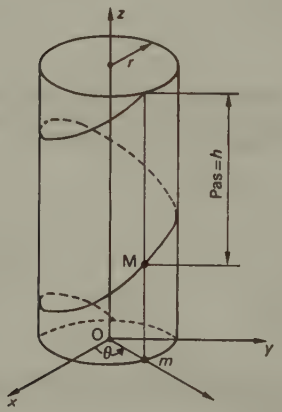
se llama circulación de $\vec{V}$ sobre $\Gamma$ la integral curvilínea $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds}$. Esta noción proporciona el modelo matemático de la noción de trabajo de una fuerza cuando el campo $\vec{V}$ es un campo de fuerzas.

## Circular

• *Curva circular.* — Curva algebraica tal que el polinomio formado por los términos del más alto grado de su ecuación cartesiana sea divisible por $x^2 + y^2$. El círculo es una curva de orden mínimum. La lemniscata de Bernoulli es circular.

• *Hélice circular.* — Hélice sobre un cilindro de revolución. Con relación a un sistema de referencias cartesiano ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en que el eje de los lados coincide con el eje del cilindro, su ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & (r > 0) \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = h\dfrac{\theta}{2\pi}. \end{cases}$$



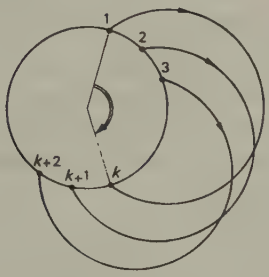

El paso de una hélice circular es la distancia $|h|$ que separa dos puntos consecutivos de la hélice situados sobre una misma generatriz del cilindro.
V. DEXTRORSUM, SINESTRORSUM.

• *Movimiento circular de un móvil puntual* M. — Movimiento cuya trayectoria es un círculo o una parte de círculo.

• *Permutación circular.* — Permutación de la forma:

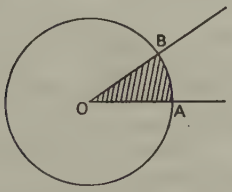
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-k+2 & n-k+3 & \dots & n-1 & n \\ k & k+1 & k+2 & \dots & 1 & 2 & \dots & k-2 & k-1 \end{pmatrix}$$

Intuitivamente, si se imaginan los puntos 1, 2, ..., $n$ repartidos sobre un círculo, efectuar una permutación circular «equivale» a hacerles efectuar una rotación de $k-1$ «saltos».




• *Punto circular de una superficie* $\Sigma$. — Punto elíptico M de $\Sigma$ cuya indicatriz de Dupin es un círculo.

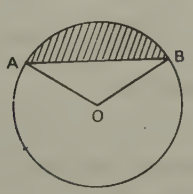
• *Sector circular.* — Intersección de un círculo de centro O y de un sector angular de vértice O. Su área es $\alpha R^2/2$, donde R es el radio y $\alpha$ la medida en radianes del sector angular.




• *Segmento circular.* — Intersección de un disco de radio R con un semiplano situado en el plano del disco y cuya frontera corta el disco. Está limitado por un arco $\widehat{AB}$ y la cuerda AB. Su área vale:

$$R^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\right),$$ donde $\alpha$ es la medida en radianes del ángulo $\widehat{AOB}$.

V. FLECHA.



• *Trigonometría circular.* — Parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las funciones trigonométricas, así como las relaciones que existen entre esas funciones y los elementos de un triángulo (ángulo, lados, ...). Las principales fórmulas verificadas por las funciones trigonométricas son:

| radianes | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| grados | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 |
| $\cos\theta$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| $\operatorname{sen}\theta$ | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\operatorname{tg}\theta$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ |
| $\operatorname{cotg}\theta$ | $\pm\infty$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}/3$ | 0 |

| | $\theta$ | $\frac{\pi}{2}-\theta$ | $\frac{\pi}{2}+\theta$ | $\pi-\theta$ | $\pi+\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cos | $\cos\theta$ | $\operatorname{sen}\theta$ | $-\operatorname{sen}\theta$ | $-\cos\theta$ | $-\cos\theta$ |
| sen | $\operatorname{sen}\theta$ | $\cos\theta$ | $\cos\theta$ | $\operatorname{sen}\theta$ | $-\operatorname{sen}\theta$ |
| tg | $\operatorname{tg}\theta$ | $\operatorname{cotg}\theta$ | $-\operatorname{cotg}\theta$ | $-\operatorname{tg}\theta$ | $\operatorname{tg}\theta$ |
| cotg | $\operatorname{cotg}\theta$ | $\operatorname{tg}\theta$ | $-\operatorname{tg}\theta$ | $-\operatorname{cotg}\theta$ | $\operatorname{cotg}\theta$ |

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b;$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a;$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}; \quad \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2};$$

$$\cos p - \cos q = -2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}; \quad \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \quad \operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}.$$

V. MOIVRE (Fórmula de).

En un triángulo de ángulos A, B, C y cuyos lados tienen por longitudes a, b y c, las principales fórmulas son:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a = b \cos C + c \cos B$$

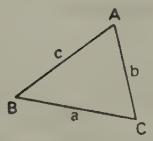
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

(R: radio del círculo circunscrito).

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{b - a \cos C}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \dfrac{A-B}{2}}{\cos \dfrac{A+B}{2}}; \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{A+B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}; \quad \text{Area} = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$




## Circulares

• *Funciones circulares.* — Nombre que a veces se da a las funciones trigonométricas.

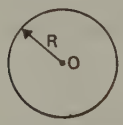
V. INVERSAS, TRIGONOMÉTRICAS.

## Círculo

Curva algebraica plana. Dado un punto A de un plano euclídeo y un número real positivo R, se llama círculo (o circunferencia) de centro A y de Radio R al conjunto de puntos de P cuya distancia a A es igual a R. Un círculo es, por tanto, una esfera en un plano euclídeo. Su longitud (se dice a veces —en el lenguaje corriente, que es también el de los físicos y de los astrónomos—, su circunferencia) es igual a $2\pi R$. En el universo riemanniano (de la relatividad general) esa longitud es la distancia que hay que recorrer en línea recta antes de encontrarse de nuevo en su punto de partida.
En un sistema de referencias cartesiano su ecuación se escribe:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

donde $a$, $b$ son las coordenadas de su centro A.
Se llama círculo de centro A y de radio R a la superficie plana interior limitada por la circunferencia de centro A y de radio R (*i.e.* el disco de centro A y de radio R). Se dice entonces que la superficie de un círculo de radio R es igual a $\pi R^2$ o $\pi D^2/4$ si $D = 2R$ es la longitud de un diámetro de ese círculo.
V. ABSOLUTO, APOLONIO, ARCO, CIRCUNFERENCIA, CIRCUNSCRITO, CONVERGENCIA, CUADRATURA, CUERDA, CURVATURA, DIÁMETRO, GARGANTA, GRANDE, INFINITO, INSCRITO, MONGE, NAPOLEÓN (Problema de), ORTÓPTICA, ORTOTÓMICA, OSCULADOR, PARALELA, PERÍMETRO, PRINCIPAL, RECTIFICACIÓN, STEINER (Porisma de), SUPRAOSCULADOR, TRIGONOMÉTRICO, UNIDAD.




• *Círculo punto.* — Círculo de radio nulo. Se reduce, por tanto, a un solo punto: su centro.

• *Integral de círculo.* — Nombre dado a la cuadratriz de Abdank-Abakanowicz.

• *Paradoja del rodamiento de círculo.* — V. RODAMIENTO.

## Círculos

V. CONCÉNTRICOS, DIRECTORES, HAZ, RED, SECANTES, SODDY, TANGENTES, VILLARCEAU.

• *Círculos notables de un triángulo.* — V. APOLONIO, BROCARD, CIRCUNSCRITO, EULER, EXINSCRITO, FEUERBACH, INSCRITO, LEMOINE, NUEVE (Puntos), TERQUEM, TORRICELLI, TUCKER.

• *Círculos ortogonales.* — V. ORTOGONALES (Curvas).

## Circunferencia

Según el contexto, se emplea como sinónimo de círculo o de longitud del círculo.
V. CÍRCULO.

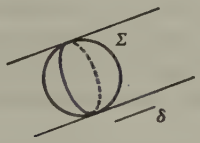
## Circunscrita

• *Esfera circunscrita a un poliedro.* — Esfera que pasa por todos los vértices del poliedro. Tal esfera no existe necesariamente.

## Circunscrito

• *Circunferencia circunscrita a un polígono.* — Circunferencia que pasa por todos los vértices de ese polígono. Tal circunferencia no existe necesariamente. La circunferencia circunscrita a un triángulo tiene por centro el punto de concurrencia de las mediatrices.
V. TRIÁNGULO.

• *Cilindro circunscrito a una superficie.* — Cilindro cuyas generatrices todas son tangentes a la superficie. Dada una dirección $\delta$ y una esfera $\Sigma$ existe un cilindro de revolución circunscrito a $\Sigma$.




• *Cono circunscrito a una superficie.* — Cono cuyas generatrices todas son tangentes a la superficie. Si S es un punto exterior a una esfera $\Sigma$ de centro 0, existe un cono de revolución de eje SO circunscrito a $\Sigma$.

• *Poliedro circunscrito a una esfera.* — Poliedro cuyas caras son tangentes a la esfera.

• *Polígono circunscrito a una circunferencia.* — Polígono plano cuyos lados son tangentes a la circunferencia.

## Cisoide

V. DIOCLES, OBLICUA, RECTA.

## Clairaut, Alexis Claude (1713-1765)

• *Ecuación diferencial de Clairaut.* — Ecuación de Lagrange de la forma $y - xy' = A(y')$, cuya solución general es una recta $y = \lambda x + A(\lambda)$.

• *Ecuación en las derivadas parciales de Clairaut.* — Ecuación de la forma:

$$u = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

## Clan

• *Clan de partes de un conjunto* E. — Sinónimo de anillo de partes de un conjunto E. Un clan que contiene E es un álgebra de partes de E.
V. CONJUNTO (Anillo y álgebra de partes de un), ENGENDRADO, LEBESGUE.

## Clase

Noción aportada por la lógica para axiomatizar y fundamentar las matemáticas y más precisamente la teoría de conjuntos. Mientras que en ciertos axiomáticos (Zermelo-Fraenkel) sólo se consideran conjuntos, en otros (Von Neumann-Bernays-Gödel), a fin de poder hablar de la «familia de todos los conjuntos» se introducen clases y conjuntos; un conjunto es entonces una clase particular elemento de otra clase.

• *Clase de una aplicación f definida sobre un abierto* U *de un espacio vectorial normado real* E *con valores en un espacio vectorial normado real* F. — Si $f$ es continua sobre U, se llama de clase $C^0$; si $f$ es $p$ veces continuamente diferenciable sobre U se denomina de clase $C^p$; si $f$ es indefinidamente diferenciable sobre U se denomina de clase $C^\infty$.

• *Clase de congruencia.* — Clase de equivalencia cuando la equivalencia es una congruencia.
V. RESIDUAL (Clase).

• *Clase de equivalencia.* — Si R es una equivalencia sobre un conjunto E y $x$ un elemento de E, el conjunto de los elementos de E equivalentes a $x$ módulo R es la clase de equivalencia de $x$ módulo R.
V. COCIENTE (Conjunto), PARTICIÓN, REPRESENTANTE.

• *Clase de homotopía de un camino.* — V. HOMOTOPÍA.

• *Clase de un arco.* — V. GEOMÉTRICO (Arco), PARAMETRADO (Arco).

• *Clase de una curva algebraica plana.* — Número de tangentes a la curva trazadas desde un punto del plano en posición «general». Es el grado de la ecuación tangencial de la curva.

• *Clase de una variedad diferencial.* — V. DIFERENCIAL.

• *Clase modal.* — V. MODO.

## Clases

• *Clases asociadas a un carácter cuantitativo continuo* X *que toma sus valores en un intervalo* I. — Intervalos que realiza una partición de I que permiten reagrupar los valores tomados por X.

• *Clases de Baire.* — V. BAIRE.

• *Grupo de clases de un anillo de Dedekind* A. — Grupo cociente Cl(A) del grupo multiplicativo de los ideales fraccionarios no nulos de A por el subgrupo de ideales principales fraccionarios.
V. DIRICHLET (Teorema de).

## Clásicos

• *Grupos clásicos.* — Se designa de este modo, desde H. Weyl, a los grupos lineales, de algunos de sus subgrupos (en particular los grupos ortogonales, unitarios, simplécticos, etc.), y, por extensión, a otros grupos que están estrechamente vinculados a ellos: grupos afines, grupos proyectivos unimodulares, etcétera.

## Clasificación

• *Clasificación de las gramáticas, de los problemas.* — V. CHOMSKY, PROBLEMAS.

## Clifford, William Kingdon (1845-1879)

• *Algebra de Clifford.* — Para todo entero $n \geqslant 2$, si $e_1, ..., e_n$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$, existe un álgebra $C_n$ sobre $\mathbf{R}$ engendrada por 1 y los $e_i$ sometidos a las relaciones:

$$e_i e_j = -e_j e_i \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{y} \quad e_i^2 = -1.$$

En este caso, 1 y los productos $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p}$ con $1 \leqslant p \leqslant n$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ constituyen una base de $2^n$ elementos del $\mathbf{R}$-espacio vectorial $C_n$. Los productos $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p}$ para los que $p$ es par y 1 engendra una sub-álgebra $C_n^+$ de $C_n$ cuyos elementos se denominan spins.
V. HIPERCOMPLEJO.

## Clique

Grafo simple completo. Una clique de $n$ vértices se llama una $n$-clique y se denota por $K_n$ (V. KURATOWSKI).

## Cobordes

Dado un complejo de cocadenas:

$$M \ldots M^{n-1} \xrightarrow{\partial^n} M^n \xrightarrow{\partial^{n+1}} M^{n+1} \to \ldots,$$

se llama cobordes o $n$-cobordes a los elementos de $\partial^n(M^{n-1}) = \operatorname{Im} \partial^n$. Para todo $n \in \mathbf{Z}$, forman un submódulo del módulo $\operatorname{Ker} \partial^{n+1}$ de los cociclos; es el $n$-ésimo módulo $B^n(M)$ de los cobordes. Todo coborde es un cociclo.
V. BORDES, COHOMOLOGÍA, HOMOLOGÍA.

## Cocadenas

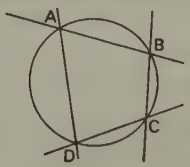
• *Complejos de cocadenas.* — Un complejo de módulos $M = (M^n, \partial^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ se llama de cocadenas si $M^n = 0$ para todo $n < 0$. Es, por tanto, el dato de una serie:

$$M : 0 \to M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \xrightarrow{\partial^1} M^2 \to \ldots \to M^n \xrightarrow{\partial^{n+1}} M^{n+1} \to \ldots$$

tal que $\operatorname{Im}(\partial^n \subset \operatorname{Ker}(\partial^{n+1})$.
V. CADENAS (Complejo de), COBORDES, COCICLOS, COHOMOLOGÍA, COMPLEJO, EXACTA (Serie), HOMOLOGÍA.

## Cocíclicos

• *Puntos cocíclicos.* — Puntos situados sobre un mismo círculo. Cuatro puntos no alineados A, B, C, D son cocíclicos si y solamente si los ángulos de rectas $(\widehat{AB}, \widehat{AD})$ y $(\widehat{CB}, \widehat{CD})$ son iguales.




## Cociclo

• *Cociclo de un grado.* — Par $\omega(A) = (\omega^+(A), \omega^-(A))$, donde A es un conjunto de vértices del grafo y donde $\omega^+(A)$ y $\omega^-(A)$ son, respectivamente, el conjunto de los arcos incidentes con A hacia el exterior y el conjunto de los arcos incidentes con A hacia el interior.

## Ciclomático

• *Número ciclomático de un grafo* G *de orden n.* — Entero $\lambda(G) = n - p$, donde $p$ es el número de componentes conexos del grafo.
V. CICLOMÁTICO.

## Cociclos

Dado un complejo de cocadenas:

$$M \ldots \to M^{n-1} \xrightarrow{\partial^n} M^n \xrightarrow{\partial^{n+1}} M^{n+1} \to \ldots,$$

se llama cociclos o $n$-cociclos a los elementos de $\operatorname{Ker} \partial^{n+1}$. Para todo $n \in \mathbf{Z}$, forman un sub-módulo de $M^n$; es el $n$-ésimo módulo de los cociclos, denotado $Z^n(M)$.

V. CICLOS, COBORDES, COHOMOLOGÍA, HOMOLOGÍA.

## Cociente

Se emplea a veces para fracción.

V. FRACCIÓN.

● *Anillo cociente entre un anillo* A *y un ideal* I. — La multiplicación definida por $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{xy}$ proporciona el grupo aditivo cociente A/I de una estructura de anillo denominado anillo cociente. Ejemplo, el anillo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

● *Cociente de una división euclídea.* — V. EUCLÍDEA.

● *Cociente en un anillo* A *conmutativo.* — Sean $a$ y $b$ dos elementos de A tales que $b$ sea inversible. El elemento $ab^{-1}$ se nota $a/b$ y se llama cociente de $a$ entre $b$. Los elementos $a$ y $b$ se llaman respectivamente numerador y denominador del cociente. En R, el cociente de 10 por 5 es 2, el de 9 por 2 es 9/2 ó 4,5. La ley de composición interna sobre $\mathbf{R}^*$ definida por $(a, b) \mapsto \frac{a}{b}$ es la división sobre $\mathbf{R}^*$.

● *Cociente topológico.* — V. TOPOLÓGICO.

● *Conjunto cociente entre un conjunto* E *y una relación de equivalencia* R. — Conjunto de las clases de equivalencia módulo **R**. Se nota E/**R**.

● *Espacio vectorial cociente entre un espacio vectorial* E *y un subespacio* F. — Espacio vectorial definido sobre el grupo conmutativo cociente E/F por $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{\alpha x}$, donde $\alpha$ es un escalar.

● *Grupo cociente entre un grupo* (G, $*$) *y un subgrupo distinguido* H. — Grupo notado G/H, para la ley definida por $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{x} * \bar{y}$, donde $\bar{x}$ es la clase de $x$ módulo, estando la equivalencia compatible definida sobre G por $\alpha \equiv \beta \mod H$ si y sólo si $\alpha' * \beta \in H$, donde $\alpha'$ es el simétrico de $\alpha$.

● *Módulo cociente entre un módulo* M *y un sub-*A*-módulo* N. — Módulo definido sobre el grupo conmutativo M/N por $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{\alpha x}$, donde $\alpha \in A$.

● *Topología cociente.* — V. TOPOLOGÍA (Cociente).

## Cocientes

● *Cocientes incompletos de una fracción continua.* — V. CONTINUA.

● *Cuerpo de los cocientes de un dominio de integridad* A. — Sinónimo de cuerpo de las fracciones de A.

V. FRACCIÓN.

## Cocircuito

• *Cocircuito de un grafo.* — Cociclo $(\omega^+(A), \omega^-(A))$ tal que $\omega^-(A) = \phi$ o $\omega^+(A) = \phi$.

## Codimensión

• *Codimensión de un sub-espacio vectorial* F *de un espacio vectorial* E. — Es la dimensión del espacio vectorial E/F. Se la denota codim(F). La dimensión de F y su codimensión están ligadas por la fórmula $\dim(F) + \mathrm{codim}(F) = \dim(E)$.

## Coeficiente

V. ACHATAMIENTO, ANGULAR, BINOMIAL, BINOMIO, CORRELACIÓN, DIRECTOR, DISIMETRÍA, DOMINANTE, ECUACIÓN, FISHER, FOURIER, PARÁMETRO, PEARSON, POLINOMIO, TENSOR, VARIACIÓN, YULE.

## Coesféricos

Situados en una misma esfera.

## Cofactor

Dada una matriz cuadrada $M = (\alpha_{ij})$ de orden $n$ de coeficientes en un cuerpo conmutativo K, se llama cofactor del elemento $\alpha_{ij}$ al escalar

$$(-1)^{i+j} \det(M_{ij}),$$

donde $\det(M_{ij})$ es el menor asociado a $\alpha_{ij}$.
V. DESARROLLO de un determinante.

## Cogradientes

• *Matrices cogradientes.* — Matrices cuadradas M y N de $M_n(K)$ tales que existe una matriz inversible P que verifica $N = MP^tM$.

## Cohen, Paul (1934- )

• *Teorema de Cohen.* — Teorema de matemática que afirma que la hipótesis del continuo es indecidible: si la teoría de los conjuntos de Zermelo-Fraenkel es no contradictoria, puede añadirse a sus axiomas la hipótesis del continuo o su negación.
V. CONTINUO (Hipótesis del continuo), EASTÖN, FORCING, GÖDEL.

## Cohomología

• *Clase de cohomología.* — Elemento de un módulo de cohomología.

• *Módulo de cohomología.* — Dado un complejo de cocadenas:

$$M \ldots \to M^{n-1} \xrightarrow{\partial^n} M^n \xrightarrow{\partial^{n+1}} M^{n+1} \to \ldots,$$

se llama *n*-ésimo módulo de cohomología de M el módulo:

$$H^n(M) = \operatorname{Ker} \partial^{n+1} / \operatorname{Im} \partial^n,$$

cociente del *n*-ésimo módulo de los cociclos $Z^n(M)$ para el *n*-ésimo módulo de los cobordes $B^n(M)$.
V. HOMOLOGÍA.

## Co-imagen

• *Co-imagen de una aplicación lineal f de un módulo* E *en un módulo* F. — Es el módulo cociente E/Ker *f*, denotado Co-im *f*. La aplicación *f* es inyectiva si y solamente si Co-im $f = E$.
V. CONÚCLEO, IMAGEN, ISOMORFISMO (Teorema de), NÚCLEO.

## Coincidir

Se dice que una función $f: E \to E'$ y una función $g: F \to F'$ coinciden en una parte $A \subset E \cap F$ si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

## Colatitud

V. ESFÉRICAS (Coordenadas).

## Colección

En la lengua corriente, conjunto y colección siguen siendo sinónimos como lo eran, en matemática, en tiempos de Cantor. Hoy día, la teoría axiomatizada de los conjuntos exige el dar los objetos de esa teoría y de sus axiomas. Los objetos que se dan constituyen un universo U o una colección de objetos llamados conjuntos; esta colección está provista de una relación binaria $\in$, llamada la pertenencia; así, $x \in y$ se lee: «el conjunto *x* pertenece al conjunto *y*», o «*x* es elemento de *y*». Los axiomas de la teoría de los conjuntos son entonces aquéllos que se imponen a la relación binaria $\in$ considerada.

## Colectivizante

• *Relación colectivizante.* — Relación R para la que existe un conjunto E tal que los objetos que verifican R sean los elementos de E y sólo ellos. Las relaciones de pertenencia y de inclusión son colectivizantes. La relación $\notin$, la relación de equipotencia y la relación de isomorfismo de conjuntos bien ordenados no son colectivizantes.

## Colineación

Sean E un K-espacio vectorial y F un K'-espacio vectorial de igual dimensión $n \geqslant 3$, el conjunto $\Gamma$ de las variedades lineales proyectivas de P(E) y $\Gamma'$ el de las variedades lineales proyectivas de P(F). Se llama colineación (resp. correlación) de P(E) sobre P(F) a una biyección $\varphi$ de $\Gamma$ sobre $\Gamma'$ tal que $V_1 \subset V_2$ implica $\varphi(V_1) \subset \varphi(V_2)$ [resp. $V_1 \subset V_2$ implica $\varphi(V_2) \subset \varphi(V_1)$] para todo par $(V_1, V_2)$ de elementos de $\Gamma$.

## Colineales

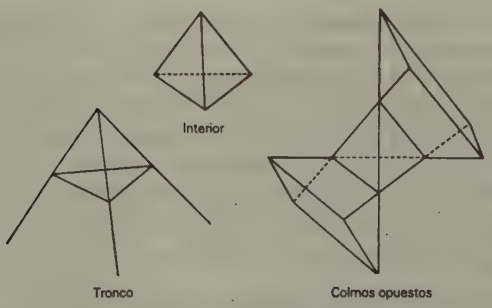
• *Vectores colineales.* — Unos vectores $x_1, x_2, ..., x_n$ de un espacio vectorial E son colineales si pertenecen a una misma recta vectorial de E. Dos vectores son colineales si y solamente si son linealmente dependientes.

## Colinealidad

• *Colinealidad de vectores.* — Propiedades de esos vectores de ser colineales.

## Colmos

• *Esferas de los colmos de un tetraedro.* — El número de las esferas tangentes a los cuatro planos de las caras de un tetraedro T varía entre 5 y 8 según los tetraedros. Siempre hay una esfera inscrita en el interior del tetraedro y cuatro esferas inscritas en los cuatro troncos. Las esferas inscritas en las seis regiones denominadas colmos (véase figura siguiente) no existen necesariamente. Cuando un colmo admite una esfera inscrita, el colmo opuesto no las admite. Un tetraedro regular no admite ninguna esfera de los colmos.




## Colog

Abreviatura de cologaritmo.

## Cologaritmo

• *Cologaritmo de un real estrictamente positivo a.* — Número real denotado $\operatorname{colog} a$ y definido por $\operatorname{colog} a = -\log a = \log \frac{1}{a}$.

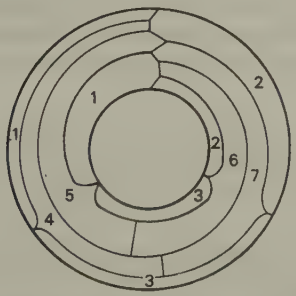
## Coloración

• *Problema de la coloración de los mapas.* — Para una superficie dada (plano, esfera, toro, botella de Klein, etc.) el problema de la coloración de los mapas consiste en determinar el número mínimo de colores que permiten colorear todo mapa dibujado sobre la superficie de forma que dos regiones adyacentes cualesquiera no sean del mismo color. Ese número es igual al número cromático de la superficie. Según la demostración de la conjetura de Heawood, acabada en 1968, y la demostración más reciente (1976) del teorema de los cuatro colores, se conoce la respuesta al problema de la coloración de mapas sobre una superficie cualquiera: excepción hecha de la botella de Klein, cuyo número cromático es 6, el número cromático de una superficie de característica de Euler-Poincaré $c$ es igual a:

$$\left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2}\right]$$

donde [ ] designa la parte entera del número que se encuentra en el interior. Por ejemplo, ese número vale 4 para el plano o la esfera, 7 para el toro, 8 para el doble toro.

V. CUATRO colores (Teorema de los), HEAWOOD (Conjetura de).




Mapa sobre el toro necesitando 7 colores

## Colores

• *Problema, conjetura, teorema de los cuatro colores.* — V. CUATRO.

## Colosalmente

• *Número colosalmente abundante.* — V. ABUNDANTE.

## Columna

• *Columna o vector columna de una matriz.* — V. MATRIZ.

• *Matriz columna.* — Matriz $(n, 1)$.

## Comaximales

• *Ideales comaximales de un anillo* A. — Dos ideales I y J de un anillo A se denominan comaximales (o extraños) si $\mathbf{I} + \mathbf{J} = \mathbf{A}$; así, en $\mathbf{Z}$ los ideales $3\mathbf{Z}$ y $7\mathbf{Z}$ son comaximales; en $\mathbf{K}[X, Y]$, los ideales $(X)$ e $(Y)$ no lo son.

## Combinación

Dado un conjunto E de $n$ elementos y un entero $p$ tal que $0 \leqslant p \leqslant n$, se llama combinación de $p$ elementos de E, o $p$-combinación, a todo subconjunto de E de $p$ elementos. El número de estas combinaciones denotado $\binom{n}{p}$ o $C_n^p$ es dado por: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Se dice que $\binom{n}{p}$ es el número de combinaciones de $n$ objetos tomados $p$ a $p$. Ejemplo: Un jugador de bridge puede recibir $\binom{52}{13}$ juegos diferentes. Los números $\binom{n}{p}$ son también los coeficientes del binomio de Newton y aparecen en el triángulo de Pascal que permite calcularlos progresivamente.
Las principales fórmulas verificadas por estos números son:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}; \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}; \quad 2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}; \quad 0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}.$$

V. BINOMIAL (Coeficiente), FIBONACCI (Números de), NEWTON (Binomio de), PASCAL (Triángulo de).

• *Combinación sin repeticiones.* — Sinónimo de combinación. En física teórica la estadística de Bose-Einstein está basada en combinaciones con repeticiones; la estadística de Fermi-Dirac sobre combinaciones sin repeticiones.

• *Combinación con repeticiones.* — Dado un conjunto E de $n$ elementos y un entero $p$, se llama combinación con repeticiones de $p$ elementos de E, o $p$-combinación con repeticiones, a una lista de $p$ elementos extraídos en E, estando autorizadas las repeticiones y no interviniendo el orden en la lista. Por

ejemplo: $\{a, a, a, b, a, b\}$ o $\{a, a, a, a, b, b\}$ es una combinación con repeticiones de 6 elementos de $E = \{a, b, c\}$. Hay $\binom{n+p-1}{p}$ combinaciones con repeticiones de $p$ elementos en un conjunto E de $n$ elementos.

• *Combinación lineal.* — V. LINEAL.

## Combinatoria

Matemática de lo discreto extraída del análisis combinatorio, la combinatoria (o combinatórica) es el estudio de las configuraciones. Tiene por objeto:
1) ilustrar las propiedades intrínsecas de configuraciones dadas (números poligonales, por ejemplo);
2) demostrar la existencia o la no-existencia de las configuraciones que tienen propiedades dadas (problema de los siete puntos de Koenigsberg, problema de los 36 oficiales de Euler, construcciones de cuadrados mágicos...);
3) calcular el número de las configuraciones. Este objeto define el análisis combinatorio propiamente dicho;
4) enumerar estas configuraciones y a clasificarlas llegado el caso;
5) eventualmente, a descomponerlas en sub-figuraciones.
Más o menos vinculada a numerosas ramas de las matemáticas puras (teoría de los números, álgebra, geometría, geometría enumerativa, análisis, topología, lógica), la combinatoria juega un papel importante en probabilidades y en estadísticas. Ha hecho progresar la teoría de los logaritmos, la teoría de los grafos, la teoría de los juegos y la teoría de la información. Sus dominios de aplicación van desde la investigación operacional hasta la química pasando por la física y la economía.

F. LL.

## Combinatórica

Empleado por algunos para designar la combinatoria.

## Combinatorio

• *Análisis combinatorio.* — Sinónimo de teoría de los conjuntos finitos, es decir, de problemas de recuento y de enumeración de situaciones (configuraciones), las más tradicionales de las cuales conciernen a las variaciones, las permutaciones y las combinaciones.

• *Geometría combinatoria.* — V. MATROIDE.

• *Topología combinatoria.* — Este término designaba en sus principios lo que hoy se denomina topología algebraica. Este término se empleaba entonces por oposición a la topología conjuntista.

## Compacidad

Propiedad de ser compacto.

• (Lógica.) *Teorema de compacidad (o teorema de finitud).* — Sea $\Sigma$ un conjunto enumerable de fórmulas; si toda parte finita de $\Sigma$ tiene un modelo, en-

tonces $\Sigma$ tiene un modelo. Este teorema implica, por ejemplo, que la clase de los grupos finitos no sea axiomatizable.

## Compacta

• *Parte compacta de un espacio topológico separado* E. — Parte que, provista de la topología inducida por la de E, es un espacio compacto. Las partes compactas en **R** son las reuniones finitas de intervalos cerrados acotados. En un espacio normado de dimensión finita, son las partes cerradas acotadas.

• *Parte relativamente compacta de un espacio topológico separado* E. — Parte A cuya adherencia $\overline{A}$ en E es una parte compacta de E.

## Compactificado

V. ALEXANDROV, STONE.

## Compacto

• *Espacio localmente compacto.* — Espacio topológico separado (o de Hausdorf) cada uno de cuyos puntos posee un entorno compacto. Respecto de topología usual, **R** y $\mathbf{Q}_p$ son localmente compactos.

• *Espacio topológico compacto (o espacio compacto).* — Espacio topológico cuasi compacto y separado. La recta real acabada $\overline{\mathbf{R}}$ es un espacio compacto.

• *Función de soporte compacto.* — Función numérica nula fuera de un intervalo compacto.

## Comparables

• *Elementos comparables.* — Dos elementos $x$ e $y$ de un conjunto ordenado (E, $\leqslant$) son comparables si una de las proposiciones $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ es verdadera. En $\mathfrak{P}(\mathbf{N})$ ordenado por la inclusión {2 5} y {0, 2, 3, 5, 12} son comparables {3} y {4, 6} no lo son.

## Comparación

• *Comparación de dos elementos comparables de un conjunto ordenado.* — Determinación del elemento mayor para la relación de orden considerada.

• *Teoremas de comparación.* — Se llama así a las proposiciones que permiten, conociendo la naturaleza de una sucesión, de una integral, de una serie, conocer la de otra sucesión, la de otra integral, la de otra serie. Por ejemplo, si $\Sigma u_n$ es una serie numérica y $\Sigma v_n$ una serie de términos reales positivos con-

vergente, si $|u_n| \leqslant v_n$ para todo $n$ entonces la serie $\Sigma|u_n|$ es convergente y tenemos $|\Sigma u_n| \leqslant \Sigma u_n$.
V. CONVERGENCIA.

## Compás

Instrumento de dibujo que permite trazar circunferencias y, sobre todo, trasladar distancias.
V. COMPUESTOS, CONSTRUCCIÓN.

## Compatibilidad

Propiedad de ser compatible.

## Compatible

• *Conjunto compatible de fórmulas.* — Conjunto de fórmulas de un lenguaje que admite un modelo.

• *Relación compatible a izquierda —resp. a derecha— con una ley* $*$ *sobre un conjunto* E. — Relación $\mathscr{R}$ sobre E tal que $x\mathscr{R}y$ implica $(z * x)\mathscr{R}(z * y)$ —resp. $(x * z)\mathscr{R}(y * z)$.

• *Relación compatible con una ley* $*$ *sobre un conjunto* E. — Relación compatible a derecha e izquierda; en Z, la adición es compatible con el orden usual, pero no la multiplicación.

• *Sistema de ecuaciones compatible.* — Sistema que admite por lo menos una solución.

## Compatibles

• *Mapas* $C^k$*-compatibles.* — Mapas $(U, \varphi)$ y $(V, \psi)$ tales que:
a) $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ sean abiertos en $\mathbf{R}^n$;
b) la aplicación llamada de cambio de mapas $\psi \circ \varphi^{-1}$ sea un difeomorfismo del abierto $\varphi(U \cap V)$ sobre el abierto $\psi(U \cap V)$.

## Complejo

Como sustantivo se emplea en lugar de «número complejo» o para designar ciertas colecciones de objetos matemáticos que verifican ciertas condiciones.
V. CADENAS, COCADENAS, SIMPLEX.

• (Homología.) *Complejo o complejo de* A*-módulos.* — Sea A un anillo; un complejo de A-módulos es el dato de una serie $M = (M^n, \partial^n)_{n \in Z}$, donde $M^n$ es un A-módulo y $\partial^n : M^n \to M^{n+1}$ una aplicación A-lineal llamada diferencial de

grado $n$, tal que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ (*i.e.* tal que $\mathrm{Im}(\partial^n) \subset \mathrm{Ker}(\partial^{n+1})$). Se conviene, para $n < 0$, denotar $M_{-n}$ [resp. $\partial_{-n}$] en lugar de $M^n$ [resp. $\partial^n$].

V. CADENAS (Complejo de), COCADENAS (Complejo de), EXACTO (Serie).

• *Complejo simplicial.* — Complejo de símplices.

• *Espacio vectorial complejo.* — Espacio vectorial sobre **C**.

• *Exponencial complejo.* — Función entera de **C** en **C** denotada *exp* y definida por $z \mapsto e^z$, donde: $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots$ Es periódica de período $2\pi i$. Prolonga en **C** la función exponencial de base $e$ definida sobre **R**. En el caso en que $z$ sea imaginario puro, permite definir las funciones reales seno y coseno. Las principales fórmulas verificadas para $z \in \mathbf{C}$ y $z' \in \mathbf{C}$ son:

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}; \quad e^{-z} = 1/e^z; \quad e^z/e^{z'} = e^{z-z'}; \quad (e^z)^\gamma = e^{z\gamma}.$$

Para dos reales $x$ e $y$, tenemos $e^{x+iy} = e^x\ (\cos y + i \operatorname{sen} y)$. En particular $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ de donde la escritura $z = \rho e^{i\theta}$ para un número complejo $z$ de módulo $\rho$ y de argumento $\theta$.

• *Función compleja.* — Función que toma valores complejos.
V. CONJUGADA.

• *Forma sesquilineal compleja.* — V. SESQUILINEAL.

• *Integral compleja.* — Expresión poco utilizada. Sean $f$ una función de valores complejos continua en un dominio D de **C** y $\Gamma : [\![\alpha, \beta]\!] \to D$ un camino de clase $C^1$. Se llama integral compleja de $f$ a la integral curvilínea denotada $\int_\Gamma f(z)\,dz$ y definida por: $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\Gamma(t))\,\Gamma'(t)\,dt$.

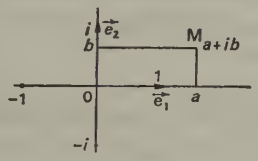
• *Logaritmo complejo.* — Dado un número complejo no nulo $t$, existe un número complejo denotado $\mathrm{Log}\, t$ definido salvo la suma de sus múltiplos enteros de $2\pi i$ por: $\mathrm{Log}\, t = \mathrm{Log}|t| + i \arg t$, donde $\mathrm{Log}|t|$ designa el logaritmo neperiano de $|t|$. Verifica $e^{\mathrm{Log}\, t} = t$. El número complejo $\mathrm{Log}\, t$ se denomina un logaritmo complejo de $t$. El logaritmo complejo es una función multiforme de $\mathbf{C} - \{0\}$ en **C**.

V. DETERMINACIÓN.

• *Matriz compleja.* — Matriz cuyos elementos son números complejos.
V. CONJUGADA.

• *Número complejo.* — Elemento del cuerpo **C** de los números complejos. Un número real es un complejo particular.
V. AFIJO, ALGEBRAICA (Forma), AMPLITUD, ARGUMENTO, COMPLEJO (Plano), COMPLEJOS, CONJUGADO, IMAGEN, IMAGINARIA (Parte), IMAGINARIO (Número), MÓDULO, REAL (Parte), TRIGONOMÉTRICA (Forma), UNIMODULAR.

• *Plano complejo o plano de Argand-Cauchy o plano de Argand-Gauss.* — Plano afín euclídeo asociado al espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^2$ utilizado para representar los números complejos. Tomando un sistema de referencias ortonormado $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ se asocia, de manera biunívoca, a todo complejo $z = a + ib$ el punto M de coordenadas $(a, b)$ llamado imagen puntual de $z$; el vector $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ se llama imagen vectorial de $z$ (inversamente, $z$ se llama el afijo de M o de $\overrightarrow{OM}$). La aplicación $a + ib \mapsto a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ es un isomorfismo de R-espacio vectorial de C sobre $\mathbf{R}^2$. El módulo de $z$ es $\|\overrightarrow{OM}\|$, su amplitud es el ángulo $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$. El descubrimiento del plano complejo, al permitir visualizar los números complejos, hizo progresar considerablemente su estudio.




## Complejos

• *Cuerpos de números complejos.* — Cierre algebraico C del cuerpo R de los números reales. Si $i$ es una raíz del polinomio $X^2 + 1$, para todo número complejo $z$ existe un único par $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tal que $z = a + ib$; en este caso se dice que $z$ está escrito en forma algebraica. Si $b = 0$, entonces $z$ es un número real; en caso contrario, $z$ es imaginario; si $b \neq 0$ y $a = 0$ se dice que $z$ es un imaginario puro. C tiene una estructura de R-espacio vectorial de dimensión 2 que admite $(1, i)$ como base canónica. La aplicación $a + ib \mapsto (a, b)$ de C en $\mathbf{R}^2$ es un isomorfismo de R-espacios vectoriales. El conjunto de las matrices cuadradas reales de orden 2 de la forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

provista de la adición y de la multiplicación de las matrices es un cuerpo isomorfo al cuerpo C. Los números complejos pueden representarse en un plano llamado plano complejo.

Sean $z = a + ib = pe^{i\theta}$ y $z' = a' + ib' = p'e^{i\theta'}$ dos números complejos. Tenemos:

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} \quad \text{(para } z \neq 0\text{)}.$$

V. COMPLEJO (Número, Plano), MOIVRE.

• *Funciones hiperbólicas complejas.* — Funciones complejas, holomorfas sobre su dominio de definición que prolongan las funciones hiperbólicas usuales y llevan el mismo nombre que estas últimas. Sus definiciones, con la ayuda del exponencial complejo, son:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \text{ definida sobre } \mathbf{C},$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \text{ definida sobre } \mathbf{C},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \text{ definida sobre } \mathbf{C} - \left\{i\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$\coth z = \frac{1}{\operatorname{th} z} \text{ definida sobre } \mathbf{C} - \{ik\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Para todo $z \in \mathbf{C}$ tenemos $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{sh}(iz)$
V. DESARROLLO en serie entera.

• *Funciones trigonométricas complejas.* — Funciones complejas, holomorfas sobre un dominio de definición cuyas restricciones en **R** son las funciones trigonométricas usuales. Sus definiciones, con la ayuda de la exponencial compleja, son:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \text{ definida sobre } \mathbf{C},$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \text{ definida sobre } \mathbf{C},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)} \text{ definida sobre } \mathbf{C} - \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\},$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{tg\, z} \text{ definida sobre } \mathbf{C} - \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Para todo $z \in \mathbf{C}$, tenemos $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ y $\operatorname{sen} z = i \operatorname{sh}(iz)$. Si $e$ e $y$ son dos números reales tenemos:

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

En particular, $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ y $\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{sh} y$.
V. DESARROLLO en serie entera, EULER (Fórmulas de).

## Complementado

• *Elemento complementado de un retículo.* — Sea E un retículo que admite un elemento nulo 0 y un elemento universal $u$. Un elemento $x$ de E se denomina complementado si existe un elemento $\bar{x}$ de E tal que $x \wedge \bar{x} = 0$ y $x \wedge \bar{x} = u$.

• *Retículo complementado.* — Un retículo que admite un elemento nulo y un

elemento universal se denomina complementado si todos sus elementos son complementados. El retículo $(\mathfrak{P}(E), \subset)$ es complementado.

## Complementaria

• *Aceleración complementaria.* — Aceleración de Coriolis.

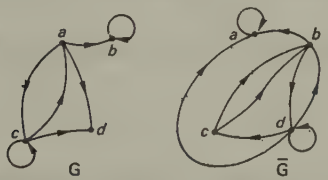
## Complementariedad

Aplicación $f$ en el álgebra de Boole $(E, +, ., f)$.
V. BOOLE.

## Complementario

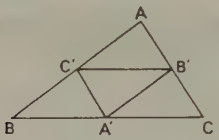
• *Complementario de un sub-conjunto* A *de un conjunto* E. — Conjunto de los elementos de E que no pertenecen a A. Se lo denota $\overline{A}$, $\complement_E A$, $E - A$ o $E \backslash A$.

• *Grafo complementario de un 1-grafo* $G = (S, U)$. — 1-grafo $\overline{G} = (S, \overline{U})$, donde $\overline{U}$ es el complementario de U en $S \times S$.



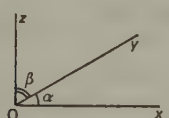

• *Grafo complementario de un grafo simple* $G = (S, E)$. — Grafo simple $G = (S, \mathfrak{P}_2(S) - E)$, donde $\mathfrak{P}_2(S)$ es el conjunto de los pares de elementos de S.

• *Triángulo complementario de un triángulo* ABC. — Triángulo A'B'C' cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo ABC. Estos dos triángulos son semejantes.




## Complementarios

• *Angulos complementarios.* — Dos ángulos no orientados $\alpha$ y $\beta$ se denominan complementarios si sus medidas en radianes tienen por suma $\pi/2$.




## Complementos

• *Fórmula de complementos.* — Sea $p$ un real tal que $0 < p < 1$. La función euleriana de primera especie $\Gamma$ verifica la igualdad: $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$, llamada fórmula de los complementos. En particular:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \quad \text{de donde} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

Esto prueba en particular que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ es un número trascendente.

## Completa

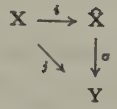
• *Axioma de aditividad completa.* — V.: KOLGOMOGOROV (Axioma de).

• *Teoría completa.* — Una teoría $\mathscr{T}$ de lenguaje L se llama completa si todo enunciado de L es decidible en $\mathscr{T}$.

## Completado

• *Completado de un cuerpo evaluado* (K, | |). — El completado $\hat{\mathrm{K}}$ de K para la topología definida por el valor absoluto $x \mapsto |x|$ puede ser canónicamente provisto de una estructura de cuerpo valuado completo para un valor absoluto $|\hat{}\,|$ que prolonga el de K. Se dice entonces que $(\hat{\mathrm{K}}, |\hat{}\,|)$ es el completado del cuerpo valuado (K, $|\hat{}\,|$). El cuerpo $\mathbf{R}$ [resp. $\mathbf{Q}_p$] es el completado de $\mathbf{Q}$ para el valor absoluto usual [resp. el valor absoluto $p$-ádico].

• *Completado de un espacio métrico* X. — Par $(\hat{X}, i)$, donde $\hat{X}$ es un espacio métrico completo e $i: X \to \hat{X}$ una aplicación uniformemente continua tal que si $(Y, j)$ es un par análogo, existe una única aplicación uniformemente continua $\sigma: \hat{X} \to Y$ tal que $j = \sigma \circ i$.
**R** es el completado de **Q** para la distancia usual. El cuerpo $\mathbf{Q}_p$ de los números *p*-ádicos es el completado de **Q** para la distancia *p*-ádica.




V. UNIVERSAL.

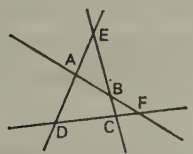
• *Completado proyectivo de un espacio afín, de un espacio vectorial.* — V. PROYECTIVO.

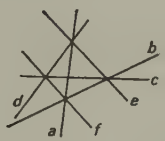
## Completitud

• (Lógica.) *Teorema de completitud.* — V. GÖDEL.

## Completo

• *Cuadrilátero y cuadrángulo completo.* — Figuras duales una de la otra; el cuadrilátero completo (véase abajo a la izquierda) está formado por cuatro rectas que se cortan dos a dos en seis puntos; el cuadrángulo completo (figura de la derecha) está formado por las seis rectas que unen dos a dos cuatro puntos afinmente independientes.




• *Cuerpo completo.* — Cuerpo valuado que es completo para la topología metrizable asociada a su valuación.

• *Espacio métrico completo.* — Un espacio métrico X es completo si y solamente si toda sucesión de Cauchy de elementos de X converge en X. Provistos de su distancia usual, **R** y $\mathbf{Q}_p$ son completos, pero **Q** no lo es. Un espacio métrico completo es igual a su completado.

• *Grafo completo.* — Grafo tal que para todo par $(x, y)$ de vértices distintos existe por lo menos un arco de extremidades $x$ e $y$ (V. CLIQUE).

• *Grafo bipartido-completo.* — V. BIPARTIDO-COMPLETO.

• *Retículo completo.* — Retículo E del que toda parte (finita o infinita) admite un extremo inferior y otro superior.

• *Sistema completo de sucesos de un espacio probabilizable* $(\Omega, \mathscr{A})$. — Partición de $\Omega$ constituida de sucesos de $\mathscr{A}$.

## Complexificado

• *Complexificado de un espacio vectorial real* E. — Espacio vectorial complejo:

$$E_c = (E^2, +, .)$$

donde la adición y la multiplicación externa son definidas por:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

y

$$(a+ib) \cdot (x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

para todo par $(x, y) \in E^2$, todo par $(x', y') \in E^2$ y todo número complejo $a + ib$.

## Componente

• *Componente conexo.* — V. Conexo.

## Componentes

• *Análisis en componentes principales.* — V. Datos (Análisis de).

• *Componentes de un tensor.* — V. Tensor.

• *Componentes de un vector sobre una base.* — Dado un vector $x$ de un espacio vectorial E sobre un cuerpo K y $(e_i)_{i \in I}$ una base de E, el vector $x$ se escribe de forma única bajo la forma: $x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$

con un número finito de $\alpha_i$ que no es nulo. Los escalares $\alpha_i$ se llaman los componentes o coordenados del vector $x$ sobre la base $(e_i)_{i \in I}$.
V. Contravariantes, Covariantes.

## Composición

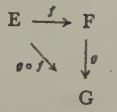
• *Ley de composición de funciones (o aplicaciones).* — Sea $\mathscr{F}(E, E)$ el conjunto de aplicaciones de E en E. Para todo par $(f, g)$ de $\mathscr{F}(E, E)$, la compuesta $f \circ g$ pertenece a $\mathscr{F}(E, E)$. La ley de composición interna «$\circ$» así definida sobre $\mathscr{F}(E, E)$ se llama ley de composición de las aplicaciones.

• *Ley de composición sobre un conjunto.* — V. Externa, Interna.

## Compuesta

• *Compuesta de dos funciones.* — Dadas dos funciones $f: E \to F$ y $g: F \to G$, se llama compuesta de $f$ y $g$ la función denotada $g \circ f$ definida de E en G por

$x \mapsto g(f(x))$. De este modo la función $x \mapsto \text{sen}\,(5x^2 + 3x - 4)$ es la compuesta de las funciones $f: x \mapsto 5x^2 + 3x - 4$ y $g: x \mapsto \text{sen}\, x$ de **R** en **R**.




En el caso en que $f \circ g$ y $g \circ f$ existan, son por regla general diferentes. Tal es el caso en este ejemplo, donde:

$$(g \circ f)(x) = \text{sen}\,(5x^2 + 3x - 4)$$

y $$(f \circ g)(x) = 5\ \text{sen}^2 x + 3\ \text{sen}\, x - 4.$$

En lugar de la expresión «compuesta de dos funciones» se encuentra la expresión «producto de dos funciones», utilizada sobre todo en geometría, o también la expresión «función de funciones», que va cayendo en desuso.

• *Compuesta de dos relaciones.* — Sean $\mathcal{R}$ una relación de E hacia F y $\mathcal{S}$ una relación de F hacia G. Se llama compuesta de $\mathcal{R}$ y de $\mathcal{S}$ la relación $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ de E hacia G que en $x$ asocia $z$ si y solamente si existe $y \in$ F tal que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{S}z$. Cuando $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son funciones, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ es una función.
V. COMPUESTA de dos funciones.

## Compuestas

• *Fórmula de probabilidades compuestas.* — Para todo par (A, B) de sucesos de probabilidades no nulas de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tenemos la fórmula: $P(A \cap B) = P(B)\ P_B(A) = P(A)\ P_A(B)$, donde $P_X(Y)$ designa la probabilidad condicional de Y relativa a X.

Nota. También $P_X(Y) = P(\bar{y}|x)$.

## Compuesto

• *Compuesto de dos elementos a y b de un conjunto* E *provisto de una ley de composición* $*$. — El elemento $a * b$ de E.

• *Compuesto de dos morfismas.* — V. CATEGORÍA.

• *Número compuesto.* — Entero natural engendrado por $n \geqslant 2$ enteros primos. Un número entero natural superior o igual a 2 es bien primo, bien compuesto.

## Compuestos

• *Compases compuestos.* — Nombres dados antiguamente a los inversores.

## Comprensión

• *Conjunto definido en comprensión.* — V. CONJUNTO.

## Común

• *Denominador común a varias fracciones* $a_1/b_1$, $a_2/b_2$, ..., $a_n/b_n$. — Denominador $d$ que permite escribir todas las fracciones bajo la forma:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d}; \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d}; \quad \ldots; \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{c_n}{d};$$

si las fracciones son irreductibles, el denominador común más simple es el mínimo común múltiplo de $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$.

• *Perpendicularidad común a dos rectas que se cruzan.* — V. QUE SE CRUZAN.

## Comunicación

• *Teoría estadística de la comunicación.* — Teoría matemática de la información.
V. INFORMACIÓN.

## Concatenación

De catena = cadena.
V. LIBRE (Monoide).

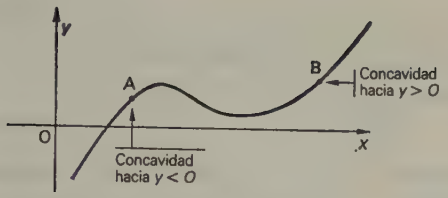
## Cóncava

• *Función cóncava.* — Función $f$ definida sobre una parte de un espacio vectorial real de valores en R cuya función opuesta $-f$ es convexa.

## Concavidad

Propiedad de ser cóncavo.

• *Concavidad de una curva* C *de ecuación cartesiana* $y = f(x)$. — Sea M un punto C de abscisa $x$. Si $f$ es convexo [resp. cóncavo] sobre un intervalo abierto I que contiene a $x$, se dice que, en un entorno de M, la curva C vuelve su concavidad hacia las ordenadas positivas [resp. hacia las ordenadas negativas]. Si $f$ admite una derivada segunda, C vuelve su concavidad, en un entorno de M, hacia las ordenadas positivas [resp. negativas] si y solamente si $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) < 0$).




## Cóncavo

• *Polígono o poliedro cóncavo.* — Polígono o poliedro que no es convexo.

## Concéntricas

• *Bolas, esferas concéntricas.* — Bolas, esferas de igual centro.

## Concéntricos

• *Círculos, circunferencias, discos concéntricos.* — Círculos, circunferencias, discos coplanarios de igual centro.

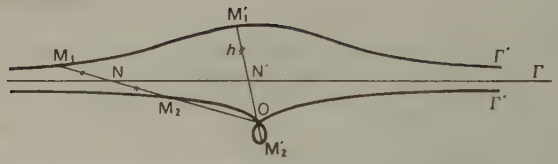
## Conclusión

(Usual.) Proposición obtenida como resultado de un razonamiento o de una demostración.
(Lógica.) 1) En la implicación $P \Rightarrow Q$, la proposición Q se llama la conclusión. V. PREMISA.
2) Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ una demostración formal del enunciado $A_n$; se dice que $A_n$ es la conclusión de esta demostración.

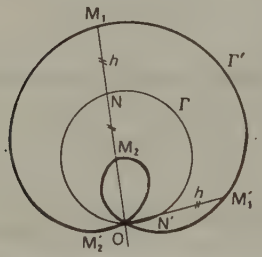
## Concoide

Se dice usualmente por una curva que tiene la forma de una concha.

• *Concoide de una curva.* — Sean $\Gamma$ una curva plana, O un punto del plano de $\Gamma$ y $h > 0$ un número real. Cuando N describe $\Gamma$, el lugar geométrico $\Gamma'$ de los puntos M alineados con O y N y tales que $MN = h$ se llama la concoide de $\Gamma$ relativamente a O y $h$. Por ejemplo, la concoide de una circunferencia por relación a uno de sus puntos es un caracol de Pascal.
V. NICOMEDES, PASCAL, TRISECTRIZ.




Concoide de recta (de Nicomedes)




Concoide de circunferencia: caracol de Pascal

## Concreta

• *Categoría concreta.* — Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es una categoría concreta si existe un funtor fiel F de $\mathscr{C}$ en la categoría de los conjuntos. Como ejemplos de categorías concretas citemos, por ejemplo, la categoría de los conjuntos, la categoría de los grupos, la categoría de los **R**-espacios vectoriales, la categoría de los espacios topológicos.

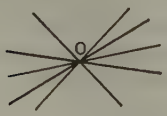
## Concurrencia

• *Punto de concurrencia de varias rectas concurrentes.* — Punto de intersección de esas rectas.

## Concurrentes

• *Conjuntos concurrentes.* — En geometría se dice de conjuntos cuya intersección no es vacía.

• *Rectas concurrentes.* — Varias rectas distintas se llaman concurrentes si todas ellas pasan por un mismo punto O llamado punto de concurrencia.



## Condición

V. CAUCHY, HÖLDER, INICIAL, LIPSCHITZ, NECESARIO, SUFICIENTE.

## Condicional

Sinónimo de implicación.

• *Probabilidad condicional relativamente a un suceso* A *de probabilidad no nula de un espacio probabilizado* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. — Probabilidad $P_A$ definida sobre $(\Omega, \mathscr{A})$ por: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ para todo suceso $B \in \mathscr{A}$. Se dice que $P_A(B)$ es la probabilidad para que B se realice sabiendo que A se ha realizado.

V. BAYES, COMPUESTAS (Probabilidades), TOTALES (Probabilidades).

## Conector

Símbolo del cálculo proposicional o del cálculo de predicados.

• *Lista de conectores más utilizados:*

| *Signos* | *Nombres* | *Traducción* |
|---|---|---|
| $\neg$ | Negación | No |
| $\wedge$ | Conjunción | Y |
| $\vee$ | Disyunción | O |
| $\Rightarrow$ | Implicación | Implica<br>o: si... entonces |
| $\Leftrightarrow$ | Equivalencia lógica | Si y solamente si |

Las traducciones son sólo aproximativas. La verdadera definición de un conector es su tabla de verdad.

Los signos de esta lista no son universales. Otros autores representan los conectores de forma diversa.

$\sim$ en lugar de $\neg$
$\approx$ en lugar de $\Leftrightarrow$

Otros autores llaman doble implicación a la equivalencia lógica. En teoría hay tantos conectores como tablas de verdad posibles; en particular, hay 16 conectores binarios (es decir, que operan sobre dos enunciados).

V. BICONDICIONAL, CONDICIONAL, CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN, EQUIVALENCIA, EXCLUSIVO (O), EXISTENCIAL (Símbolo), IMPLICACIÓN, INFERENCIA, NECESARIO, NECESARIO Y SUFICIENTE, NEGACIÓN, PEIRCE, SHEFFER, SUFICIENTE, UNIVERSAL (Símbolo), VERDAD (Tabla de).

## Conexa

• *Parte conexa de un espacio topológico* E. — Parte que, provista de la topo-

logía inducida por la de E, es un espacio conexo. De forma intuitiva, tal parte es «de una sola pieza». Las partes conexas de **R** son intervalos: $[a, b[$, $]-\infty, b]$, etcétera.

## Conexidad

Propiedad de ser conexo.

## Conexo

• *Componente conexa de un grafo* $G = (S, U)$. — Sub-grafo $G_A$ conexo de G mayor parte conexa de E que contiene $x$; los componentes conexos de E son cerrados y forman una participación de E.

• *Componente conexo de un grafo* G=(S, U). — Sub-grafo $G_A$ conexo de G engendrado por una parte A de S tal que para todo vértice $x$ de G que no pertenezca a A el sub-grafo engendrado por $A \cup \{x\}$ no es conexo.

• *Espacio conexo por arcos.* — Espacio topológico del que dos puntos cualesquiera pueden estar unidos por un camino de ese espacio. Ejemplo: los espacios vectoriales normados. Todo espacio conexo por arco es conexo; la recíproca es falsa.

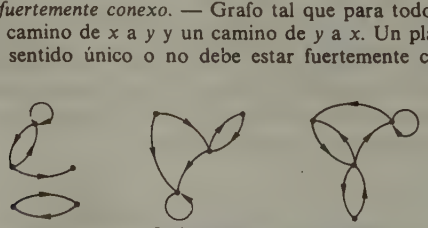
• *Espacio localmente conexo.* — Espacio topológico cada uno de cuyos puntos poseen un sistema fundamental de entornos conexos. Así, **R** es localmente conexo.

• *Espacio simplemente conexo.* — Espacio conexo por arcos tal que todo lazo es homótopo a un punto; para $n \geqslant 3$ los espacios $\mathbf{R}^n - \{0\}$ son simplemente conexos, pero $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ no lo es. Todo espacio simplemente conexo es conexo; la recíproca es falsa.

• *Espacio topológico conexo (o espacio conexo).* — Espacio topológico del que las únicas partes a la vez abiertas y cerradas (*of*) son el conjunto vacío y E. Respecto de sus topologías naturales, **R** es conexo, pero **Q** no lo es.

• *Grafo conexo.* — Grafo tal que para todo par $\{x, y\}$ de vértices distintos, existe una cadena que une $x$ e $y$.
V. CONEXO (Grafo fuertemente).

• *Grafo fuertemente conexo.* — Grafo tal que para todo par $(x, y)$ de vértices existe un camino de $x$ a $y$ y un camino de $y$ a $x$. Un plano de ciudad con sus calles de sentido único o no debe estar fuertemente conexo.



Grafo no conexo — Grafo conexo (no fuertemente) — Grafo fuertemente conexo

## Confianza

• *Intervalo de confianza.* — Sea $\hat{\theta}$ una estimación de un parámetro $\theta$. Si se conoce un par $(\varepsilon, \alpha)$ de números reales positivos tales que la probabilidad del suceso $\hat{\theta}-\varepsilon<\theta<\hat{\theta}+\varepsilon$ sea igual a $1-\alpha$, se dice que el intervalo $]\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon[$ es un intervalo de confianza con grado de confianza $1-\alpha$.

## Configuración

En la terminología más amplia, una configuración viene dada por:
1) un conjunto finito E cuyos elementos son llamados según el contexto puntos, vértices, variedades, etc.;
2) una familia de partes de E (llamadas rectas o aristas o bloques, etc.) que verifican con E condiciones de regularidad de naturaleza algebraica o topológica.

*Ejemplos:* una disposición, una combinación de $p$ objetos tomados entre $n$ objetos; una permutación de $n$ objetos; una ordenación de paquetes de tamaños diversos en un cajón o en una maleta de forma y de dimensión dadas; un plano proyectivo o afín cuyo número de puntos es finito o la disposición característica de un cuadrado bi-latino ortogonal de orden dado (V. el teorema de Bose-Parker-Shrikhande). A veces, la palabra configuración se emplea en el sentido restrictivo siguiente: se exige que todos los bloques tengan igual cardinal $k$ y que toda parte de E en $t$ elementos ($t < k$) esté incluida en un número constante $\lambda$ de bloques.

V. COMBINATORIA.

## Configuraciones

• *Espacio de configuraciones.* — V. LAGRANGE (Mecánica de).

## Conforme

• *Transformación o representación conforme.* — Función compleja de una variable compleja, que conserva los ángulos orientados. Ejemplo: las semejanzas directas $z \mapsto \lambda z$, de C en C, donde $\lambda$ es un número complejo no nulo.

## Congruencia

• *Congruencia de matrices.* — Relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre el conjunto $M_n(K)$ por $M\mathcal{R}N$ si y solamente si las matrices M y N son congruentes.

• *Congruencia de rectas.* — Conjunto de rectas del espacio afín $\mathbf{R}^3$ de ecuaciones $x = az + p$ e $y = bz + q$ cuyos parámetros $p$ y $q$ son funciones de los parámetros $a$ y $b$.

• *Congruencia sobre un conjunto* E *provisto de una ley de composición interna* *. — Equivalencia sobre E compatible con esta ley. Esta expresión fue reservada durante largo tiempo para el caso particular siguiente: sea $n \in \mathbf{N}$; dos enteros $x$ e $y$ se llaman congruentes módulo $n$ cuando $x - y$ es múltiplo de $n$ y se lo describe $x \equiv y \pmod{n}$. Así, tenemos $2 \equiv -3 \pmod 5$ y $-1 \equiv 8 \pmod 9$. Más generalmente dos reales $x$ e $y$ se llaman congruentes módulo $\alpha \in \mathbf{R}$ si existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $x - y = k\alpha$.
Las congruencias intervienen en numerosos problemas, por ejemplo, en astronomía cuando se buscan las fechas sucesivas para las que se halla realizada una configuración dada, así como frecuentemente en teoría de los números. V. CLASE.

## Congruente

Sean $\mathscr{R}$ una congruencia sobre un conjunto E y $a$, $b$ dos elementos de E tales que $a\mathscr{R}b$; se dice entonces que $a$ es congruente con $b$, o que $a$ y $b$ son congruentes con módulo $\mathscr{R}$ (V. CONGRUENCIA). Congruente se empleaba antiguamente por equivalente (e incluso, a veces, por igual).

## Congruentes

• *Figuras congruentes del plano euclidiano* $\mathbf{R}^2$ *o del espacio euclídeo* $\mathbf{R}^3$. — Sinónimo de figuras directamente isométricas. Intuitivamente, dos figuras son congruentes si, al desplazarlas, se las pueden superponer.

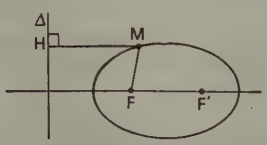
• *Matrices congruentes.* — Matrices cuadradas M y N de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ tales que existe una matriz cuadrada inversible P que verifica $\mathrm{N} = {}^t\mathrm{PMP}$. Dos matrices congruentes son equivalentes, pero la recíproca es falsa.

## Cónica

• *Cónica del plano afín* $\mathbf{R}^2$. — Curva algebraica de $\mathbf{R}^2$ de orden 2. Ecuación:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0 \quad \text{con} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

Las cónicas propias (V. ESPECIE) pueden definirse en un plano afín euclídeo como lugar de los puntos M cuya relación MF/MH de las distancias a una recta fija y a un punto fijo F es constante. El punto F se llama un núcleo de la cónica y $\Delta$ la directriz de la cónica asociada al núcleo F. La relación $e = \dfrac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}}$ es la excentricidad de la cónica.




Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola. Admite dos núcleos y dos directrices.

Si $e = 1$, la cónica es una parábola. Admite un solo núcleo.
Si $e < 1$, la cónica es una elipse. Admite dos núcleos y dos directrices.
Fue Apolonio de Pérgamo, fundador de la teoría de las cónicas, quien parece haber introducido las palabras: elipse, hipérbola y parábola.
V. CÓNICAS (Secciones).
V. CENTRO (Cónicas de), DESCOMPUESTA, DIÁMETRO, DIRECTORES (Círculos), ELIPSE, ESPECIE, EXTERIOR, FOCAL (Distancia), HIPÉRBOLA, INTERIOR, PARÁBOLA, PARÁMETRO, PRINCIPAL (Centro), VÉRTICES.

• *Cónica del plano proyectivo* $P_2(\mathbf{R})$. — Conjunto de puntos de $P_2(\mathbf{R})$ cuyas coordenadas homogéneas $(x, y, t)$ anulan una forma cuadrática no nula sobre $\mathbf{R}^3$. Su ecuación en coordenadas homogéneas es, por tanto, de la forma $XA^tX = 0$, donde X es la matriz línea $(x\,y\,t)$y donde A es una matriz cuadrada real simétrica de orden 3. Las cónicas del completado proyectivo de $\mathbf{R}^2$ son las cónicas de $\mathbf{R}^2$ a las que se añaden puntos de la recta del infinito.
V. ESPECIE.

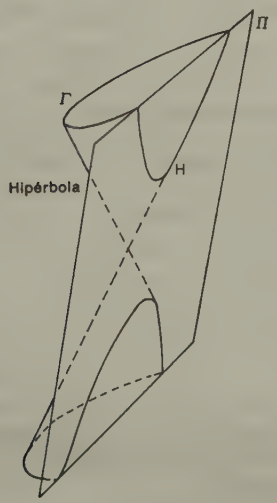
• *Cónica propia o impropia.* — V. ESPECIE.

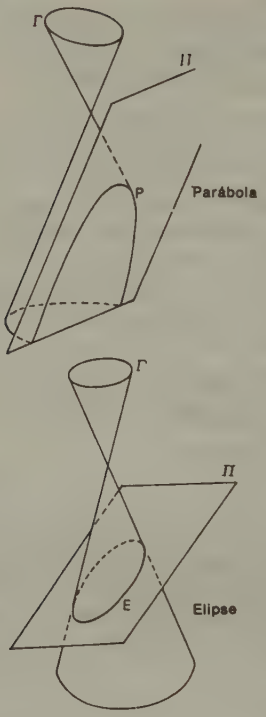
• *Proyección cónica.* — Proyección central.

• *Superficie cónica.* — Sinónimo del cono.

## Cónicas

• *Secciones cónicas.* — Sinónimo de cónicas. Son las secciones de un cono de revolución por un plano, de donde les viene su nombre (véase el dibujo inferior). El *Tratado de las cónicas*, de Apolonio de Pérgamo, contiene lo esencial de su teoría clásica salvo la noción de la directriz.
V. APOLONIO, HAZ.






## Conjetura

Hipótesis emitida, *a priori*, sobre la exactitud o inexactitud de un enunciado cuya demostración se ignora.
V. BERTRAND, CARMICHAEL, CATALÁN, ERDOS, EULER, FERMAT, GOLDBACH, HADWIGER, HEAWOOD, RIEMANN.

- *Conjetura de los cuatro colores.* — V. CUATRO.
- *Conjetura de Cantor.* — Hipótesis del continuo.
V. CONTINUO.
- *Conjetura de los cuatro colores.* — V. CUATRO.

## Conjugada

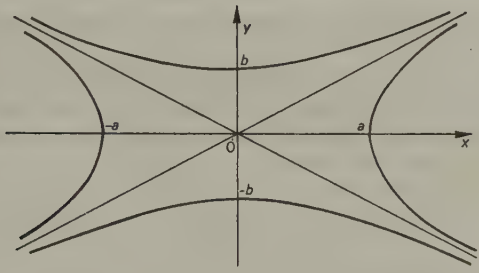
- *Conjugada o función conjugada de una función f de* E *en* C. — Función de $f$ de E en C definida por $x \to \overline{f(x)}$, donde $\overline{f(x)}$ es el conjunto del complejo $f(x)$. Si una función $f$ es la conjugada de una función $g$, entonces $g$ es la conjugada de $f$; se dice que $f$ y $g$ son conjugadas.

• *Conjugada o matriz conjugada de una matriz de coeficientes complejos* $M = (\alpha_{ij})$. — La matriz $\overline{M} = (\bar{\alpha}_{ij})$. Si una matriz A es conjugada de una matriz B, entonces B es conjugada de A. Se dice que A y B son conjugadas.

• *Hipérbola conjugada de una hipérbola de ecuación cartesiana* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. —

Hipérbola de ecuación: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas y el mismo centro. Un par de diámetros conjugados para la una es también un par de diámetros conjugados para la otra.
V. APOLONIO.

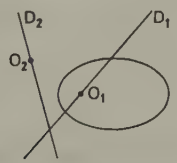



## Conjugadas

• *Funciones conjugadas.* — V. CONJUGADA (de una función).

• *Matrices conjugadas.* — V. CONJUGADA (de una matriz).

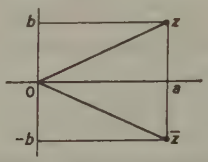
• *Rectas conjugadas por relación a una cónica.* — Rectas $D_1$ y $D_2$ del plano de la cónica tales que cada una de ellas sea la polar de un punto de la otra por relación a la cónica.




## Conjugado

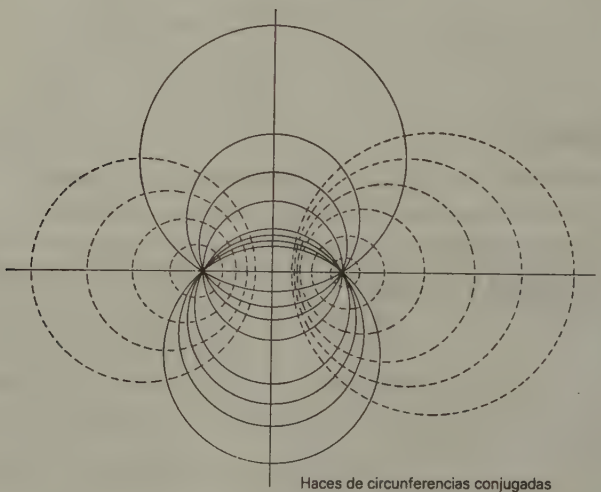
• *Conjugado o número complejo conjugado de un número complejo* $z = a + ib$. — El número complejo $\bar{z} = a - ib$. Si $z' = \bar{z}$, entonces $z = \bar{z}$; se dice que $z$ y $z'$ son conjugados. Se muestra que:

$\mathrm{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = i(\bar{z} - z)/2$, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$; un complejo $z$ es real si y solamente si $z = \bar{z}$; todo par $(z, z')$ de números complejos verifica: $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ y $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$.




• *Conjugado o cuaternio conjugado del cuaternio* $a + bi + cj + dk$. — El cuaternio $a - bi - cj - dk$.

• *Haz conjugado de un haz de círculos* $\mathscr{F}$. — Conjunto de círculos ortogonales a todos los círculos del haz $\mathscr{F}$. Es un haz de círculos cuya recta de los centros es el eje radical de $\mathscr{F}$ y cuyo eje radical es la recta de los centros de $\mathscr{F}$. Si $\mathscr{F}$ es el haz conjugado de $\mathscr{F}'$ entonces $\mathscr{F}'$ es el haz conjugado de $\mathscr{F}$. Se dice que $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}'$ son conjugados. Si uno de los haces es de puntos de base, el otro es de puntos de Poncelet. Si uno de los haces es de punto singular, el otro es también de punto singular.



Haces de circunferencias conjugadas

• *Sub-grupo conjugado de un sub-grupo.* — Un sub-grupo H' de un grupo G se dice conjugado de un sub-grupo H de G si existe un automorfismo interior $f$ de G tal que $H' = f(H)$. El sub-grupo H es entonces conjugado de H'; se dice que H y H' son conjugados.

V. SYLOW (Teoremas de).

## Conjugados

• *Diámetros conjugados de una cónica.* — Dos diámetros son conjugados si cada uno de ellos es el conjunto de los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro. Si se considera la cónica en el completado proyectivo de $\mathbf{R}^2$, dos diámetros son conjugados si el uno es la polar del punto de infinito de la dirección del otro.

• *Haces de círculos conjugados.* — V. CONJUGADO (Haz).

• *Números complejos conjugados.* — V. CONJUGADO (de un número complejo).

• *Puntos conjugados con relación a otros dos.* — Dos puntos A y B son conjugados con relación a dos puntos C y D si A, B, C y D están alineados y si la división (A, B, C, D) es armónica.

• *Puntos conjugados por relación a una cónica de ecuación* $(x, y, t)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0$ *en coordenadas homogéneas.* — Puntos $P(x_1, y_1, t_1)$ y $Q(x_2, y_2, t_2)$ del plano tales que: $(x_1, y_1, t_1)\, A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = 0$. En el caso en que la recta PQ corte la cónica en dos puntos R y S, los puntos P y Q son conjugados con relación a R y S.

• *Puntos conjugados con relación a dos rectas coplanarias* $D_1$ y $D_2$. — Puntos conjugados con relación a la cónica $D_1 \cup D_2$.

• *Puntos conjugados con relación a una cuádrica de ecuación:* $(x, y, z, t)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$ *en coordenadas homogéneas.* — Puntos $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2, t_2)$ tales que $(x_1, y_1, z_1, t_1)\, A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = 0$. En el caso en que la recta PQ corte la cuádrica en dos puntos R y S, los puntos P y Q son conjugados con relación a R y S.

• *Sub-grupos conjugados.* — V. CONJUGADO (Sub-grupo).

## Conjunción

(Lógica.) Conector denotado frecuentemente $\wedge$ (se lee «y») definido por la tabla de verdad siguiente:

| A | B | A ∧ B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Obsérvese que la posición A $\wedge$ B es verdadera si y solamente si las proposiciones A y B son simultáneamente verdaderas.
V. PROPOSICIONAL (Cálculo).

## Conjunta

• *Ley conjunta.* — Sean X e Y dos variables aleatorias discretas definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La función $p: X(\Omega) \times Y(\Omega) \to R$ definida por $p(x_i, y_j) = P(X^{-1}(x_i) \cap Y^{-1}(y_j))$ se llama ley conjunta de X e Y. Esta función permite definir una probabilidad sobre $X(\Omega) \times Y(\Omega)$; el número real $p(x_i, y_j)$, denotado también $p_{ij}$, es la probabilidad para que X tome el valor $x_i$ e Y el valor $y_j$.
V. MARGINALES (leyes).

## Conjunto

Noción primitiva de las matemáticas como las de elemento y pertenencia. No se puede definir, como sucede con el punto, la recta o el plano en geometría, pero se dan sus relaciones y sus reglas de empleo. Por ejemplo: sean E y F dos conjuntos; para que sea E = F es necesario y suficiente que las relaciones $x \in E$ y $x \in F$ sean equivalentes. Intuitivamente, la noción de conjunto evoca la idea de colección, de agrupación de objetos llamados elementos del conjunto considerado. Pero esta idea intuitiva, aunque no está formalizada, conduce a paradojas tan célebres como la de Russell.
La teoría de los conjuntos proviene principalmente de los trabajos de Bolzano, Dedekind y Cantor (a finales del siglo XIX). Desde entonces, se han propuesto varios sistemas axiomáticos. En el de Zermelo-Fraenkel todos los objetos considerados son conjuntos y precisan nueve axiomas en su modo de empleo. El sistema de Neumann-Bernays-Gödel distingue las clases y los conjuntos (que son clases particulares) para poder hablar de la clase de todos los conjuntos, la cual no puede ser un conjunto. Se ignora si cada uno de estos sistemas es o no contradictorio, pero se sabe, sin embargo, que si uno es contradictorio, el otro también lo es.
V. PERTENENCIA, CARDINAL, CARROLL (Diagrama de), CARTESIANO, (Producto), CLASE, numerable, DIFERENCIA, ELEMENTO, EQUIPOTENCIA, EULER (Diagrama de), FINITO, INCLUSIÓN, INFINITO, INTERSECCIÓN, KARNAUGH, (Diagrama de), PARTE, PARTICIÓN, POTENCIA, RELACIÓN, REUNIÓN, SAGITALL (Diagrama de), SUBCONJUNTO, SIMÉTRICA (Diferencia), VENN (Diagrama), VACÍO.

• *Algebra de partes de un conjunto* E. — Anillo $\mathscr{C}$ de partes de E que contienen E; entonces $(\mathscr{C}, \cap, \cup,$ E) es un álgebra de Boole. Cuando $\mathscr{C} =$ (E), se habla del álgebra de las partes de E.

• *Anillo de partes de un conjunto* E. — Parte no vacía $\mathscr{C}$ del conjunto (E) de las partes de E tales que la reunión y la diferencia de dos elementos de $\mathscr{C}$ pertenecen a $\mathscr{C}$; entonces su intersección pertenece a $\mathscr{C}$ y $\phi \in \mathscr{C}$.
V. SIGMA ($\sigma$-anillo).

• *Conjunto definido por extensión.* — Se dice a veces de un conjunto definido, en el que se dan explícitamente sus elementos: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

• *Conjunto definido por comprensión.* — Se dice para un conjunto definido al dar una de sus propiedades características:

$$E = \{x \in N;\ 0 \leqslant x \leqslant 8\}.$$

• *Conjunto de las partes de un conjunto.* — V. PARTES.

## Conjuntos

V. CONCURRENTES, DISJUNTOS, ENCAJADOS, EQUIPOTENTES, SEPARADOS.

• *Algebra de conjuntos.* — Algebra de Boole, utilizando las nociones de inclusión, intersección, reunión y de complementarios introducidas en la teoría de los conjuntos.
V. PARTES (Conjunto de las).

• *Algebra (o anillo) de conjuntos.* — Sinónimo de álgebra (o anillo) de las partes de un conjunto.
V. CONJUNTO (Algebra o anillo de partes de un).

• *Teoría de los conjuntos.* — V. CONJUNTO.

## Conjuntista

Que tiene relación con los conjuntos; de naturaleza conjuntista, propiedad conjuntista, etc.

• *Propiedad conjuntista.* — Propiedad que puede demostrarse utilizando solamente los resultados de la teoría de los conjuntos.

• *Topología conjuntista.* — Fundada en 1879 por Cantor, este término designaba entonces lo que se denomina topología o topología general; se empleaba por oposición a topología combinatoria.

## Conmutador

• *Conmutador de dos elementos a y b de un grupo* G. — El elemento $aba^{-1}b^{-1}$.

## Conmutadores

• *Grupo de conmutadores de un grupo* G. — Subgrupo engendrado por todos los conmutadores de G.
V. DERIVADO (Grupo).

## Conmutante

Sinónimo de centralizador.

## Conmutativa

• *Algebra conmutativa.* — Es el estudio de los anillos conmutativos que comprende en particular el estudio de los módulos sobre esos anillos. Se desarrolla en estrecha relación con la geometría algebraica.

• *Algebra conmutativa (estructura).* — Algebra cuya multiplicación interna es conmutativa.

• *Convergencia conmutativa de un producto infinito.* — V. INFINITO (Producto).

• *Convergencia conmutativa de una serie.* — Una serie $\Sigma u_n$ de términos en un espacio vectorial normado E es conmutativamente convergente si, para toda biyección $\varphi$ de N sobre N, las series $\Sigma u_{\varphi(n)}$ convergen y tienen igual suma. Una serie $\Sigma u_n$ es conmutativamente convergente si y solamente si la familia $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es sumable. Para las series de términos complejos, la convergencia conmutativa equivale a la convergencia absoluta.

• *Ley conmutativa.* — Una ley de composición interna $*$ sobre un conjunto E es conmutativa si cualesquiera que sean los elementos $x$ e $y$ de E se tiene $x * y = y * x$; la adición y la multiplicación en **R** son conmutativos, la exponenciación y la sustracción no lo son. Por regla general, la composición de las funciones no es conmutativa.

## Conmutativamente

• *Producto infinito conmutativamente convergente.* — V. INFINITO (Producto).

• *Serie conmutativamente convergente.* — V. CONMUTATIVA (Convergencia).

## Conmutatividad

Propiedad de ser conmutativo.
V. CONMUTATIVA, CONMUTATIVO.

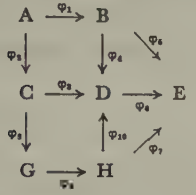
## Conmutativo

• *Anillo conmutativo.* — Anillo cuya multiplicación es conmutativa. Los anillos **Z** y $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ son conmutativos; el anillo $\mathbf{M}_3(\mathbf{C})$ no lo es.

• *Cuadrado conmutativo.* — Sinónimo de rectángulo conmutativo.

• *Cuerpo conmutativo.* — Cuerpo cuya multiplicación es conmutativa. Todo cuerpo finito es conmutativo; los cuerpos **R** y **C** son conmutativos, el cuerpo **H** de los cuarternios no lo es.

• *Diagrama conmutativo.* — Dadas unas aplicaciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, se dice que el diagrama siguiente es conmutativo si todos los triángulos y cuadrados que lo componen son conmutativos:

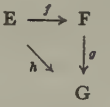



• *Grupo conmutativo.* — Grupo cuya ley es conmutativa. El grupo $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ es conmutativo; $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ no lo es.
V. ABELIANO.

• *Magma conmutativo.* — Par $(E, *)$, donde E es un conjunto y $*$ una ley de composición interna sobre E conmutativa.

• *Rectángulo conmutativo.* — Dadas cuatro aplicaciones, $f$, $g$, $h$ y $k$, el «rectángulo» siguiente es conmutativo si $k \circ h = g \circ h$.

• *Triángulo conmutativo.* — Dadas tres aplicaciones, $f$, $g$ y $h$, el «triángulo» siguiente es conmutativo si $h = g \circ f$.




## Connelly, Robert (1942- )

• *Poliedro de Connelly.* — Poliedro flexible de caras rígidas que tiene 24 vértices, 66 aristas y 44 caras. Su existencia fue establecida en 1978 por Connelly, que refutaba así una conjetura de Cauchy. Es el primero pero no el más pequeño de una familia de $n$ vértices, $(3n - 6)$ aristas, $(2n - 4)$ caras. Además, Connelly ha probado que toda flexión de ese poliedro deja su volumen invariante.
V. FLEXAEDROS, FLEXIBLE.

• *Teorema de Connelly.* — Existe un poliedro flexible de caras rígidas.

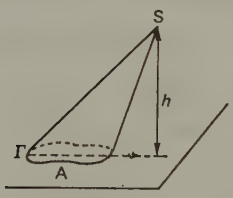
## Cono

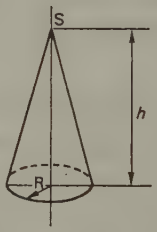
Superficie reglada cuyas generatrices pasan por un punto fijo S llamado vértice del cono. Un cono está perfectamente determinado por su vértice y una

curva de su superficie que encuentra a todas las generatrices llamada una directriz del cono. Una propiedad característica del cono es ser una superficie invariante por toda homotecia de centro S. En un sistema de referencias $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbf{R}^3$, la ecuación de un cono de vértice O es de la forma $f(x, y, z)=0$, donde $f$ es un polinomio homogéneo.

V. APUNTADO, ASÍNTOTA, CIRCUNSCRITO, DESPUNTADO, ISÓTROPO, REVOLUCIÓN, SÓLIDO (Angulo).

• (Usual.) *Cono de vértice* S *y altura h.* — Sólido limitado por un cono de vértice S y un plano situado en la distancia $h$ de S cuya intersección con todas las generatrices es una curva cerrada (círculo, elipses, por ejemplo) llamada base. Su volumen es $Ah/3$, donde A es el área de la base. En el caso de un cono de revolución que posee una base de radio R, el volumen es $\pi R^2 h/3$ y el área lateral $\pi a R$, donde $a$ designa la distancia, llamada apotema, del vértice S a un punto cualquiera del círculo de base.




• *Cono de luz.* — V. LUZ.

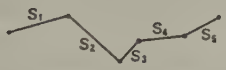
• *Tronco de cono.* — Volumen limitado por un cono y dos planos paralelos que encuentran todas las generatrices. Las secciones de estos planos y del cono se denominan las bases del tronco de cono. La distancia entre los dos planos se llama altura.

## Conoide

Superficie engendrada por una recta paralela a un plano fijo que encuentra una recta fija y una curva fija (directriz). En lugar de dar la curva fija se impone a veces que la recta sea tangente a una superficie fija.
V. PLUCKER, RECTA.

## Consecutivos

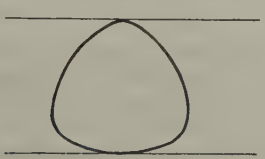
• *Términos consecutivos de una serie* $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — Términos de la forma $u_k$ y $u_{k+1}$. Ejemplo: los segmentos $S_3$ y $S_4$ de la línea poligonal ($S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$).




## Constante

Empleado por abuso por función constante; su sentido preciso depende entonces del contexto. Se emplea este término para ciertos números notables.
V. EULER, MASCHERONI.

• *Curva de anchura constante.* — Curva plana tal que la distancia entre dos rectas soportes paralelas cualquiera sea constante. Las figuras (o polígonos) de Reuleaux son curvas de anchura constante, pero existen curvas de anchura constante de las que ningún arco es circular. Todas las curvas de anchura constante que tienen la misma anchura tienen el mismo perímetro. La circunferencia es la única curva de anchura constante que admite un punto (su centro) situado a igual distancia de todos sus puntos.



• *Función constante.* — Función $f: E \to F$ tal que existe $a \in F$ que verifica $f(x) = a$ para todo $x \in E$.

• *Función constante por trozos.* — Función en escaleras.
V. ESCALERAS.

• *Variación de la constante.* — Método utilizado para resolver ciertas ecuaciones diferenciales lineales con segundo miembro tales que $A(x)y' + B(x)y = C(x)$. La solución general de la ecuación sin segundo miembro $A(x)y' + B(x)y = 0$ es de la forma siguiente: $y = k.v(x)$, donde $k \in R$ es una constante. Para obtener una solución particular $y_0$ de la ecuación inicial, se trata a $k$ como una función de $x$, buscando $y_0$ bajo la forma $y_0 = k(x).v(x)$.

• (Lógica.) *Constante de un lenguaje.* — V. LENGUAJE.

## Construcción con la regla y el compás

Numerosos problemas de geometría elemental se expresan en términos de construcciones con la regla y el compás, por ejemplo, la trisección del ángulo o la construcción de los polígonos regulares. Aunque este dominio haya tratado de erigirse en rama autónoma (la geometrografía), necesita mucha imaginación y posee notables resultados: la imposibilidad de la trisección de todos los ángulos con la regla o con el compás, la posibilidad (respectivamente, la imposibilidad) de construir el polígono regular de 17 lados (respectivamente, de 7 lados), etc., ha caído algo en desuso en la actualidad.

Un problema de construcción con la regla y el compás equivale a determinar una serie finita $M_1$, $M_2$, ..., $M_n$ de puntos del plano, donde cada $M_i$ para $i \geqslant 3$ es la intersección de dos rectas, de dos círculos o de una recta y de un círculo obtenidos a partir de $M_1$, $M_2$, ..., $M_{i-1}$ para una de las dos construcciones elementales siguientes:

— trazar una recta que pase por $M_j$ y $M_k$ con $j < k \leqslant i - 1$;

— trazar un círculo de centro $M_j$ y de radio $M_hM_k$ con $j$, $h$, $k \leqslant i - 1$.

V. CONSTRUCTIBLE, CUADRATURA, DUPLICACIÓN, GAUSS (Teorema de), MOHR-MASCHERONI, NAPOLEÓN-MASCHERONI (Problema de), RECTIFICACIÓN, TRISECCIÓN.

## Constructible

Que puede ser construido, sobre-entendido a veces, por un proceso finito.

• *Ángulo constructible.* — Ángulo cuyo coseno es un número real constructible.

• *Círculo constructible.* — V. CONSTRUCTIBLE (Punto).

• *Figura constructible.* — Figura cuyos puntos, rectas o círculos son constructibles.

• *Número constructible.* — En $\mathbf{R}^2$, se consideran los dos puntos $M_1 = (1, 0)$ y $M_2 = (0, 1)$. Se dice que un número real es constructible si es una coordenada de un punto constructible a partir de $M_1$ y de $M_2$. El conjunto de los números constructibles es un sub-cuerpo de $\mathbf{R}$ formado de números algebraicos; es, por tanto, numerable. El número real $\sqrt[3]{2}$ no es constructible.

V. WANTZEL.

• *Polígono regular constructible.* — Polígono regular de $n$ lados tal que el ángulo de medida $2\pi/n$ en radianes sea constructible. Un polígono semejante es constructible si y solamente si $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_r$, donde $k \in \mathbf{N}$ y donde los $p_i$ son números primos de Fermat distintos (Teorema de Gauss).

• *Punto constructible.* — Sean $M_1$ y $M_2$ dos puntos distintos de un plano P; un punto M de P es constructible a partir de $M_1$ y $M_2$ si existe una serie $M_3$, ..., $M_n = M$ de P, donde cada $M_i$ para $i \geqslant 3$ es:

— bien la intersección de dos rectas distintas (llamadas constructibles), cada una de las cuales pasa por dos de los puntos $M_1$, $M_2$, ..., $M_{i-1}$;

— bien la intersección de una recta que pasa por dos de los puntos $M_1$. ...,

$M_{i-1}$ con un círculo (llamado constructible) centrado sobre uno de esos puntos y que tiene por radio la longitud de uno de los segmentos que unen dos de los puntos $M_1$, ..., $M_{i-1}$;
— bien la intersección de dos círculos distintos que tienen por centros dos de los puntos $M_1$, ..., $M_{i-1}$ y por radios la longitud de dos segmentos de la forma $M_h M_k$ con $h \leqslant i-1$, $k \leqslant i-1$ y $h \neq k$.
Si A y B son dos puntos constructibles, el punto medio del segmento AB es un punto constructible.

• *Recta constructible.* — V. CONSTRUCTIBLE (Punto).

## Constructibles

• *Conjuntos constructibles.* — Son los conjuntos del más pequeño universo L que satisface a los axiomas de la teoría de los conjuntos, conteniendo todos los ordinales y todos los elementos de los conjuntos E tales que $E \in L$. Esta noción ha sido introducida por Gödel para demostrar la no-contradicción del axioma de la elección y de la hipótesis del continuo.
V. GÖDEL.

## Contacto

Hay contacto en un punto M entre dos superficies (o dos curvas) si en ese punto las dos superficies (o las dos curvas) admiten un mismo plano tangente (o igual tangente).
V. ORDEN.

## Contexto

• *Gramáticas formales fuera de contexto y de contexto ligado.* — V. CHOMSKY (Clasificación de).

## Contingencia

• *Contingencia de dos variables aleatorias discretas* X *e* Y. — Número que proporciona una información sobre la dependencia de X e Y. Si X toma los valores $(x_i)\, i \in I$ y si Y toma los valores $(y_j)_{j \in J}$, la contingencia de X e Y es el número:

$$\varphi(X, Y) = \left( \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \frac{[P(A_i \cap B_j) - P(A_i)\,P(B_j)]^2}{P(A_i)\,P(B_j)} \right)^{1/2}$$

donde $A_i$ y $B_j$ son los sucesos $X = x_i$ e $Y = y_j$. La contingencia es nula si y solamente si X e Y son independientes.

• *Cuadro de contingencia.* — Cuadro utilizado en análisis de las correspondencias para clasificar los valores tomados por dos series de variables estadís-

ticas, una de ellas llamada de los «individuos» y la otra de los «caracteres». Por ejemplo, si los individuos $I_1$, $I_2$, $I_3$ son calificaciones profesionales y los caracteres $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, tipos de alojamiento, el cuadro de contingencia siguiente indica en la casilla $(I_i, C_j)$ el porcentaje de personas que tienen la calificación $I_i$ y habitan $C_j$.

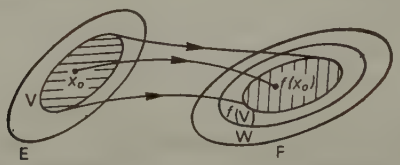
| | | C | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
| I | $I_1$ | 20 | 10 | 5 | 10 |
| | $I_2$ | 5 | 12 | 10 | 8 |
| | $I_3$ | 8 | 4 | 5 | 3 |

## Contingente

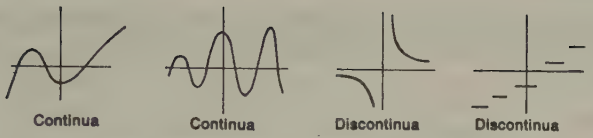
• *Contingente de una parte* E *de un espacio afín euclídeo en un punto de acumulación* A *de* E. — Conjunto de las semi-tangentes en A en la parte E. V. PARATINGENTE.

## Continua

• *Aplicación continua en un punto.* — Una aplicación $f$ de un espacio topológico E en un espacio topológico F es continua en $x_0 \in E$ si para todo entorno W de $f(x_0)$ en F, existe un entorno V de $x_0$ en E cuya imagen $f(V)$ por $f$ está contenida en W. Esto es la expresión matemática de la frase «$f(x)$ tiende hacia $f(x_0)$ cuando $x$ tiende hacia $x_0$». En el caso en que E y F sean espacios métricos, $f$ es continua en $x_0 \in E$ si, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que $d(x, x_0) \leqslant \alpha$ entraña $d(f(x), f(x_0)) \leqslant \varepsilon$.
V. SEMI-CONTINUA.




• *Aplicación continua sobre un espacio topológico* E. — Una aplicación $f$ de E en un espacio topológico F es continua sobre E si es continua en todo punto de E. Se demuestra que $f$ es continua sobre E si y solamente si la imagen recíproca por $f$ de todo abierto de F es un abierto de E; o, también, si y solamente si la imagen recíproca por $f$ de todo cerrado de F es un cerrado de E. Para una función real de variable real, la continuidad puede expresarse, muy intuitivamente, diciendo que puede dibujarse la curva representativa de $f$ sin levantar el lápiz.




• *Aplicación simplemente continua.* — Aplicación continua que no es uniformemente continüa.

• *Aplicación uniformemente continua.* — Una aplicación $f$ de un espacio métrico E con valores en un espacio métrico F es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que $d(x, y) \leqslant \eta(\varepsilon)$ entrañe $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. Esto puede simbolizarse mediante:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta(\varepsilon) > 0)\,(\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2)$$
$$(d(x, y) \leqslant \eta(\varepsilon) \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon).$$

La continuidad uniforme implica la continuidad, pero la recíproca no es cierta; la aplicación continua $x \mapsto x^2$ de **R** en **R** no es uniformemente continua. V. CONTINUA (Simplemente).

• *Función absolutamente continua.* — Una función F de **R** en **R** se llama absolutamente continua si existe una función $f$ de **R** en **R**, integrable sobre **R** y tal que:

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

• *Función continua por trozos.* — V. TROZOS.

• *Fracción continua.* — Sea $\alpha_0$ un número irracional positivo. Para todo entero $n \geqslant 0$, el real $\alpha_0$ puede escribirse:

$$\alpha_0 = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cfrac{1}{u_3 + \ddots + \cfrac{1}{u_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}$$

donde $u_n$ es un entero positivo igual a la parte entera de $\alpha_n$ y donde $\alpha_n$ es el real estrictamente superior a 1 definido por recurrencia por $\alpha_{n-1} = u_{n-1} + \dfrac{1}{\alpha_n}$ para $n \geqslant 1$. La serie $(u_n)_{n \geqslant 0}$ se llama el desarrollo de $\alpha_0$ en fracción continua. Se denota $\alpha_0 = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$. Los términos $u_n$ de esta sucesión se denominan los cocientes incompletos de la fracción continua.
V. REDUCIDAS.

• *Variable aleatoria absolutamente continua.* — Variable aleatoria cuya función de distribución es absolutamente continua.
V. DENSIDAD.

• *Variable aleatoria continua.* — Variable aleatoria cuyo conjunto de valores tomados es un intervalo o una reunión de intervalos de **R**.

## Continuada

• *Fracción continuada.* — Sinónimo de fracción continua.

## Continuamente

• *Función continuamente derivable.* — V. DERIVABLE.

• *Función continuamente diferenciable.* — V. DIFERENCIABLE.

• *Función continuamente derivable por trozos.* — V. TROZOS.

## Continuidad

Propiedad de ser continuo.
V. CONTINUA.

• *Axioma de continuidad.* — V. KOLMOGOROV (Axiomas de).

• *Continuidad simple de una aplicación.* — V. CONTINUA (Aplicación simplemente).

• *Continuidad uniforme de una aplicación.* — V. CONTINUA (Aplicación uniformemente).

• *Prolongación por continuidad de las igualdades (resp. de las desigualdades).* — Sean $f$ y $g$ dos funciones continuas sobre un espacio topológico E de valores en un espacio topológico separado F (resp. con valores en **R**). Si el conjunto de los elementos $x \in E$ tales que $f(x) = g(x)$ (resp. $f(x) \leqslant g(x)$) es denso en E, entonces tenemos $f(x) = g(x)$ (resp. $f(x) \leqslant g(x)$) para todo $x \in E$. Se dice que la igualdad $f(x) = g(x)$ (resp. la desigualdad $f(x) \leqslant g(x)$) se prolonga por continuidad a E entero.

• *Prolongación por continuidad de una función f definida sobre* $[\![a, c[\![ \cup ]\!]c, b]\!]$ *con valores en un espacio métrico* F *y admitiendo en c un límite* $\lambda$. — Función $g : [\![a, b]\!] \to F$ definida por $g(x) = f(x)$ para $x \neq c$ y $g(c) = \lambda$. La función $g$ es entonces continua en $c$.

## Continuo

(Adj.) Se opone a discontinuo.

(Sustantivo.) Se empleaba antiguamente por oposición a numerable. El continuo designaba también **R**.

• *Carácter cuantitativo continuo.* — Carácter susceptible de adoptar teóricamente todo valor de un intervalo de **R**. Por ejemplo, la talla de un individuo.

• *Hipótesis del continuo.* — Conjetura de Cantor (y primer problema de Hilbert) que afirma que no existe conjunto cuyo cardinal esté comprendido estrictamente entre Card (N) y Card (R) = $2^{\text{Card(N)}}$. La respuesta a este problema fue dada en 1963 por Cohen, que demostró la indecibilidad de esta proposición; si la teoría de los conjuntos es no contradictoria, se le puede añadir como axioma la hipótesis del continuo o su negación.
V. FORCING.

• *Hipótesis del continuo generalizada.* — Para todo punto cardinal infinito $\aleph_\alpha$ no existe cardinal $\beta$ tal que $\aleph_\alpha < \beta < 2^{\aleph_\alpha}$ o, lo que equivale a lo mismo:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

• *Potencia del continuo.* — Potencia de R. El conjunto $\mathfrak{P}$ (N) de las partes de N a la potencia del continuo:

$$\text{Card } \mathbf{R} = \text{Card } \mathfrak{P}(\mathbf{N}) = 2^{\text{Card(N)}} = 2^{\aleph_0}.$$

La hipótesis del continuo equivale a esta cuestión: ¿tenemos $\aleph_1 = \text{Card } \mathbf{R}$?

## Contracción

En análisis, sinónimo de aplicación contractante.
V. CONTRACTANTE.

• *Contracción de una arista de un grafo.* — En teoría de los grafos, contractar una arista «*a*» de extremidades *x* e *y* de un grafo G es quitar al grafo G la arista «*a*», así como los arcos asociados a «*a*» y considerar *x* e *y* como un sólo vértice que será la extremidad de todas las aristas de las que *x* e *y* eran las extremidades en G.

Después de la contracción de a

## Contractado

• *Grafo contractado de un grafo* G. — Se llama grafo contractado o contractado de un grafo G a un grafo obtenido por contracción de una o varias aristas de G.
V. HADWIGER (Conjetura de).

## Contractante

• *Aplicación contractante.* — Una aplicación *f* de un espacio métrico E en sí mismo es contractante si existe un real $k < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\,d(x, y)$ para todo par $(x, y) \in E^2$. Toda aplicación contractante es lipschitziana.
V. FIJO (Teorema del punto).

## Contradicción

(Lógica.) Enunciado cuya función de verdad no toma más que el valor F. Una contradicción se denomina a veces un enunciado falso.

## Contradictoria

• *Teoría contradictoria.* — Se dice de una teoría matemática cuyos axiomas permiten demostrar un teorema, así como su negación. Por regla general, es difícil probar que una teoría es o no contradictoria; así, se ignora la respuesta para la aritmética, como para la mayoría de las teorías matemáticas.

## Contraejemplo

Para probar que la proposición «cualquiera que sea $x$ elemento de E, $x$ verifica la propiedad P» es falsa, basta con exhibir un elemento $x_0$ de E que no verifique esa propiedad; se dice entonces que $x_0$ es un contra-ejemplo. Así, la aserción «todo número real es racional» es falsa, porque $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$, mientras que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

## Contragradiente

• *Contragrediente de una matriz:* — Sea una matriz cuadrada inversible de $M_n(K)$. Se llama contragrediente de M la matriz:

$$ {}^tM^{-1} = ({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1}). $$

## Contrario

• *Implicación contraria de la implicación* $P \Rightarrow Q$. — La implicación $P \Rightarrow$ (no Q).

• *Suceso contrario.* — El suceso contrario $\overline{A}$ de un suceso A de un espacio de probabilidad sobre un conjunto $\Omega$ es definido por $\overline{A} = \Omega - A$. La probabilidad de $\overline{A}$ es dada por $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

## Contrarreciprocidad

• *Razonamiento por contrarreciprocidad.* — Para demostrar un teorema de la forma «P implica a Q» se razona por contrarreciprocidad cuando se demuestra su contrarrecíproco, es decir, el teorema «(no-Q) implica (no-P)».

## Contrarrecíproco

• *Contrarrecíproco de un enunciado* $P \Rightarrow Q$ *(que se lee* P *implica a* Q *o «si* P *entonces* Q*»).* — El enunciado lógicamente equivalente (no-Q) $\Rightarrow$ (no-P). Por

ejemplo, el enunciado contrarrecíproco de «si $n$ es múltiplo de 6, entonces $n$ no es primo» es el enunciado «si $n$ es primo, entonces $n$ no es múltiplo de 6».

## Contravariante

- *Functor contravariante.* — V. FUNCTOR.
- *Tensor contravariante.* — V. TENSOR.

## Contravariantes

- *Componentes contravariantes de un vector de* $\mathbf{R}^n$ *sobre una base.* — Componentes de ese vector sobre esa base. Se emplea esa expresión por oposición a las componentes covariantes.
- *Coordenadas contravariantes de un vector.* — Sinónimo de componentes contravariantes.

## Conúcleo

- *Conúcleo de una aplicación lineal de* $f$ *de un módulo* E *en un módulo* F. — Es el módulo cociente F/Im$f$ denotado Coker $f$. La aplicación $f$ es sobreyectiva si y solamente si Coker $f = 0$.

V. CO-IMAGEN, IMAGEN, ISOMORFISMO (Teorema de), NÚCLEO.

## Convergencia

- *Convergencia casi segura de una serie de variables aleatorias.* — V. SEGURA.
- *Convergencia de un filtro.* — Se dice que un filtro $\mathcal{F}$ de un espacio topológico E converge hacia $x \in E$ (o que $x$ es límite del filtro convergente $\mathcal{F}$) si el filtro $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de $x$.
- *Convergencia de un producto infinito.* — V. INFINITO (Producto).
- *Convergencia de una aplicación según un filtro.* — Sean $f$ una aplicación de un conjunto E en un espacio topológico F y $\mathcal{F}$ un filtro sobre E. Se dice que $f$ converge hacia $y \in F$ (o que $y$ es el límite de $f$) según el filtro $\mathcal{F}$ si la imagen recíproca por $f$ de todo entorno de $y$ pertenece a $\mathcal{F}$.
- *Convergencia de una integral.* — V. GENERALIZADA (Integral).
- *Convergencia de una serie.* — Una serie de término general $u_n$ de un espacio vectorial normado es convergente y converge hacia $\lambda$ si la sucesión $(S_n)_{n \geq 0}$ de sus sumas parciales definida por:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

es convergente y converge hacia $\lambda$. Una condición necesaria, pero no suficiente, de convergencia de una serie es que su término general $u_n$ tienda hacia 0 cuando $n$ tiende hacia el infinito.
V. ABSOLUTA, CONMUTATIVA, NORMAL.

• *Convergencia de una sucesión.* — Se dice que una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$ de un espacio métrico (E, $d$) converge hacia $\lambda \in E$ (o que $(x_n)_{n\geq 0}$ admite por límite $\lambda$) si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un entero $n_0(\varepsilon)$ tal que para todo entero $n$ superior a $n_0(\varepsilon)$ la distancia de $x_n$ a $\lambda$ sea inferior a $\varepsilon$, lo cual puede escribirse:

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}) \quad (n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, \lambda) \leq \varepsilon).$$

• *Convergencia de una sucesión o de una serie de funciones.* — V. SIMPLE, UNIFORME.

• *Convergencia en ley de una sucesión de variables aleatorias.* — V. LEY.

• *Convergencia en media cuadrática.* — V. CUADRÁTICA.

• *Convergencia en media de una sucesión o de una serie.* — Convergencia en el sentido de Césareo.
V. CÉSARO.

• *Convergencia en media en el espacio* $\mathcal{L}^1$. — V. MEDIA.

• *Convergencia en probabilidad.* — Sinónimo de convergencia estocástica.
V. ESTOCÁSTICA.

• *Convergencia en el sentido de Césaro de una sucesión o de una serie.* — V. CÉSARO.

• *Convergencia estocástica de una serie de variables aleatorias.* — V. ESTOCÁSTICO.

• *Círculo de convergencia.* — Sinónimo de disco de convergencia.

• *Corona de convergencia de una serie de Laurent.* — V. LAURENT (Serie de).

• *Disco de convergencia de una serie entera* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. — Disco del plano complejo de centro 0 y cuyo radio es el radio de convergencia de la serie.
V. ABEL.

• *Normas de la convergencia uniforme, en media, en media cuadrática.* — V. CUADRÁTICA, MEDIA, UNIFORME.

• *Radio de convergencia de una serie entera* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. — Número real positivo tal que la serie diverja para $|z| > \rho$ *y converja para* $|z| < \rho$. Toda serie entera admite un radio de convergencia eventualmente nulo o infinito.

• *Teorema de la convergencia dominada.* — V. LEBESGUE (Teorema de).

• *Teorema de la convergencia monótona.* — Teorema de Beppo-Levi.
V. LEVI.

## Convergente

• *Aplicación convergente según un filtro.* — V. CONVERGENCIA.

• *Filtro convergente.* — V. CONVERGENCIA.

• *Integral absolutamente convergente.* — V. ABSOLUTA (Convergencia).

• *Integral convergente.* — V. GENERALIZADA (Integral).

• *Producto infinito convergente, absolutamente convergente, conmutativamente convergente.* — V. INFINITO (Producto).

• *Serie absolutamente, conmutativamente, normalmente, simplemente, uniformemente convergente.* — V. ABSOLUTA, CONMUTATIVA, NORMAL, SIMPLE, UNIFORME (Convergencia).

• *Serie doble convergente de términos de un espacio vectorial normado* E. — Familia sumable de E inexada por $N \times N$; ejemplo, la serie:

$$\sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ m \geqslant 1}} \frac{I}{(n^2+m^2)^\alpha} \quad \text{para } \alpha > 1.$$

• *Serie o sucesión convergente.* — V. CONVERGENCIA.

• *Sucesión de funciones simplemente, uniformemente convergente.* — V. SIMPLE, UNIFORME (Convergencia).

• *Sucesión de variables aleatorias casi seguramente, estocásticamente convergente.* — V. ESTOCÁSTICA (Convergencia), SEGURA (Convergencia casi).

## Convexa

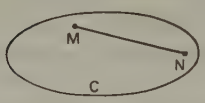
• *Envolvente convexa o cierre convexo de una parte* A *de un espacio afín* E. — La parte convexa más pequeña de E que contiene A.

• *Función convexa.* — Función numérica definida sobre un intervalo **I** de **R** tal que para todo par de puntos $(x, y)$ de **I** y todo número real $\lambda$ comprendido entre 0 y 1, $f$ verifica la desigualdad:

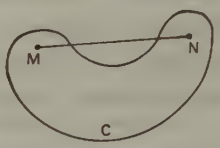
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

si $f$ es una función convexa, el conjunto de los puntos de $\mathbf{I} \times \mathbf{R}$ cuyas coordenadas $(x, y)$ verifican la relación $y \geqslant f(x)$ es una parte convexa de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Intuitivamente, esto expresa que, cualesquiera que sean los puntos $M_1$ y $M_2$ de la curva $\Gamma$, el segmento $M_1M_2$ está «por encima» del arco de curva $M_1M_2$. Una función derivable es convexa sobre **I** si y solamente si su derivada es creciente sobre **I**.

• *Parte convexa.* — Parte C de un espacio afín E tal que para todo par de puntos (M, N) de C el segmento MN esté contenido en C. El baricentro de todo conjunto de puntos de una parte convexa afectados de coeficientes positivos pertenece a esa parte.



Convexa



No convexa

Las palabras convexa y cóncava son tomadas a menudo en la lengua corriente y en óptica en sentidos diferentes que se contraponen. En matemáticas, una forma convexa puede tener partes de concavidades que giran de forma diferente.

## Convexidad

Propiedad de ser convexo.

• *Desigualdad de convexidad.* — Nombre dado a la desigualdad triangular verificada por una norma sobre un espacio vectorial. Todavía se emplea para calificar las integrales de Cauchy-Schwarz, de Hölder y de Minkowski.

## Convexo

• *Espacio topológico localmente convexo.* — Espacio vectorial topológico E sobre **R** o sobre **C** tal que para todo punto $x$ de E existe un sistema fundamental de entornos convexos de $x$.

• *Poliedro convexo.* — Poliedro cuyas caras están en un mismo semi-espacio por relación a cualquier plano que contenga una cara del poliedro.

• *Polígono convexo.* — Polígono plano cuyos vértices están en un mismo semi-plano por relación a cualquier recta que contenga un lado del polígono.

## Convolada

• *Convolada de dos funciones.* — Producto de convolución de esas funciones. V. CONVOLUCIÓN.

## Convolución

• *Producto de convolución de dos funciones reales.* — Sean $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua por trozos y $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función continua por trozos y d

soporte compacto. El producto de convolución o la convolada de $f$ y $\varphi$ es la función denotada $f * \varphi$ *definida por*

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt.$$

Si $\varphi$ es $p$ veces continuamente derivable, lo es igualmente $f * \varphi$, cualquiera que sea la naturaleza de $f$; la convolución tiene, por tanto, un efecto de «regularización» de las funciones, de ahí su importancia en física.

## Conway, John Horton

• *Grupos de Conway.* — Grupos cíclicos de órdenes respectivos:

$$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \simeq 4{,}96 \cdot 10^{11}$$

$$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \simeq 4{,}23 \cdot 10^{13}$$

$$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \simeq 4{,}16 \cdot 10^{18}$$

V. CÍCLICOS.

## Coordenada

• *Función coordenada.* — Sea $\prod_{i \in \mathbf{I}} \mathrm{E}_i$ un producto cartesiano de conjuntos. Para $j \in \mathbf{I}$, la aplicación de $\prod_{i \in \mathbf{I}} E_i$ en $E_j$ que en $(x_i)_{i \in \mathbf{I}}$ asocia $x_j$ se llama $j$-ésima función coordenada o $j$-ésimo proyector canónico. El elemento $x_j$ se llama la $j$-ésima coordenada o la $j$-ésima proyección canónica de $(x_i)_{i \in \mathbf{I}}$.

## Coordenadas

• *Coordenadas de un punto* M *de una superficie o de un espacio.* — Escalares que permiten referenciar ese punto sobre la superficie o en el espacio. En general, el principio es el siguiente: para referenciar los puntos de una superficie se determinan dos familias de curvas $(\mathrm{C}_u)_{u \in \mathrm{U}}$ y $(\Gamma_v)_{v \in \mathrm{V}}$ «trazadas» sobre la superficie tales que toda curva de una familia tenga un único punto de intersección con toda curva de la otra familia, y tales que para todo punto M de la superficie exista una curva de cada familia que pasa por M. Las escalares $u_0$ y $v_0$ tales que $\mathrm{M} = \mathrm{C}_{u_0} \cap \Gamma_{v_0}$ son las coordenadas de M en el sistema de referencias considerado. Para referenciar un punto del espacio $\mathbf{R}^3$ se determinan tres familias de superficies, cada una de las cuales depende de un parámetro, tales que las tres superficies obtenidas al escoger una superficie cualquiera en cada familia se encuentren en un único punto y tales que para todo punto M exista una superficie de cada familia que pasa por M. Los tres parámetros correspondientes son las coordenadas de M en el sistema de referencia. Se definen más generalmente coordenadas de puntos en espacios de dimensión finita $n \geqslant 3$. En el plano euclídeo, las coordenadas más utilizadas son las coordenadas cartesianas y polares. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ se utilizan las coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas. En un espacio proyectivo se

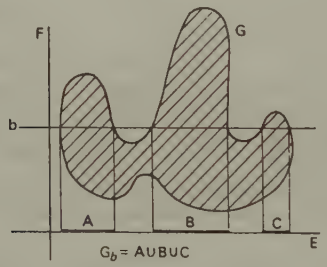
definen las coordenadas homogéneas. En un espacio afín cualquiera se utilizan las coordenadas cartesianas o las coordenadas baricéntricas.
V. ABSCISA, BARICÉNTRICAS, BIPOLARES, CARTESIANAS, CILÍNDRICAS, COTA, CURVILÍNEAS; ESFÉRICAS, HOMOGÉNEAS, ISÓTROPAS, ORDENADA, PLUCKERIANAS, POLARES, SEMI-POLARES, TANGENCIALES, TETRAÉDRICAS, TRILINEARES, VECTORIALES.

• *Coordenadas de un tensor.* — V. TENSOR.

• *Coordenadas de un vector.* — Sinónimo de componentes.
V. CONTRAVARIANTES, COVARIANTES.

## Copa

• *Copa de un grafo* G *de* E *hacia* F *siguiendo un elemento a de* E. — Conjunto $G_a$ de los elementos $y$ de F tales que $(a, y)$ pertenezcan a G. Se define igualmente la copa $G_b$ de G según un elemento $b$ de F como conjunto de los elementos $x$ de E tales que $(x, b)$ pertenecen a G.




## Coplanarios

Situados en un mismo plano.

## Copo de nieve

• Figura cuyo contorno es una curva de Koch. Sinónimos: Cardo de Van der Waerden, Isla de Von Koch.

## Co-producto

Nombre dado a veces a la suma directa que es la noción dual de la de producto directo.

## Corchete

• *Corchete de dos campos de vectores* $\vec{X}(x, y, z)$ *e* $\vec{Y}(x, y, z)$ *definidos y diferenciables sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^3$ *y de componentes* $(X_1, X_2, X_3)$ *e* $(Y_1, Y_2, Y_3)$. — Se llama así al campo de vectores denotado $[\vec{X}, \vec{Y}]$ definido sobre U y cuya *i*-ésima componente ($i = 1, 2, 3$) viene dada por:

$$X_1\frac{\partial Y_i}{\partial x} - Y_1\frac{\partial X_i}{\partial x} + X_2\frac{\partial Y_i}{\partial y} - Y_2\frac{\partial X_i}{\partial y} + X_3\frac{\partial Y_i}{\partial z} - Y_3\frac{\partial X_i}{\partial z}.$$

• *Corchete de Jacobi.* — V. Lie (Algebra de).

• *Ley «corchete» de un álgebra de Lie.* — V. Lié.

## Coriolis, Gústave (1792-1843)

• *Vector aceleración de Coriolis de un punto* M *móvil por relación a un sistema de referencias* R′ *móvil él mismo por relación a un sistema de referencia fijo* R. — Vector $\vec{\Gamma}_c$ definido por:

$$\vec{\Gamma}_c = \vec{\Gamma}_a - \vec{\Gamma}_e - \vec{\Gamma}_r$$

donde $\vec{\Gamma}_a$, $\vec{\Gamma}_e$ y $\vec{\Gamma}_r$ representan respectivamente los vectores de aceleración absoluta, de arrastre y relativa de M. La aceleración de Coriolis $\vec{\Gamma}_c$ verifica:

$$\vec{\Gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$$

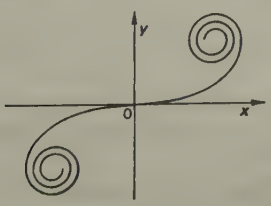
donde $\vec{\Omega}$ es el vector rotación instantánea del movimiento de arrastre y $\vec{V}_r$ el vector velocidad relativa de M. Si el movimiento de arrastre es un movimiento de traslación, la aceleración de Coriolis es nula. La aceleración de Coriolis también se denomina aceleración complementaria.

## Cornu, Marie-Alfred (1841-1902)

• *Espiral de Cornu.* — Curva plana Γ definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \int_0^s \cos t^2\, dt \quad \text{e} \quad y = \int_0^s \operatorname{sen} t^2\, dt,$$

donde $s \in \mathbf{R}$; la abscisa curvilínea de $M \in \Gamma$ y la curvatura de Γ en M son respectivamente $s$ y $2s$.
Se la encuentra en óptica sobre todo.

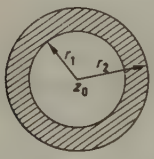


## Corolario

Nombre que a veces se da a ciertos teoremas que son consecuencias inmediatas de otro teorema (juzgado más importante).

## Corona

• *Corona de* C. — Sean un complejo $z_0$ y dos reales $r_1$ y $r_2$ tales que $0 \leqslant r_1 < r_2$. Se llama corona cerrada (resp. abierta) de centro $z_0$ y de radio $r_1$ y $r_2$ al conjunto de los números complejos $z$ tales que $r_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2$ (resp. $r_1 < |z - z_0| < r_2$).




• *Corona de un plano euclídeo* P. — Sean un punto O de P y dos números reales $r_1$ y $r_2$ tales que $0 \leqslant r_1 < r_2$. Se llama corona cerrada (resp. abierta) de centro O y de radios $r_1$ y $r_2$ el conjunto de los puntos M del plano tales que $r_1 \leqslant d(O, M) \leqslant r_2$ (resp. $r_1 < d(O, M) < r_2$).

## Corrección

• *Corrección de una aproximación.* — Si el número real $a$ es una aproximación del número real $x$, el número real $x - a$ (opuesto del error) se denomina corrección.

• *Corrección de Sheppard.* — V. SHEPPARD.

## Correlación

• *Coeficiente de correlación o de correlación lineal o de Bravais-Pearson de dos variables aleatorias* X *e* Y. — Número real:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

donde Cov(X, Y) designa la covarianza de X y de Y y $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ sus desviaciones típicas. Si las variables X e Y son independientes el coeficiente de correlación es nulo, de ahí su nombre.

• *Correlación en geometría proyectiva.* — V. COLINEACIÓN.

## Correspondencia

• *Correspondencia de un conjunto* E *hacia un conjunto* F. — Relación de E hacia F.
V. BIUNÍVOCO, MULTÍVOCO, UNÍVOCO.

## Correspondencias

• *Análisis de correspondencias.* — V. DATOS (Análisis de).

## Cortadura

V. DEDEKIND.

## Cos

Abreviatura de coseno.

## $\cos^{-1}$

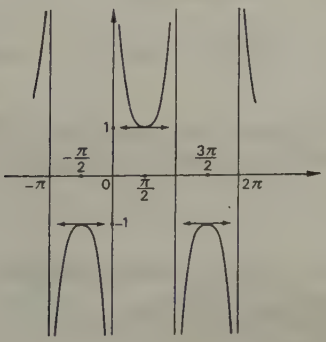
Notación que designa en informática la función Arco coseno.

## cosec

Abreviatura de cosecante.

## Cosecante

• *Función cosecante.* — Función trigonométrica, notada «cosec» definida sobre **R** para $x \neq k\pi$, por cosec $x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.



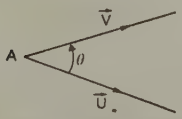
## Coseno

• *Coseno de un ángulo $\theta$ de un plano vectorial euclídeo.* — Sea **R** la rotación de ángulo $\theta$. Por relación a una base ortonormada, la matriz de **R** es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$. El número real $a$, independiente de la elección de la base ortonormada, se llama el coseno del ángulo $\theta$ y se denota $\operatorname{Cos}\theta$. El coseno no depende de la elección de una orientación del plano vectorial. Si $\theta$ representa un ángulo de semi-rectas de un plano afín tenemos:

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\|}$$

donde $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son vectores directores de las semi-rectas. Si la medida en radianes de $\theta$ es $x$, entonces $\operatorname{Cos}\theta = \cos x$, donde $\cos x$ designa la imagen de $x$ por la función coseno.

V. DIRECTORES (Cosenos), RECTÁNGULO (Triángulo), SENO.




• *Coseno integral.* — V. INTEGRAL.

• *Función coseno.* — Función de **R** en **R** notada cos y definida por

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}).$$

Es también la restricción en **R** de la función coseno complejo. Su representación gráfica es sinusoide.

V. DESARROLLO en serie entera, SENO (Función), SINUSOIDE.

• *Función coseno complejo.* — V. COMPLEJO (Funciones trigonométricas).

• *Función coseno hiperbólico.* — V. HIPERBÓLICO.

## Cosinusoide o Cosenoide

Se da a veces este nombre a la sinusoide para expresar que en un sistema de referencia convenientemente escogido su ecuación es de la forma $y = \cos x$.

## Cota

• *Cota de un punto M en un sistema de referencias cartesiano.* — Tercera coordenada de M en el sistema de referencia.

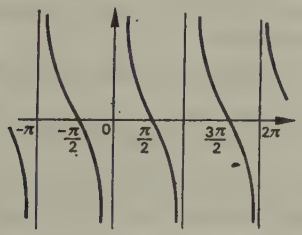
V. CARTESIANAS (Coordenadas), DESCRIPTIVA (Geometría).

## Cotangente

• *Función cotangente.* — Función trigonométrica notada «cotg» y definida sobre **R**, para $x \neq k$, por:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

V. RECTÁNGULO (Triángulo).




• *Función cotangente compleja.* — V. COMPLEJAS (Funciones trigonométricas).

• *Función cotangente hiperbólica.* — V. HIPERBÓLICA.

## Cotas

• *Eje de cotas.* — V. CARTESIANO (Sistema de referencias).

## cotg

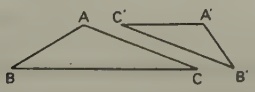
Abreviatura de cotangente.

## coth

Abreviatura de cotangente hiperbólica.

## Co-triángulos

Par de dos triángulos semejantes no iguales de los que dos de los tres lados del uno son iguales a dos de los tres lados del otro. Ejemplo: los triángulos cuyas longitudes de los tres lados son respectivamente 8, 12, 18 y 12, 18, 27.



## Covariante

V. FUNCTOR, TENSOR.

## Covariantes

• *Componentes covariantes de un vector* $\overline{V}$ *de* $\mathbf{R}^n$ *sobre una base* $(\overline{e}_i)_{i=1,\ldots,n}$ *de* $\mathbf{R}^n$. — Números Reales $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$, donde $x_i$ es el producto escalar de $\overline{V}$ por $\overline{e}_i$. En el caso en que la base sea ortonormada, los componentes covariantes coinciden con los componentes contravariantes.

• *Coordenadas covariantes.* — Sinónimo de componentes covariantes.

## Covarianza

• *Covarianza de dos variables aleatorias* X *e* Y. — Esperanza matemática del producto de las variables centradas asociadas a X y en Y, denotada Cov(X, Y). Tenemos, por tanto:

$$\mathrm{Cov}(X,\ Y) = E[(X - E[X]) \,.\, (Y - E[Y])].$$

Si las variables X e Y son independientes, su covarianza es nula. La recíproca es falsa.

• *Matriz de covarianza de dos variables aleatorias* X *e* Y. — Matriz:

$$\begin{pmatrix} V[X] & \mathrm{Cov}(X,\ Y) \\ \mathrm{Cov}(Y,\ X) & V[Y] \end{pmatrix}$$

donde Cov(Y, X) = Cov(X, Y) es la covarianza de X y de Y, y donde V[X] y V[Y] son las varianzas de X e Y.

## Covector

Término empleado a veces por forma lineal.

## C. Q. D.

Abreviatura de *cómo queríamos demostrar.* En latín: QED = Quod Erat Demonstrandum, que antiguamente se ponía al final de una demostración completa para mostrar que se la daba por terminada. Esta costumbre era testimonio de la voluntad del matemático de no considerar sus investigaciones como válidas salvo cuando eran coronadas por demostraciones.

## Cramer, Gabriel (1704-1752)

• *Fórmula o regla de Cramer.* — V. CRAMER (Sistema de).

• *Paradoja de Cramer.* — Una curva algebraica plana de grado $n$ es, en general, determinada por $\frac{1}{2}n(n+3)$ puntos y dos curvas planas algebraicas de grado $n$ se cortan en general en $n^2$ puntos. El estudio por Cramer de los sistemas de ecuaciones lineales explica este resultado en apariencia paradójico debido a que $n^2 > \frac{1}{2}n(n+3)$ para $n \geqslant 4$.

• *Sistema de Cramer.* — Sistema:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

de $n$ ecuaciones lineales en $n$ incógnitas cuyo determinante $\Delta$ es no nulo. Este sistema admite una solución única dada por la fórmula (o regla) de Cramer: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, donde $\Delta_i$ es el determinante obtenido al reemplazar la $i$-ésima columna de $\Delta$ por la columna ${}^t(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

## Crecimiento

Propiedad de ser que crece.
V. CRECIENTE.

• *Tasa de crecimiento.* — V. TASA.

## Creciente

• *Aplicación creciente de un conjunto ordenado* (E, $\leqslant$) *en otro* (F, $\leqslant$). — Aplicación $f$ tal que $x \leqslant y$ implica $f(x) = f(y)$. La aplicación $f$ es *estrictamente* creciente si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$. Una aplicación creciente e inyectiva es estrictamente creciente. Y recíprocamente, si E es totalmente ordenado, las aplicaciones estrictamente crecientes son las aplicaciones inyectivas y crecientes.

• *Sucesión creciente (resp. estrictamente creciente).* — Sucesión $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de elementos de un conjunto ordenado tal que la función $n \mapsto a_n$ sea creciente (resp. estrictamente creciente). Por ejemplo, la sucesión de los cuadrados en **N** es estrictamente creciente.

## Crecientes

• *División de los polinomios según las potencias crecientes.* — V. DIVISIÓN.

## Criba

Algoritmo que permite obtener la lista de los números enteros inferiores a un número dado y que tiene una propiedad precisa: la criba de Eratóstenes (la más conocida) permite determinar los números primos inferiores a un número dado. La aritmética contemporánea desde los trabajos de Brun ha desarrollado considerablemente la teoría de las cribas (pequeñas cribas, grandes cribas) sobre la que se apoyan algunos de los resultados recientes más sutiles: teorema de Bombieri, teorema de Chen, etc.
V. ERATÓSTENES, ULAM.

## Criterio

Término no matemático. Designa en general una regla práctica de verificación de una propiedad. De hecho, es una condición suficiente; ejemplo: los criterios de convergencia.
V. ABEL, ALEMBERT (D'), CAUCHY, DEDUCCIÓN, EISENSTEIN, EULER, KUMMER, LUCAS, PISOT, RAABE-DARBOUX-DUHAMEL, RIEMANN, WEIERSTRASS.

## Crítico

• *Algoritmo del camino crítico.* — Algoritmo utilizado en teoría de la organización del trabajo; su principio descansa en la idea de que la cadena más larga de ejecución de las tareas (llamada camino crítico) pone en evidencia las causas de los golletes de estrangulamiento en el desarrollo de los trabajos y que, por lo tanto, hay que ejecutar prioritariamente una tarea que está en el inicio del camino crítico.
V. HU.

• *Camino crítico.* — V. CRÍTICO (Algoritmo del camino).

## Cromático

• *Grafo k-cromático.* — Grafo cuyos vértices pueden colorearse con la ayuda de $k$ colores, de forma que dos vértices adyacentes distintos no sean nunca del mismo color.

• *Indice cromático de un multigrafo* G *sin rizos.* — Número minimum $q$ de colores necesarios para la coloración de las aristas de G de suerte que dos aristas adyacentes no sean nunca del mismo color. El índice cromático de un grafo simple completo de orden $n$ es igual a $n - 1$ si $n$ es par y a $n$ en caso contrario.

• *Número cromático de un grafo* G. — El entero más pequeño $k$ tal que G sea $k$-cromático. El número mínimum de colores necesarios para la coloración de un mapa de geografía sobre la esfera o el plano es el número cromático del grafo planar cuyos vértices representan las regiones a colorear, estando dos vértices unidos por una arista si las regiones son fronterizas.

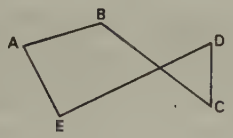
• *Número cromático de una superficie.* — Valor máximo del número cromático de los grafos representables sobre la superficie. El número cromático del toro es 7; el del plano proyectivo es 6. El teorema de los cuatro colores indica que es igual a 4 para la esfera o el plano. El número cromático es un invariante topológico. V. COLOREACIÓN, CUATRO COLORES (Teorema de los).

• *Polinomio cromático.* — El número $P(\lambda, n)$ de coloraciones diferentes de un grafo de orden $n$ con la ayuda de $\lambda$ colores es un polinomio en $\lambda$ de grado $n$ llamado polinomio cromático del grafo (noción debida a Birkhoff).

## Cruzado

• *Gorro cruzado.* — Superficie obtenida al deformar la cinta de Möbius de forma que el único borde de la cinta se convierta en un círculo. Se obtiene una superficie que se interpenetra debido a que no tiene más que una cara. V. GÉNERO.

• *Polígono cruzado.* — Polígono plano del que al menos dos lados no consecutivos son secantes.




## Csaszar, Akos (1924- )

• *Poliedro de Csaszar.* — Poliedro anular de 14 caras y 7 vértices del que todas las caras son polígonos y que no cuenta con ninguna diagonal, poseyendo cada par de caras una arista común. Fue descubierto en 1940 por el matemático húngaro Akos Csaszar. Su dual es el poliedro de Szilassi (V. SZILASSI).

## Cuadrable

V. AREA.

## Cuadrada

• *Matriz cuadrada.* — Aquélla cuyo número de líneas es igual al número de columnas.

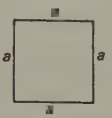
• *Raíz cuadrada.* — Un elemento $y$ de un anillo A es una raíz cuadrada de un elemento $x \in A$ si $y^2 = x$. En **C**, todo número no nulo admite dos raíces cuadradas. En **R**, un número estrictamente negativo no admite raíz cuadrada y un número estrictamente positivo admite dos raíces cuadradas opuestas.

A renglón seguido damos sin explicación un ejemplo práctico de cálculo (de extracción) de raíz cuadrada según el método más difundido:

```
 2 7 4 1 1      | 1 6 5 , 5
−1              |-----------
-----------      1 × 1 = 1
  1 7 4          2 [6] × [6] = 1 5 6
−1 5 6
-----------
  0 1 8 1 1      3 2 [5] × [5] = 1 6 2 5
 −1 6 2 5
-----------
    0 1 8 6 0 0  3 3 0 [5] × [5] = 1 6 5 2 5
      1 6 5 2 5
    -----------
      0 2 1 7 5
```

## Cuadrado

V. CORTE, PERFECTO (Cuadrado).
(Geom.) Rectángulo que tiene sus cuatro lados de igual longitud. Es igualmente un rombo cuyos cuatro ángulos son iguales o cuyos dos lados consecutivos son perpendiculares. Sea $a$ la longitud del lado de un cuadrado; su perímetro es entonces $4a$ y su superficie $a^2$.
La sencillez de la forma del cuadrado, su propiedad de poder pavimentar el plano, la economía de las operaciones ligadas a la medida de su superficie hacen de él un útil irreemplazable en las técnicas de la vida corriente, en las matemáticas aplicadas y como patrón para el cuadrillado de las superficies.




- *Cuadrado cartesiano.* — V. CARTESIANO.
- *Cuadrado conmutativo.* — V. CONMUTATIVO.
- *Cuadrado de un elemento x de un monoide* (E, $*$). — Elemento $x * x$ a veces denotado por $x^2$.
- *Cuadrado de un número.* — Producto de ese número por sí mismo.
- *Cuadrado en un anillo.* — Un elemento $x$ de un anillo $\bar{\mathbf{A}}$ es un cuadrado en $\mathbf{A}$ si existe $y \in \mathbf{A}$ tal que $x = y^2$. El elemento $x$ se llama entonces el cuadrado de $y$. Por ejemplo, $-1$ es un cuadrado en $\mathbf{C}$, pero no lo es en $\mathbf{R}$, y 3 es un cuadrado en $\mathbf{R}$ pero no lo es en $\mathbf{Q}$.
- *Cuadrado greco-latino o bilatino.* — V. GRECO-LATINO.
- *Cuadrado latino.* — V. LATINO.
- *Cuadrado mágico.* — V. MÁGICO.
- *Cuadrado escalar.* — V. ESCALAR.
- *Función del cuadrado integrable.* — V. INTEGRABLE.

## Cuadrados

Se da impropiamente el nombre de cuadrados a cuadrillados, es decir, a conjuntos de cuadrados contiguos, pavimentando por regla general esos conjuntos un cuadrado grande (o un gran rectángulo), por ejemplo, los tableros de ajedrez y de damas. Los cuadrados de esos cuadrillados pueden rellenarse de varias interesantes formas:

a) Bien en aritmo-geometría: contienen números (generalmente enteros) bajo ciertas condiciones que plantean problemas que van desde las matemáticas recreativas elementales hasta conjeturas difíciles. Los más conocidos son los cuadrados mágicos (véase esa palabra), los cuadrados diabólicos, los cuadrados bimágicos, los cuadrados encantados, los cuadrados heterogéneos, los cuadrados antimágicos, los cuadrados talismanes, los cuadrados recorridos, los cuadrados torpes, los cuadrados cascadas, los cuadrados desencantados, etcétera.

V. PERFECTO (Cuadrado).

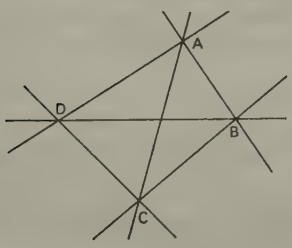
b) Bien en combinatoria.

V. BILATINO, GRECO-LATINO (Cuadrado), LATINO.

- *Descomposición de una forma cuadrática en cuadrados.* — V. DESCOMPOSICIÓN.
- *Métodos de mínimos cuadrados.* — V. MENORES.
- *Números cuadrados.* — V. POLIGONALES (Números).
- *Teorema de los dos cuadrados.* — V. DOS.
- *Teorema de los tres cuadrados.* — V. GAUSS.
- *Teorema de los cuatro cuadrados.* — V. LAGRANGE.

## Cuadrángulo

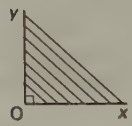
Sinónimo de cuadrilátero plano. Se llama también cuadrángulo a toda figura del plano formada por seis rectas que juntan dos a dos cuatro puntos del plano no alineados tres a tres; en este sentido no es un cuadrilátero completo. V. COMPLETO, ARMÓNICO, ORTOCÉNTRICO.



## Cuadrante

Sector angular saliente cuyos lados son dos semirrectas perpendiculares. Dos rectas perpendiculares determinan en el plano cuatro cuadrantes. El uso quiere que se numeren así:

| | |
|---|---|
| 2.° | 1.° |
| 3.° | 4.° |




## Cuadrática

• *Convergencia en media cuadrática.* — Convergencia en $\mathscr{L}^2$, en el sentido de la seminorma de la convergencia en media cuadrática. Más exactamente, la serie $(f_n)_n \geqslant 0$ de funciones de $\mathscr{L}^2$ converge en media cuadrática hacia $f \in \mathscr{L}^2$ si la serie de término general $[\int (f_n(x) - f(x))^2 dx]^{1/2}$ converge hacia 0 cuando $n$ tiende hacia $+\infty$.

• *Cuerpo cuadrático.* — Sinónimo de extensión cuadrática.

• *Entero residuo cuadrático módulo n.* — Entero $a$ tal que existe un entero $x$ que verifica $x^2 \equiv a$ módulo $n$. Es un residuo cuadrático en el anillo $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Por ejemplo, 1 es residuo cuadrático módulo 4 pero 3 no.

• *Extensión cuadrática de un cuerpo* K. — Extensión de grado 2 del cuerpo K.

• *Forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica φ sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Forma cuadrática sobre E definida por $q(x) = \varphi(x, x)$.

• *Forma cuadrática hermitiana.* — V. HERMITIANA.

• *Forma cuadrática sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Aplicación $q$ de E en K que verifica las dos condiciones:

1. $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$ para todo $\alpha \in K$ y todo $x \in E$;

2. la aplicación de $E^2$ en K definida por $(x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ es bilineal simétrica. Por ejemplo, la aplicación definida sobre $\mathbf{R}^2$ por:

$$(x_1, x_2) \mapsto ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$$

donde $a$, $b$, $c$ son reales, es una forma cuadrática sobre $\mathbf{R}^2$.
V. DESCOMPOSICIÓN, DEFINIDA, DEGENERADA, NEGATIVA, POLAR, POSITIVA, RANGO, SYLVESTER.

• *Ley de reciprocidad cuadrática.* — V. LEGENDRE.

• *Media cuadrática de n números* $a_1, a_2, ..., a_n$. — Número $q$ definido por:

$$q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Por ejemplo, la media cuadrática de 2 y 6 es $\sqrt{20} = 4{,}47...$

• *Primera (resp. segunda) forma cuadrática fundamental.* — V. FUNDAMENTALES.

• *Residuo cuadrático de un anillo* Z/*n*Z. — Elemento de Z/*n*Z que es un cuadrado dentro de este anillo.

• *Semi-norma y norma de la convergencia en media cuadrática.* — Sea $\mathscr{L}^2$ el espacio de las funciones reales de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue. La aplicación de $\mathscr{L}^2$ en R definida por $f \mapsto \|f\|_2 = [f^2(x)\,dx]^{1/2}$ es una semi-norma.

Sobre otros espacios, por ejemplo el de las funciones continuas sobre un intervalo compacto de E, es una norma llamada norma de la convergencia en media cuadrática.

• *Topología de la convergencia en media cuadrática.* — Topología asociada a la norma de la convergencia en media cuadrática.

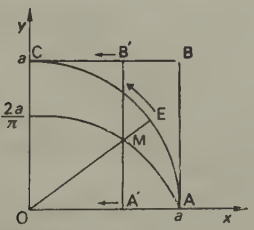
## Cuadratriz

Curva plana que puede utilizarse como curva auxiliar para resolver el problema de la cuadratura del círculo (o el de la rectificación de la circunferencia).

Ejemplo: la cuadratiz de Dinostrate de ecuación cartesiana $y \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{a}\right] = x$.

Esta curva se puede obtener de la siguiente manera:

Se considera el segmento A'B' que se desplaza uniformemente de AB hasta OC y se hace girar uniformemente al segmento OE alrededor de O de forma que A', A y E coincidan a la salida y que B', C y E coincidan a la llegada.

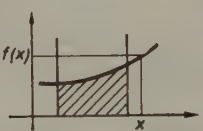



V. ABDANK-ABAKANOWICZ.

## Cuadratura

Cálculo de una integral definida o determinación de un área. Casos más frecuentes: determinación del área de una superficie limitada por una curva

plana cerrada (círculo, elipse, etc.) o la de un dominio limitado por un arco de curva de ecuación cartesiana $y=f(x)$ en un sistema de referencias ortonormado, dos paralelas en el eje de las ordenadas y el eje de las abscisas.




Dos problemas distintos referidos a las cuadraturas:

1. Encontrar una fórmula que dé el área A buscada.

2. Encontrar una construcción con regla y compás que permita obtener en un número finito de operaciones un cuadro de área A. Arquímedes fue el primero en obtener de esta forma la cuadratura de un arco de parábola.

• *Cuadratura de un dominio plano.* — Determinación del área de este dominio.

• *Problema de la cuadratura del círculo.* — ¿Es posible construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado? Este problema no fue resuelto negativamente hasta 1882 como consecuencia de la transcendencia de $\pi$ probada por Lindemann.

La demostración de esta imposibilidad no ha impedido a un gran número de aficionados intentar, aún en nuestros días, resolver este problema.

Unos se apoyan en razonamientos falsos, otros en una ignorancia del enunciado exacto, y otros generalizando indebidamente un caso particular.
V. CONSTRUCTIBLE, CONSTRUCCIÓN, CUBATURA, DUPLICACIÓN, CUBICACIÓN, RECTIFICACIÓN, TRISECCIÓN, WANTZEL.

## Cuádrica

• *Cuádrica del espacio afín* $R^3$. — Superficie de $R^3$ de orden 2.

Ecuación:
$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2exz+2fxy+$$
$$+2gz+2hy+2ix+j=0.$$

Las secciones planas de una cuádrica son cónicas. Entre las cuádricas propias se distinguen las cuádricas con centro (elipsoides e hiperboloides) y los paraboloides (elípticos e hiperbólicos).

Entre las cuádricas impropias figuran los conos, cilindros, pares de planos secantes, paralelos o confundidas.
V. CENTRO, DESCOMPUESTA, ELIPSOIDE, ESPECIE, HIPERBOLOIDE, IMPROPIA, PARABOLOIDE, PROPIA.

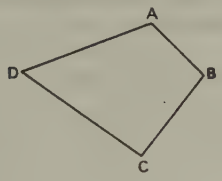
• *Cuádrica del espacio proyectivo* $P_3(R)$. — Conjunto de los puntos de $P_3(R)$ cuyas coordenadas homogéneas $(x, y, z, t)$ anulan una forma cuadrática no nula sobre $R^4$. Su ecuación en coordenadas homogéneas puede ponerse bajo la forma $XA^tX=0$, donde X es la matriz línea $(x, y, z, t)$ y donde A es una

matriz cuadrada real simétrica de orden 4. Las cuádricas del completo proyectivo de $R^3$ son las cuádricas de $R^3$ a las cuales se juntan puntos del plano del infinito.

## Cuadrilátero

Sean (A, B, C, D) cuatro puntos del espacio no alineados tres a tres. Los segmentos AB, BC, CD y DA se denominan los lados del cuadrilátero y los puntos A, B, C y D sus vértices.

• V. COMPLETO, CRUZADO, DIAGONAL, IZQUIERDO, ARMÓNICO, ORTODIAGONAL, PLANO, QUADRÁNGULO.




## Cuadro

• *Cuadro de elementos.* — Se emplea, prácticamente, como una tabla en la que se disponen los elementos en los casos de un rectángulo.
V. CONTINGENCIA, GRECO-LATINO (Cuadrado), LATINO (Cuadrado), MÁGICO (Cuadrado), MATRIZ, PASCAL (Triángulo de).

## Cuadruplete

V. *n*-UPLE.

## Cualitativo

• *Carácter cualitativo.* — V. CARÁCTER.

## Cuantificable

• *Fórmula cuantificable por una variable x.* — Conjunto obtenido por sustitución de $x$ por un individuo $a$ de un enunciado que no contiene a $x$. Por ejemplo, $x \leqslant b$ puede ser interpretada como una fórmula cuantificable para $x$, ya que $a \leqslant b$ es un enunciado elemental.

## Cuantificadores

V. EXISTENCIAL, PREDICADOS, UNIVERSAL.

## Cuantificación

• *Signos o símbolos de cuantificación.* — Símbolos $\exists$ (existencial) y $\forall$ (universal) del cálculo de los predicados (V. PREDICADOS).

## Cuantiles

• Generalización de la noción de cuartiles. Los cuartiles subdividen la serie ordenada de los valores tomados por un carácter cuantitativo en cuatro partes de igual extensión. De manera análoga se pueden definir los deciles, que son los números que subdividen a la serie en diez partes de igual extensión, o incluso los centilés, que la subdividen en cien partes de igual extensión. Los cuartiles, deciles y centiles se llaman cuantiles.

## Cuantitativo

• *Carácter cuantitativo.* — V. CARÁCTER.

## Cuartiles

Números reales que permiten caracterizar la extensión de los valores tomados por un carácter cuantitativo X. El primer cuartil es un valor $Q_1$ del carácter X tal que a lo sumo un cuarto de los valores tomados por X sean inferiores a $Q_1$ y a lo sumo tres cuartos de los valores tomados por X sean superiores a $Q_1$. El segundo cuartil notado $Q_2$ coincide con la mediana. El tercer cuartil es un valor $Q_3$ del carácter X tal que a lo sumo tres cuartos de los valores tomados por X sean inferiores a $Q_3$ y a lo sumo un cuarto de los valores tomados por X sean superiores a $Q_3$. Cuando varios valores son posibles para un cuartil, se toma, como valor del cuartil, la semi-suma entre los valores posibles extremos. Por ejemplo, si X toma los valores 0, 1, 1, 7, 9, 10, 13, 14, los cuartiles son $Q_1=1$, $Q_2=8$ y $Q_3=11{,}5$.

## Cuártica

Curva algebraica plana de orden 4; ejemplos: la cardioide, la lemniscata de Bernoulli, el caracol de Pascal, la Concoide de Nicomedes, los óvalos de Descartes.

## Cuarto

• *Cuarta proporcional.* — V. PROPORCIONAL.

• *Ecuación general de cuarto grado.* — Ecuación de la forma:

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

donde las $a_i$ son complejas. Planteando $y = x + \frac{1}{4} a_1$ se obtiene la ecuación $y^4 + py^2 + qy + r = 0$; sus cuatro raíces $y_i$ vienen dadas por:

$$2y_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$
$$2y_2 = \omega_1 + \omega'_2 + \omega'_3$$
$$2y_3 = \omega'_1 + \omega_2 + \omega'_3$$
$$2y_4 = \omega'_1 + \omega'_2 + \omega_3$$

si las $\alpha_i$ son las tres raíces de la ecuación de tercer grado (V. TERCER):

$$\alpha^3 - 2p\alpha + (p^2 - 4p)\alpha + q^2 = 0$$

dicha resolvente cúbica de la ecuación de cuarto grado inicial, $\omega_i$ y $\omega'_i$ son las raíces cuadradas complejas de $-\alpha_i$. La ecuación general de cuarto grado tiene, pues, solución por radicales (V. *n*-ESIMA). Cuando $a_1 = a_3 = 0$ la ecuación se escribe entonces

$$x^4 + a_2 x^2 + a_1 = 0;$$

se dice que es bicuadrada.

## Cuaternio

Elemento del cuerpo de los cuaternios H. Tiene la forma $a + ib + jc + k$, con $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. Esta suma heterogénea pareció sospechosa durante mucho tiempo.

V. CONJUGADO, ENTERO, PURO.

## Cuaternios

• *Cuerpo de los cuaternios.* — Dado el R-espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ de base canónica $1 = (1, 0, 0, 0)$; $i = (0, 1, 0, 0)$; $j = (0, 0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 0, 1)$, la multiplicación definida por:

$$(a, b, c, d)\cdot(a', b', c', d') = (aa' - bb' - cc' - dd',$$
$$ab' + ba' + cd' - dc', \quad ac' + ca' - bd' + db', \quad da' + ad' + bc' - cb')$$

le da una estructura de cuerpo no conmutativo. Este cuerpo denominado cuerpo de los cuaternios de Hamilton se nota con la H inicial de Hamilton: es el supercuerpo «más pequeño» no conmutativo de R. Se observa que:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1; \quad ij = k; \quad jk = i; \quad ji = -k;$$
$$kj = -i \quad \text{y} \quad ik = -j.$$

Los elementos $i$, $j$ y $k$ engendran un grupo multiplicativo de orden 8, no conmutativo denominado grupo de los cuaternios. Al identificar $x + yi$ con el número complejo $x + iy$, todo cuaternio se escribe $\alpha + j\beta$ con $\alpha$ y $\beta$ complejos. Provisto de la acción de C sobre H definida por $\gamma \cdot (\alpha + j\beta) = \gamma\alpha + j\gamma\beta$, el cuerpo H es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre C (y de dimensión 4 sobre R). Se pueden definir los cuerpos de cuaternios como más generales que H.

V. FROBENIUS, ORTOGONALES.

• *Grupo de los cuaternios.* — Subgrupo no conmutativo $Q_2$ de orden 8 del grupo multiplicativo H* del cuerpo de cuaternios H y definido por:

$$Q_2 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Su tabla es la siguiente:

| $x$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $-i$ | $j$ | $-j$ | $k$ | $-k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $-1$ | $i$ | $-i$ | $j$ | $-j$ | $k$ | $-k$ |
| $-1$ | $-1$ | $1$ | $-i$ | $i$ | $-j$ | $j$ | $-k$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-i$ | $-1$ | $1$ | $k$ | $-k$ | $-j$ | $j$ |
| $-i$ | $-i$ | $i$ | $1$ | $-1$ | $-k$ | $k$ | $j$ | $-j$ |
| $j$ | $j$ | $-j$ | $-k$ | $k$ | $-1$ | $1$ | $i$ | $-i$ |
| $-j$ | $-j$ | $j$ | $k$ | $-k$ | $1$ | $-1$ | $-i$ | $i$ |
| $k$ | $k$ | $-k$ | $j$ | $-j$ | $-i$ | $i$ | $-1$ | $1$ |
| $-k$ | $-k$ | $k$ | $-j$ | $j$ | $i$ | $-i$ | $1$ | $-1$ |

Cuando todo subgrupo finito del grupo multiplicativo de un cuerpo conmutativo es cíclico, este ejemplo demuestra que no es lo mismo en el caso no conmutativo, ya que $Q_2$ es por lo menos engendrado por dos elementos ($i$ y $j$, por ejemplo, que son de orden 4).

## Cuatrillón

V. DECIMAL (Sistema).

## Cuatro

• *Teorema o problema de los cuatro colores.* — El número cromático del plano o de la esfera, ¿es igual a cuatro? Este problema conocido con el nombre de problema de los cuatro colores fue muy bien planteado por Cayley en 1879. Se vuelve a plantear si cualquier mapa geográfico del plano puede pintarse con cuatro colores de manera que dos regiones adyacentes cualesquiera no tengan el mismo color. K. Appel y W. Haken dieron, en 1976, una respuesta positiva a esta pregunta. Su método consiste en trasladar el estudio del caso general al de una lista de 1.936 mapas tipo, mapas denominados reducibles: estos mapas pueden colorearse con cuatro colores.

Para superar la última etapa, es decir, para demostrar que todo mapa contiene un mapa reducible, Appel y Hanken llevaron a cabo un cálculo que necesitó 1.200 horas en un ordenador. Más tarde, D. Cohen llevaría el estudio de este problema al estudio de 13 matrices particulares, lo que da «una talla más humana». Es necesario señalar que, por ahora, la solución a esta antigua conjetura no parece haber aportado nuevas ideas en la teoría de los grafos.

Se conocen igualmente condiciones suficientes para que se pueda colorear un mapa con tres colores.

El número cromático de otras superficies que no sean la esfera o el plano ha podido ser exactamente determinado; vale 7 para el toro, 6 para el plano proyectivo.

V. COLORACIÓN, HEAWOOD.

## Cubatura

Generalización en el espacio $\mathbf{R}^3$ de la noción de cuadratura.

## Cúbica

(Usual.) Que tiene la forma de un cubo.

(Geometría.) Curva algebraica de orden 3.

V. AGNESI (Cúbica de), ANGUINEA, DESCARTES (Folium de), DIOCLES (Cisoide de), FERMAT (Conjetura de), L'HOSPITAL, MAC LAURIN (Trisectriz de), NODALE (Cúbica), OBLICUA (Cisoide, estrofoide), RECTA (Cisoide, estrofoide), SERPENTINA, TSCHIRNHAUSEN (Cúbica de), VERSIERA.

• *Cúbica izquierda.* — V. IZQUIERDA.

• *Parábola cúbica.* — Cúbica de ecuación cartesiana $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. V. SEMI-CÚBICA.

• *Raíz cúbica.* — Raíz tercera. V. RAÍZ.

• *Resolvente cúbica de una ecuación del cuarto grado.* — V. CUARTO.

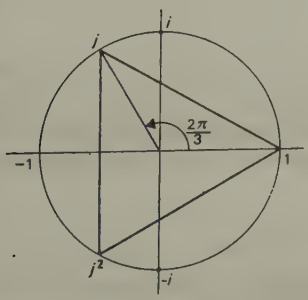
• *Superficie cúbica.* — Superficie algebraica de orden 3. Una superficie cúbica no reglada contiene 27 rectas (reales o imaginarias). Puede construirse una en que las 27 rectas sean reales. La figura así formada es el eicosiheptagrama.

## Cubicable

V. VOLUMEN.

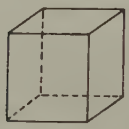
## Cúbicas

• *Raíces cúbicas de la unidad en* C. — Raíces complejas del polinomio $x^3 - 1$. Se las denota 1, $j$ y $j^2$, donde $j = e^{2i\pi/3}$. Verifican $1 + j + j^2 = 0$, y $j = j^2$.



## Cubo

(Geometría.) Poliedro regular cuyas caras son cuadradas. Es un paralelepípedo particular; tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas llamadas también lados; dos caras cualesquiera son bien paralelas, bien perpendiculares. Si $a$ es la longitud de cada arista, la superficie de cada cara es $a^2$, su superficie total es de $6a^2$ y su volumen $a^3$. Véase en VOLÚMENES estas medidas en función del radio de la esfera circunscrita.



V. DUPLICACIÓN, MÁGICO (Cubo), RECORTE.

• *Cubo de un elemento x de un conjunto monoide* (E, $*$). — El elemento $y \in E$ tal que $y = x^2 * x = x^3$.

• *Cubo de* $\mathbf{R}^n$ *de centro* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *y de lado* $2\alpha$. — Producto cartesiano de $n$ intervalos $[\![a_i - \alpha, a_i + \alpha]\!]$. Si I es un intervalo cerrado acotado de **R**, entonces $\mathbf{I}^n$ es un cubo de $\mathbf{R}^n$. Cuando se considera $\mathbf{R}^n$ como un espacio afín euclídeo, un cubo de $\mathbf{R}^n$ es un cuadrado para $n = 2$ y un cubo en el sentido usual para $n = 3$.
V. HIPERCUBO.

• *Cubo de Hilbert.* — V. HILBERT.

• *Cubo mágico.* — V. MÁGICO.

• *Cubo de un número a.* — Producto de este número dos veces por él mismo:

$$a \times a \times a = a \times a^2 = a^3.$$

(V. PERFECTO.)

• *Duplicación del cubo.* — V. DUPLICACIÓN.

## Cudnouskii, Grigory

V. CHOODNOVSKY.

## Cuerda

Segmento que une dos puntos de un arco de curva. Dos curvas de un círculo tienen igual longitud si y solamente si están a igual distancia del centro.
V. FOCAL.

## Cuerdas

• *Ecuación de las cuerdas vibrantes.* — V. VIBRANTES.

## Cuerpo

(Usual.) Sinónimo de sólido. V. PLATÓNICOS, REDONDO.

(Estructura.) En álgebra, se llama cuerpo a un anillo unitario K tal que $K^* = K - \{0\}$ sea un grupo multiplicativo. Todo elemento no nulo de K es, por tanto, multiplicativamente inversible en K. Un cuerpo posee al menos dos elementos 0 y 1. Su multiplicación no es necesariamente conmutativa; ejemplo, los cuerpos **H** de los cuaternios (V. IZQUIERDO). En esta obra, salvo mención explícita en contrario, «cuerpo» significa «cuerpo conmutativo», es decir, cuerpo cuya multiplicación es conmutativa; ejemplos: **Q**, **Q**(*i*), **R**, **C**, así como los cuerpos finitos $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ y $\mathbf{F}_{p^n}$ para todo $p > 0$ primo y $n \in \mathbf{N}^*$. V. ADYUNCIÓN (Cuerpo obtenido por), ALGEBRAICAMENTE (cerrado, clauso), ALGEBRAICO (Cierre), ALGEBRAICOS (Números), BOREL, CENTRO, CICLOTÓMICO, COCIENTES, COMPLEJOS, COMPLETO, CUADRÁTICO, CUATERNIOS, DESCOMPOSICIÓN, DISLOCACIÓN, EXTENSIÓN, FINITO, FRACCIONES (Cuerpo de las), GALOIS, GLOBAL, INVARIANTES (Cuerpo de las), IZQUIERDO, LOCAL, ORDENADO, *p*-ÁDICOS (Número), RACIONALES, RAÍCES, REALES, RUPTURA, SOBRECUERPOS, SUB-CUERPOS, TOPOLÓGICO, VALORACIÓN, VALORADO.

• *Problema de n cuerpos.* — Problema fundamental de la mecánica de origen astronómico: dado un referencial y $n$ cuerpos, se trata de escribir las ecuaciones de su movimiento. Este problema que se relaciona con la integración de $3n$ ecuaciones diferenciales del segundo orden sólo está resuelto en casos particulares, sobre todo para $n = 2$. En el caso de dos cuerpos A y B, la trayectoria de B por relación a A es una cónica cuyo género depende de la velocidad inicial de B. El caso de $n = 3$ es históricamente el más célebre, por ser los tres cuerpos la Tierra, el Sol y la Luna. Tras haber desafiado a los matemáticos en la elaboración de las nueve ecuaciones diferenciales que introduce, fue resuelto de manera teórica por Sundmann, en 1913, salvo el caso en que los tres cuerpos están en el mismo punto en el mismo instante. No obstante, la complicación y la longitud de los cálculos numéricos que exigía hacían esta solución prácticamente inutilizable. El advenimiento de los ordenadores ha superado ese obstáculo en mecánica newtoniana (pero no en relatividad general). En el caso en que $n \geqslant 3$ se introducen hipótesis simplificadoras que afectan bien a las reparticiones de las masas (por ejemplo, para las estrellas), bien a las condiciones iniciales (sistema solar).

## Cullen, J.

• *Números de Cullen.* — Son los números enteros de la forma $n2^n + 1$. Para todo entero primo $p \neq 2$, existe una infinidad de enteros $n \in \mathbf{N}$ tales que $p$ divide $n2^n + 1$. Se sabe que el número primo más pequeño de Cullen es $141 \cdot 2^{141} + 1$. (Este número tiene cuarenta y cinco cifras en el sistema decimal.) Se ignora si existe una infinidad de números primos de Cullen.

## Curl

Sinónimo de rotacional.

## Curva

Esta palabra empleada sola no tiene definición precisa. Las curvas algebraicas (resp. parametradas) son las variedades algebraicas (resp. diferenciales) de dimensión 1. Antiguamente, las curvas estudiadas y utilizadas por los matemáticos eran curvas algebraicas o unicursales. Pero el estudio de casos más y más «patológicos» alejándose de la idea intuitiva de curva (curva de Péano, de Koch, etc.) ya no permite dar una definición simple y general que englobe todos los casos. Numerosas curvas admiten una representación paramétrica o pueden ser definidas por una ecuación intrínseca o por una ecuación por relación a un sistema de coordenadas. Según la naturaleza de las coordenadas, la ecuación se denomina cartesiana, polar, tangencial... A veces, una curva es definida como intersección de dos superficies (V. ECUACIONES). Ciertas curvas son la representación gráfica de funciones (V. GRÁFICA) o de soluciones de ecuaciones diferenciales (curvas integrales). Finalmente, existen numerosos procedimientos que permiten definir una curva a partir de una o varias curvas distintas: envolvente, evoluta, antipodar, podar, conchoide, etc. No indicamos todas las remisiones, excesivamente numerosas, relativas a esta palabra.

## Curvatura

• *Centro de curvatura en un punto* M *de un arco geométrico* $\Gamma$ *de clase* $C^k (k \geqslant 2)$ *sin puntos estacionarios definido sobre un intervalo* I *por* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{h(s)}$. — Punto C tal que $\overrightarrow{CM} = R(s) \cdot \vec{n}$, donde $R(s)$ es el radio de curvatura de $\Gamma$ en M y $\vec{n}$ el vector normal en M.
V. MEUSNIER.

• *Círculo de curvatura.* — Sinónimo de círculo osculador.

• *Curvatura de un arco geométrico* $\Gamma$ *de clase* $C^k$ $(k \geqslant 2)$ *sin puntos estacionarios definido sobre un intervalo* I *por* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{h(s)}$, *donde está la abscisa curvilínea.* — Si $\vec{t}$ es el vector unitario tangente $\overrightarrow{h'(s')}$, si $\vec{n}$ es el vector normal en el punto de parámetro $s$, entonces $\dfrac{\overrightarrow{dt}}{ds} = c(s) \cdot \vec{n}$ con $c(s) \in \mathbf{R}$. La función $c$ así definida es la curvatura de $\Gamma$. El real $c(s)$ se llama la curvatura en M. La curvatura de una recta es nula, la de un círculo de radio R es constante e igual a $1/R$.

• *Curvatura de Gauss de una superficie.* — Curvatura total de la superficie.

• *Curvatura geodésica, normal de una curva trazada sobre una superficie.* — V. GEODÉSICA, NORMAL.

• *Curvatura media, total de una superficie.* — V. MEDIA, TOTAL.

• *Líneas de curvatura de una superficie.* — Una curva trazada sobre la superficie se denomina una línea de curvatura si en cada uno de sus puntos la torsión geodésica es nula. Las líneas de curvatura forman dos familias de curvas ortogonales. En cada punto M de una línea de curvatura C, la tangente en M a C tiene por dirección uno de los ejes de la indicatriz de Dupin en M; las normales en la superficie a lo largo de una línea de curvatura tienen una evoluta.

• *Radio de curvatura en* M *de un arco geométrico* $\Gamma$ *tal que la curvatura* $c(s)$ *de* $\Gamma$ *en* M *no sea nula.* — Número real $R(s) = \frac{1}{c(s)}$. Sea $\Gamma$ plano que admite por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, donde $f$ y $g$ tienen derivadas segundas continuas; tenemos:

$$R^2(s) = (x'^2 + y'^2)^3/(x'y'' - x''y')^2 \quad \text{y} \quad |R(s)| = \frac{ds}{d\alpha}$$

donde $\alpha$ es el ángulo que hace el eje $Ox$ con la tangente en M a $\Gamma$. En el caso particular en que $\Gamma$ tiene por ecuación cartesiana $y = f(x)$ tenemos $R^2(s) = (1 + f'^2(x))^3/f''^2(x)$.

• *Radios de curvatura principales en un punto* M *de una superficie.* — V. PRINCIPALES.

## Curvilínea

• *Abscisa curvilínea.* — Sean $\Gamma$ un arco geométrico de clase $C^k (k \geqslant 1)$ e $(\mathbf{I}, f)$ una representación paramétrica de $\Gamma$. Escogidos un número real $t_0 \in \mathbf{I}$ y $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, se denomina abscisa curvilínea del punto $M(t)$ de $\Gamma$ al número real: $s(t) = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \|f'(t)\|\, dt = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} dt \right\|$. Para dos puntos $M(t_1)$ y $M(t_2)$ de $\Gamma$, el real $|s(t_2) - s(t_1)|$ es igual a la longitud del arco $M(t_1)\, M(t_2)$. Cuando $\Gamma$ está orientado y tiene la orientación del $(\mathbf{I}, f)$ se dice que $\Gamma$ está orientado en el sentido de las abscisas crecientes (resp. decrecientes) si $\varepsilon = 1$ (resp. $\varepsilon = -1$). En el caso en que $\Gamma$ sea plano, tenemos $ds^2 = dx^2 + dy^2 = (\rho d\theta)^2 + d\rho^2$, donde $(x, y)$ y $(\rho, \theta)$ son respectivamente las coordenadas cartesianas y polares de M. En el caso en que $\Gamma$ sea izquierdo, tenemos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\rho d\theta)^2 + d\rho^2 + dz^2$$
$$= (\rho \cos\varphi\, d\theta)^2 + d\rho^2 + (\rho d\varphi)^2$$

donde $(x, y, z)$, $(\rho, \theta, z)$ y $(\rho, \theta, \varphi)$ son respectivamente las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas de M.

• *Integral curvilínea.* — Sean $\Gamma : t \in [\![a, b]\!] \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ un arco parametrado de clase $C^1$ de $\mathbf{R}^3$ y $f$ una función de $\Gamma$ en $\mathbf{R}^3$ definida por: $M(x, y, z) \mapsto f(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. La integral denotada $\int_\Gamma f ds$ y definida por:

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t)$$
$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\, dt$$

se llama integral curvilínea de $f$ a lo largo de $\Gamma$. De hecho, no depende del parametraje de $\Gamma$; por eso también se la denota:

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_\Gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

En el caso en que $f$ es la restricción en $\Gamma$ de un campo vectorial $\vec{V}$ definido sobre un abierto U de $\mathbf{R}^3$, la integral $\int_\Gamma f ds$ se denota también:

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} \quad \text{o} \quad \int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{ds}.$$ V. Circulación, Trabajo.

• *Figura curvilínea.* — Figura formada de líneas curvas.

## Curvilíneas

• *Coordenadas curvilíneas de un punto de una superficie* $\Sigma$. — Dada una superficie $\Sigma$ definida por ecuaciones paramétricas $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ y $z = h(u, v)$, se dice que $u$ y $v$ son las coordenadas curvilíneas de un punto M de $\Sigma$ si M admite $(f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ por coordenadas cartesianas.

• *Coordenadas curvilíneas en el espacio.* — Supongamos que en una parte P de $\mathbf{R}^3$ existen tres familias de superficies $(\Sigma_u)_{u\in U}$, $(\Sigma_v)_{v\in V}$, $(\Sigma_w)_{w\in W}$ tales que para todo punto M de P pase una superficie y una sola de cada familia. El triplete $(u, v, w)$ de los índices respectivos de estas tres superficies se llama sistema de coordenadas curvilíneas de M. Las tres superficies se llaman superficies coordenadas. Las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas son casos particulares de coordenadas curvilíneas. Para las coordenadas cartesianas, por ejemplo, las familias de superficies son familias de planos paralelos.

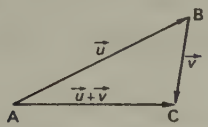
# CH

**ch**

Abreviatura de coseno hiperbólico.

## Chasles, Michel (1793-1880)

• *Relación de Chasles.* — Sea $\mathscr{E}$ un espacio afín asociado a un espacio vectorial E. Todo triplete (A, B, C) de puntos de $\mathscr{E}$ verifica la relación $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ llamada relación de Chasles.




• *Relación de Chasles para los ángulos.* — Para todo triplete $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vectores no nulos de un plano vectorial euclídeo tenemos la relación $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$. Para todo triplete $(D_1, D_2, D_3)$ de rectas vectoriales [resp. afines de un plano vectorial (resp. afín) euclídeo tenemos la relación $(\widehat{D_1, D_2}) + (\widehat{D_2, D_3}) = (\widehat{D_1, D_3})$.

Para todo triplete $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ de semi-rectas vectoriales (resp. a afines) de un plano vectorial (resp. afín) euclídeo tenemos la relación:

$$(\widehat{\Delta_1, \Delta_2}) + (\widehat{\Delta_2, \Delta_3}) = (\widehat{\Delta_1, \Delta_3}).$$

Todas estas relaciones son llamadas relaciones de Chasles.

• *Relación de Chasles sobre un eje.* — Todo triplete (A, B, C) de puntos de un eje verifica la relación $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ llamada relación de Chasles.

## Chebichew o Chebychew

V. TCHEBYCHEW.

## Chen, Ching Jun (1933- )

• *Teorema de Chen.* — Todo número par suficientemente grande es, bien suma de dos enteros primos bien suma de un número primo y del producto de

dos números primos. Es el resultado más cercano a la conjetura de Goldbach.
V. GOLDBACH, VAUGHAM, VINOGRADOV.

## **Chevalley,** Claude (1909-1984)

• *Teorema de Chevalley.* — Sean K un cuerpo finito y $f \in K[X_1, ..., X_n]$ un polinomio homogéneo de grado $d < n$. Existe $(x_1, ..., x_n) \in K^n$, distinto del origen (0, ..., 0) tal que $f(x_1, ..., x_n) = 0$

## **Chinos**

• *Teorema de los restos chinos o teorema chino.* — Dados dos astros cuyos períodos de revolución y posiciones son conocidos, la búsqueda del tiempo que tardarán en presentar la misma posición se remite al resultado siguiente que los Chinos de la alta Antigüedad conocían: dados dos enteros extraños $u$ y $v$, que verifican una relación de Bézout $\alpha u + \beta v = 1$, si $a$ y $b$ son dos enteros, el sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv a \bmod u \\ x \equiv b \bmod v \end{cases}$$

admite en $\mathbf{Z}$ las soluciones $\alpha ub + \beta va + kuv$ con $k \in \mathbf{Z}$.

## **Chomsky,** Noam (1928- )

• *Clasificación de Chomsky de las gramáticas formales.* — Clasificación que sigue ciertas restricciones aportadas a sus reglas.
— *Gramáticas de tipo 0:* ninguna restricción se aporta a sus reglas. Los lenguajes engendrados por estas gramáticas son poco estudiados.
— *Gramáticas de tipo 1 también llamadas de contexto ligado:* todas las reglas son de la forma $f_1 A f_2 \to f_1 g f_2$, donde A pertenece al alfabeto no terminal $\Sigma$ y donde $g$, $f_1$ y $f_2$ pertenecen a $(X \cup \Sigma)^*$.
— *Gramáticas de tipo 2 llamadas también fuera de contexto:* todas las reglas son de la forma $A \to f$, donde $A \in \Sigma$ y $f \in (X \cup \Sigma)^*$.
Los lenguajes engendrados por estas gramáticas son reconocibles por autómatas llamados autómatas de memoria pile.
— *Gramática de tipo 3 llamadas también regulares o de Kleene:* todas las reglas son de la forma $A \to aB$ o bien todas las reglas son de la forma $A \to Ba$ con $a \in X$ y $(A, B) \in \Sigma^2$.
Los lenguajes engendrados por estas gramáticas son reconocibles por autómatas llamados autómatas de estados finitos, o autómatas finitos.

• *Lenguaje de Chomsky.* — Lenguaje engendrado por una gramática de tipo 2 en la clasificación de Chomsky.

## **Choodnovsky,** Grigory (1952- )

Este nombre también ha sido ortografiado Chudnovsky, Cudnouskii, Tchoudnovsky.

• *Teoremas de Choodnovsky:*

1) No existe algoritmo general para resolver las ecuaciones del tipo $P(2^{x_1}, 3^{x_2}, 5^{x_3}, \ldots)$, donde P es un polinomio con varias indeterminadas. Este resultado completa el teorema de Matjasevich que Choodnovsky demostró también en 1970 (V. MATJASEVICH).

2) Los números $\Gamma(1/3)$ y $\Gamma(1/4)$ valores de la función $\Gamma$ en los puntos 1/3 y 1/4 son trascendentes.

3) Los números $\pi$ y $\Gamma(1/3)$ —resp. $\pi$ y $\Gamma(1/4)$— son algebraicamente independientes.

## **Christoffel,** Elwin Bruno (1829-1900)

• *Símbolo de Christoffel.* — Dada la primera forma cuadrática fundamental de una superficie: $g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2$, los símbolos de Christoffel $\Gamma_{ijk}$ y $\Gamma_{ij}^l$ son definidos por:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

Pueden definirse más generalmente en espacios de dimensión $n \geqslant 3$. Se utilizan en mecánica (teoría de la relatividad con $n = 4$); permiten entonces poner las ecuaciones de Lagrange bajo la forma

$$\frac{d^2x_k}{ds^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ijk}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds} = 0$$

donde $s$ es un parámetro (V. LAGRANGIANO, RIEMANN-CHRISTOFFEL).

• *Tensor de Riemann-Christoffel.* — V. RIEMANN.

## **Chudnovsky,** Grigory

V. CHOODNOVSKY.

# D

## D

Anillo de números decimales.
V. DECIMAL (Número).

## D'Alembert, Jean Le Rond (1717-1783)

V. ALEMBERT (D').

## Dalambertiano

• *Dalambertiano de una función f* de $\mathbf{R}^{n+1}$ *en* $\mathbf{R}$ *diferenciable sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^{n+1}$ *y que admite derivadas parciales segundas.* — Función $\Box_n f$ de U en $\mathbf{R}$ definida por:

$$\Box_n f(t, x_1, ..., x_n) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f(x_1, ..., x_n),$$

donde $\Delta f$ es la laplaciana de $f$ y $v$ una constante.

## Daniell, P. J. (1889-1946)

V. INTEGRACIÓN.

## Darboux, Jean Gaston (1842-1917)

• *Criterio o regla de convergencia de Raabe-Darboux-Duhamel.* — V. RAABE.

• *Sistema de referencia o triedro de Darboux.* — Triedro de Darboux-Ribaucour.

• *Sumas de Darboux.* — Sean $f$ una función con valores reales continua sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ y una subdivisión $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de $[\![a, b]\!]$. La suma:

$$s_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

donde $m_k = \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x)$ se llama suma de Darboux inferior de $f$ relativamente a $\sigma$. Igualmente, la suma:

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}),$$

donde $M_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x)$ se llama suma de Darboux superior de $f$ relativamente a $\sigma$.

• *Teorema de Darboux.* — Si una función numérica $f$ definida sobre $[\![a, b]\!]$ es la derivada de una función F, entonces, cuando $x$ varía entre $a$ y $b$, la función $f$ toma todo valor comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$.

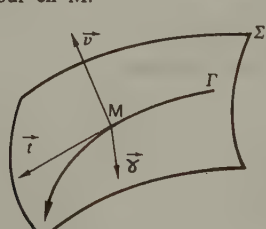
• *Triedro de Darboux-Ribaucour.* — Sea $\Sigma$ una superficie parametrada de clase $C^k(k \geqslant 1)$, de representación paramétrica $f:(u, v) \mapsto \overrightarrow{OM} = f(u, v)$ y $\Gamma$ una curva trazada sobre $\Sigma$. Para un punto M dado de $\Gamma$ se considera:

1) El vector unitario $\vec{\nu} = \left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\right) \Big/ \left\| \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} \right\|$ que es un vector normal al plano tangente en M a $\Sigma$;

2) el primer vector $\vec{t} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}$ del triedro de Serret-Frenet en el punto M de $\Gamma$. Es el vector unitario tangente en $\Gamma$ orientado en el sentido de las abscisas crecientes.

3) el vector $\vec{\gamma} = \vec{\nu} \wedge \vec{t}$.

El triedro de vértice M determinado por los tres vectores de la base ortonormada directa $(\vec{t}, \vec{\gamma}, \vec{\nu})$ se llama triedro o sistema de referencias de Darboux-Ribaucour en M.




## Datos

Hipótesis proporcionadas por el enunciado de un problema.

• *Análisis de datos.* — Rama de la estadística, nacida hace una decena de años que debe su desarrollo a los progresos de la informática. Sus métodos tratan de extraer los parámetros característicos de un gran número de datos recogidos, por ejemplo, durante encuestas o sondeos. Se sacan los caracteres $x_1, x_2, ..., x_n$ en los que uno se interesa para individuos $x$, así considerados como elementos de un espacio de dimensión $n$, el espacio de los datos. El análisis de datos, por diferentes métodos (análisis discriminante, análisis de

correspondencias, análisis de componentes principales), trata entonces de aportar elementos de respuestas a preguntas del tipo siguiente: ¿existen correlaciones entre ciertos caracteres $x$? ¿Cuáles son los caracteres que discriminan más a los individuos? ¿Existen caracteres globales (a los que hay que dar un sentido), que permiten reemplazar grupos de caracteres por un carácter único o dos caracteres?
V. FACTORIAL, TAXONOMÍA.

## Débil

• *Ley débil de los grandes números.* — V. GRANDES.

• *Topología débil del dual topológico de un espacio vectorial topológico* E *localmente convexo y separado.* — Topología de la convergencia simple. Es separada y definida por la familia de seminormas:

$$pA(f) = \operatorname*{Max}_{x \in A} |f(x)|$$

donde A es una parte finita de E.

• *Topología más débil que otra.* — Topología menos fina que otra.
V. FINA.

## Débilmente

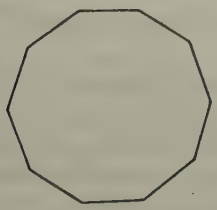
• *Cardinal débilmente inaccesible.* — Sinónimo de cardinal inaccesible, empleado por oposición a cardinal fuertemente inaccesible.
V. INACCESIBLE.

## Deca

V. MÚLTIPLE (Unidad).

## Decágono

Polígono plano de diez lados.



Decágono convexo regular

## Deceleración

Para designar la aceleración de un movimiento retardado, se emplea a menudo el término deceleración (frenado de un vehículo, reingreso de un vehículo espacial en la atmósfera).

## Decelerado

• *Movimiento decelerado.* — Sinónimo de movimiento retardado.

## Decl

V. MÚLTIPLE (Unidad).

## Decidible

• *Enunciado decidible.* — Sea $\mathcal{T}$ una teoría de lenguaje L. Un enunciado A de L se llama decidible en $\mathcal{T}$ si A o (no-A) es un teorema de $\mathcal{T}$; en caso contrario, A se llama indecidible.
V. INDECIDIBLE.

## Deciles

V. CUANTILES.

## Decimal

Del latín *decimalis*, formado con *decem*, diez.

• *Antilogaritmo decimal.* — Nombre dado a veces a la función $x \mapsto 10^x$ recíproca de la función logarítmica decimal.

• *Desarrollo decimal.* — Desarrollo en base $p = 10$; por ejemplo, el desarrollo decimal de 2/3 es:

$$0{,}6666\ldots = \sum_{k \geqslant 1} \frac{6}{10^k}$$

El anillo $\mathbf{Z}[1/10]$ es el anillo D de los números decimales.
V. DESARROLLO (en base $p$).

• *Logaritmo decimal.* — Logaritmo de base 10 denotado log. En la práctica se emplea para efectuar numerosos cálculos numéricos. Existen tablas que dan las mantisas de los logaritmos decimales de los enteros. Si $\lambda$ es el logaritmo decimal de $n$, entonces $\lambda - 1$ y $\lambda + 1$ son logaritmos decimales de $n/10$ y $10n$. Por lo tanto, con esas tablas, es posible conocer el logaritmo decimal de un número decimal cualquiera.
V. BRIGGS, CARACTERÍSTICA, MANTISA, MÓDULO.

• *Número decimal.* — Número racional que puede escribirse bajo la forma $n/10^m$, donde $n$ es un entero racional y $m$ un entero natural. Por ejemplo, $-120$; 11/25; $-73$; 9,831 son números decimales, 1/3 no lo es. El producto y la suma de dos decimales son decimales. El conjunto

$$\mathbf{D} = \mathbf{Z}[1/10]$$

de los decimales provisto de la adición y de la multiplicación es un anillo conmutativo unitario, pero no es un cuerpo.
V. FRACCIÓN.

• *Sistema decimal.* — Sistema de numeración de posición de base 10, el más extendido actualmente en la vida corriente. Matemáticamente, no se distingue de los demás sistemas de numeración de posición (bases 2, 8, etc.). Hay reglas que fijan la terminología a emplear para designar ciertas potencias de 10. Se distingue la regla (N), legal en Francia, en Alemania, en el Reino Unido y en otros países y la regla $(n - 1)$, llamada latina, utilizada antiguamente en Francia y en la actualidad en los Estados Unidos, en Italia y en algunos otros países. Las correspondencias son las siguientes:

| | *Regla* (N) | *Regla latina* |
|---|---|---|
| Millón | $10^6$ | $10^6$ |
| Billón | $10^{12}$ | $10^9$ |
| Trillón | $10^{18}$ | $10^{12}$ |
| Cuatrillón | $10^{24}$ | $10^{15}$ |
| Quintillón | $10^{30}$ | $10^{18}$ |
| Sextillón | $10^{36}$ | $10^{21}$ |

Los mil millones ($10^9$) no aparecen, por tanto, en la terminología legal.

• *Fracción decimal.* — Número decimal cuyo denominador es una potencia de diez.

• *Numeración decimal.* — Numeración que utiliza el sistema decimal.

• *Una decimal.* — Cada una de las cifras que componen la parte decimal de un número decimal.

## Decimales

• *Anillo de números decimales.* — V. DECIMAL (Número).

## Decrecimiento

Propiedad de ser decreciente.

## Decreciente

• *Aplicación decreciente de un conjunto ordenado* (E, $\leqslant$) *en un conjunto ordenado* (F, $\leqslant$). — Aplicación $f$ creciente de (E, $\geqslant$) en (F, $\leqslant$), es decir, tal que $x \geqslant y$ implica $f(x) \leqslant f(y)$. La aplicación $f$ es *estrictamente* decreciente si $x > y$

implica $f(x) < f(y)$. Una aplicación decreciente e inyectiva es estrictamente decreciente. Recíprocamente, si E es totalmente ordenado, las aplicaciones estrictamente decrecientes son las aplicaciones inyectivas y decrecientes.

• *División de polinomios según las potencias decrecientes.* — Nombre dado a la división euclídea de polinomios.

• *Sucesión decreciente (resp. estrictamente decreciente).* — Sucesión $(a_n)n \geqslant 0$ de elementos de un conjunto ordenado tal que la aplicación $n \mapsto a_n$ sea decreciente (resp. estrictamente decreciente), es decir, que $n \geqslant m$ implica $a_n \leqslant a_m$ (resp. $n > m$ entrañe $a_n < a_m$).

## Dedekind, Richard Julius Wilhelm (1831-1916)

• *Anillo de Dedekind.* — Anillo conmutativo íntegro en el que todo ideal es, de forma única, producto de ideales primos. El anillo $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$ no es factorial, pero es de Dedekind. Más generalmente, el anillo de los enteros sobre Z de un cuerpo de números algebraicos es un anillo de Dedekind.

• *Axioma o teorema de Dedekind.* — Caracteriza los conjuntos infinitos; un conjunto E es infinito si y solamente si es equipotente a uno de sus subconjuntos propios (es decir, distinto de él mismo). A veces, se denomina Teorema de Peirce-Dedekind.

• *Corte de Dedekind.* — Par (A, B), donde A y B son dos partes no vacías y disyuntas del cuerpo Q de números racionales tales que:

1) todo elemento de A es estrictamente inferior a todo elemento de B;
2) para todo número racional positivo $\varepsilon$ existe un elemento $x$ en A y un elemento $y$ en B tales que $0 < y - x < \varepsilon$. Históricamente, los cortes de Dedekind permitieron la primera construcción rigurosa del cuerpo de los números reales a partir del cuerpo de los números racionales.

• *Test de Dedekind.* — Si la sucesión numérica $(b_n)$ converge hacia 0, si $\Sigma|b_n - b_{n+1}|$ converge y si las sumas parciales de la serie numérica $\Sigma a_n$ están acotadas, entonces $\Sigma a_n b_n$ es convergente.

## Deducción

• (Lógica.) *Criterio o regla de deducción.* — Procedimiento que permite, a partir de enunciados demostrables, construir otros nuevos; ejemplo, el *modus ponens*.

## Defecto

• *Aproximación por defecto.* V. APROXIMACIÓN.

## Deferente

• *Curva deferente de una familia de círculos del plano.* — Lugar geométrico de los centros de los círculos de la familia.

## Deficiente

• *Número deficiente.* — Número entero natural estrictamente superior a la suma de sus divisores que le son estrictamente inferiores. Los enteros 4, 8, 9, 10, 14, 15 son deficientes.

## Definición

Término no matemático. Los axiomas y los elementos primitivos de una teoría se manifestaron rápidamente insuficientes en la práctica para enunciar simplemente los teoremas. Entonces fue preciso introducir abreviaturas, y se llama definición de un término matemático a toda posición de la que él es una abreviación. Este diccionario es una recopilación de más de 3.000 definiciones.

• *Dominio o conjunto de definición de una función.* — Fuente de esa función. Cuando se llama «función» (como a veces ocurre en la enseñanza secundaria) a toda relación funcional, se llama entonces dominio o conjunto de definición de una función $f$ aquel en que tengan sentido las relaciones. Así, se dice entonces que la función cotangente es una función de **R** en **R** cuyo dominio de definición es $R - \pi Z$.

• *Dominio o conjunto de definición de una relación.* — Dada una relación R de un conjunto E en un conjunto F, el conjunto de los $x \in E$ para los que al menos existe un $y \in F$ tal que $x R y$ se denomina el dominio o el conjunto de definición de R.

## Definida

• *Forma bilineal simétrica definida.* — Forma bilineal simétrica $\varphi$ sobre un K-espacio vectorial E tal que $\varphi(x, x) = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in \mathbf{E}$.
V. NEGATIVA, POSITIVA.

• *Forma cuadrática definida.* — Forma cuadrática $q$ sobre un K-espacio vectorial E tal que $q(x) = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in \mathbf{E}$.
V. NEGATIVA, POSITIVA.

• *Forma sesquilineal hermitiana definida.* — Forma sesquilineal hermitiana $\varphi$ sobre un K-espacio vectorial E tal que $\varphi(x, x) = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in \mathbf{E}$.
V. NEGATIVA, POSITIVA.

• *Integral definida.* — Sea $f$ una función numérica de una variable real integrable sobre un intervalo $\mathbf{I} = [\![a, b]\!]$ de **R**. Su integral sobre **I**, denotada $\int_a^b f(t)\,dt$, también se llama integral definida de $f$ sobre **I**. Se utiliza este calificativo sobre todo en el caso de integrales en el sentido de Riemann.
V. RIEMANN.

## Degenerada

• *Forma bilineal degenerada.* — Una forma bilineal se llama no degenerada si sus dos aplicaciones lineales asociadas son inyectivas. Se dice degenerada en el

caso contrario. Una forma bilineal simétrica es degenerada si y solamente si su núcleo se reduce a $\{0\}$.

• *Forma cuadrática degenerada.* — Una forma cuadrática se denomina degenerada o no degenerada según que su forma polar sea degenerada o no.

• *Forma sesquilineal degenerada.* — Una forma sesquilineal se denomina no degenerada si sus dos aplicaciones semi-lineales asociadas son inyectivas. Se denomina degenerada en el caso contrario. Una forma sesquilineal hermitiana es no degenerada si y solamente si su núcleo se reduce a $\{0\}$.

## Degenerado

• *Núcleo degenerado.* — Núcleo de Goursat.

## del ($\nabla$)

Sinónimo desusado de nabla (V. ATLED).

## Delambre, Jean Baptiste Joseph (1749-1822)

• *Fórmulas de Delambre.* — Sean A, B y C las medidas de los ángulos y $a$, $b$, $c$ las distancias esféricas de un triángulo esférico. Las Fórmulas de Delambre se enuncian:

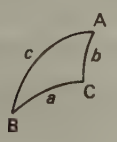
$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} = \operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2} = \operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{C}{2}$$

También se llaman Analogías de Delambre.
V. NEPER.




## Deliano

• *Problema deliano.* — Otro nombre del problema de la duplicación del cubo. V. DUPLICACIÓN.

## Délico

• *Problema délico.* — Nombre que a veces se da al problema de la duplicación del cubo: según la leyenda, el oráculo de Delos habría ordenado a los habitantes de esta ciudad duplicar uno de sus altares. Debido a su apuro, los délicos se habrían dirigido entonces a los geómetras.
V. DUPLICACIÓN.

## Delos

• *Problema de Delos.* — Problema de la duplicación del cubo.
V. DUPLICACIÓN.

## Delta (Δ)

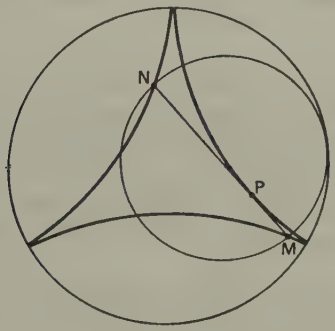
V. LAPLACIANO.

## Deltoide

Hipocicloide con tres puntos de retroceso engendrada por un punto M de un círculo de radio $2a$ (o $a$) que gira interiormente sin deslizarse sobre un círculo de radio $3a$. Su nombre procede de su semejanza con la letra griega delta (Δ). La deltoide es igualmente la envolvente de un diámetro MN del círculo de radio $2a$ que gira interiormente sin deslizarse sobre un círculo de radio $3a$. Paramétricamente viene definida en un sistema de referencia ortonormado por las ecuaciones:

$$x = 2a\cos t + a\cos 2t \quad \text{e} \quad y = 2a\,\text{sen}\,t - a\,\text{sen}\,2t.$$

Longitud $16a$; área $2\pi a^2$.
V. SIMSON.




## De Moivre, Abraham (1667-1754)

V. MOIVRE (De).

## De Morgan, Augustus (1806-1871)

V. MORGAN (De)

## Demostrable

• *Enunciado demostrable.* — Enunciado que posee una demostración formal.
V. FORMAL.

## Demostración

V. FORMAL, RECÍPROCA.

## Denominador

V. COMÚN, FRACCIONARIA (Escritura).

## Densidad

V. ORTOGONALES (Polinomios).

• *Densidad de probabilidad de una variable aleatoria absolutamente continua.* — Función $f$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du,$$

donde F es la función de repartición [también se denomina función de densidad].
V. CONTINUA (Absolutamente).

## Denso

• *Parte o conjunto denso.* — Una parte A de un espacio topológico E se denomina densa con relación a una parte B de E si todo punto de B es un punto adherente en A, dicho en otros términos, si $B \subset \overline{A}$, donde $\overline{A}$ designa la adherencia de A. Cuando A es densa por relación a E se tiene $\overline{A} = E$; en este caso se dice que A es densa en E o también que A es en todas partes densa en E. Por ejemplo, $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{R}$.

## Dependiente

Contrario de independiente.
V. INDEPENDIENTE, INDEPENDIENTES.

## Dependientes

• *Números algebraicamente dependientes.* — V. ALGEBRAICAMENTE.

## Derivabilidad

• *Derivabilidad de una función.* — Propiedad de la función de ser derivable.

## Derivable

• *Función derivable en* $x_0 \in \mathbf{R}$. — Una función definida sobre un intervalo I de R y con valores en un espacio normado E es derivable en $x_0 \in \mathbf{I}$ si admite una derivada en ese punto. Intuitivamente, $f$ es derivable en $x_0$ si su curva representativa admite una tangente en ese punto. Si $u: \mathbf{I} \to \mathbf{E}$ y $v: \mathbf{I} \to \mathbf{E}$ son derivables en $x_0 \in \mathbf{I}$, entonces $u + v$ es derivable en $x_0$ y tenemos:

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Además, en el caso en que $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, son también derivables en $x_0$ las funciones $uv$, $u^n$, $1/v$ (si $v(x_0) \neq 0$), $u/v$ (si $v(x_0) \neq 0$) y tenemos:

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0); \quad (u^n)'(x_0) = nu^{n-1}(x_0)u'(x_0)$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Si $f \circ u$ existe en un entorno de $x_0$, si $u$ es derivable en $x_0$ y $f$ derivable en $u(x_0)$ entonces:

$$(f \circ u)'(x_0) = u'(x_0)f'(u(x_0)).$$

V. DIFERENCIABLE (Aplicación).

• *Función derivable sobre un intervalo* I *de* R. — Función definida sobre I, con valores en un espacio normado E y que admite una derivada en todo punto de I.
Toda función derivable es continua. No fue hasta el siglo XIX (V. WEIERSTRASS) cuando se pudieron dar ejemplos de funciones continuas en todo punto y en ninguna parte derivables, cosa que puede parecer paradójica si nos atenemos a las definiciones intuitivas de la continuidad y de la derivabilidad. V. KOCH, PÉANO.

• *Función derivable en* $z_0 \in \mathbf{C}$. — Una función compleja definida en un abierto U de C es derivable en $z_0 \in \mathbf{U}$ si admite una derivada en $z_0$. También se dice que $f$ es holomorfa o monógena en $z_0$.

• *Función derivable sobre un abierto* U *de* C. — Función compleja $f$ derivable en todo complejo $z$ de U. También se dice que $f$ es holomorfa o monógena sobre U. Toda función derivable sobre U considerada como función de $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ poniendo $z = x + iy$ es armónica.
V. ANALÍTICA (Función), CAUCHY (Teorema de), LIOUVILLE (Teorema de), MORÉRA (Teorema de).

• *Función continuamente derivable.* — Función derivable cuya función derivada es continua.
V. TROZOS.

• *Función p veces derivable.* — Función que admite una derivada de orden $p$.

• *Función p veces continuamente derivable.* — Función $p$ veces derivable cuya derivada de orden $p$ es continua.

• *Función indefinidamente derivable.* — Función $p$ veces derivable para todo entero $p$.

## Derivación

Usualmente, efectuar una derivación es calcular la derivada de una función.

• *Derivación en un álgebra* A *sobre un cuerpo conmutativo* K. — Endomorfismo D del K-espacio vectorial A tal que para todo elemento de $x$ e $y$ de A:

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

La aplicación $D : K[\overline{X}] \to K[X]$ definida por $D\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ es una derivación sobre K[X].
Sea $A = \mathscr{D}^{\infty}(\mathbf{I}, \mathbf{R})$ el álgebra de las funciones de I en R indefinidamente derivable sobre I; la aplicación D de A en A definida por $D(f) = f'$ es una derivación sobre A.

• *Derivación sobre el signo* $\int$. — V. LEIBNIZ (Regla de).

## Derivada

• *Derivada en un punto* $x_0 \in \mathbf{R}$. — Dada una función $f$ definida sobre un intervalo I de R y con valores en un espacio normado E, se llama derivada de $f$ en el punto $x_0 \in \mathbf{I}$ al límite, si existe, de:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

cuando $x$ tiende hacia $x_0$, permaneciendo en I y distinto de $x_0$. Se la denota $f'(x_0)$ o $\frac{df}{dx}(x_0)$. En mecánica, la derivada en el instante $t$ de una función $f$ del tiempo se denota $\dot{f}(t)$. Si $x_0$ está en el interior de I, el número $f'(x_0)$ es también el límite de:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

cuando $h$ tiende hacia 0. Si I es un intervalo cerrado $[\![a, b]\!]$ y si $x_0 = a$ (resp. $x_0 = b$), $f'(x_0)$ es el límite de

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

cuando $h$ tiende hacia 0 por valores estrictamente positivos (resp. estrictamente negativos).
V. DERIVABLE, DERIVADO (Número), VECTORIAL (Derivada).

• *Derivada en un punto $z_0$ de un abierto* D *de* **C** *de una función compleja $f$ definida sobre* D. — Es el límite, si existe, denotado $f'(z_0)$ de la relación:

$$\frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}$$

cuando $u \in \mathbf{C}^*$ tiende hacia cero permaneciendo no nulo.
V. DERIVABLE.

• *Derivada en una dirección.* — Generalización de la noción de derivada parcial. Sean $f$ una aplicación de $\mathbf{R}^n$ en **R** definida en un entorno de $x_0 \in \mathbf{R}^n$, y $u$ un vector unitario de $\mathbf{R}^n$. Se dice que $f$ admite una derivada en $x_0$ en la dirección de $u$ si el límite de

$$\frac{f(x_0 + hu) - f(x_0)}{h}$$

cuando $h$ tiende hacia 0 existe. La $i$-ésima derivada parcial de $f$ en $x_0$ corresponde al caso en que:

$$u = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

es el $i$-ésimo vector de la base canónica de $\mathbf{R}^n$.
V. NORMAL (Derivada).

• *Derivada a derecha (resp. a izquierda).* — Dada una función $f$ definida sobre un intervalo **I** de **R** y con valores en un espacio normado E, se llama derivada a derecha (resp. a izquierda) de $f$ en el punto $x_0 \in \mathbf{I}$ al límite, si existe, de la relación:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

cuando $h$ tiende hacia cero por valor estrictamente positivo (resp. estrictamente negativo). La derivada de $f$ a derecha en $x_0$ se representa $f'(x_0)$ y la derivada a izquierda $f'(x_0)$. Si las dos derivadas $f'(x_0)$ y $f'(x)$ existen y son iguales, entonces $f$ admite una derivada en $x_0$ y $f'(x_0) = f'(x_0) = f'(x_0)$. Es posible que $f'(x_0)$ y $f'(x_0)$ existan sin ser iguales.

• *Derivada logarítmica.* — V. LOGARÍTMICA.

• *Derivada n-ésima.* — Sinónimo de derivada de orden $n$.

• *Derivada de orden n* ($n \geqslant 1$). — Derivada (si existe) de $f^{(n-1)}$, donde $f^{(n-1)}$ designa la derivada $(n-1)$-ésima de $f$ (se conviene que $f^{(0)} = f$).
V. PRIMERA, SEGUNDA.

• *Derivada parcial.* — V. PARCIAL.

• *Derivada de Schwarz.* — V. SCHWARZ.

• *Función derivada.* — Si $f$ es una función derivable sobre un intervalo **I** y con valores en un espacio normado, la función $f' : x \mapsto f'(x)$ definida sobre **I** y con valores en E es llamada función derivada de $f$ o más simplemente derivada de $f$. Derivadas de funciones usuales:

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $a$ (constante) | $0$ | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\operatorname{th} x$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ |
| $x^m$ | $mx^{m-1}$ | $\coth x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \coth^2 x$ |
| $e^x$ | $e^x$ | Arc cos $x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $a^x$ | $a^x \operatorname{Log} a$ | Arc sen $x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\operatorname{Log} x$ | $\frac{1}{x}$ | Arc tg $x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \operatorname{Log} a}$ | Arc cotg $x$ | $\frac{-1}{1+x^2}$ |
| $\cos x$ | $-\operatorname{sen} x$ | Arg ch $x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\operatorname{sen} x$ | $\cos x$ | Arg sh $x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ | Arg th $x$ | $\frac{1}{1-x^2} (-1 < x < 1)$ |
| $\operatorname{cotg} x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$ | Arg. coth $x$ | $\frac{1}{1-x^2} (x < -1 \text{ ó } x > 1)$ |

• *Geometría derivada de otra.* — Sinónimo de geometría subordinada a otra (V. SUBORDINADA).

## Derivado

• *Conjunto derivado de una parte* P *de un espacio topológico.* — Conjunto de los puntos de acumulación de P. A partir de esta noción fue como Cantor comenzó el estudio de lo que pronto iba a convertirse en la teoría de los conjuntos.

• *Grupo derivado.* — Sea G un grupo; el sub-grupo H de los conmutadores de G es distinguido en G. El grupo cociente G/H se llama el grupo derivado de G; es un grupo conmutativo.

• *Número derivado en* $x_0$. — Sinónimo de derivada en $x_0$ de una función numérica. Utilizado por razones pedagógicas a fin de evitar la confusión entre derivada en un punto y función derivada.

• *Polinomio derivado.* — Se llama polinomio derivado de un polinomio

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K[X]$$

el polinomio $\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ (V. DERIVACIÓN).

• *Vector derivado en* $x_0$. — V. VECTORIAL (Derivada).

## Derivar

Derivar una función es calcular su derivada.

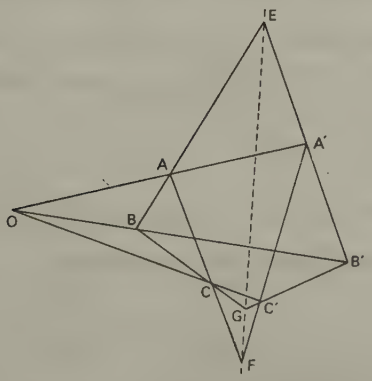
• *Derivar de una función de fuerza.* — V. FUERZA (Función de).

• *Derivar de un potencial.* — V. POTENCIAL.

## Desargues, Girad (1591-1661)

V. ARGUESIANO.

• *Teorema de Desargues.* — Sean P(E) un espacio proyectivo (A, B, C) y (A', B', C') dos triángulos de P(E) sin vértices comunes. El teorema de Desargues afirma que si las rectas (AA'), (BB') y (CC') son concurrentes, entonces los puntos (AB) ∩ (A' B'), (BC) ∩ (B' C') y (CA) ∩ (C' A') están alineados. Se encuentran diversas formas de este teorema en geometría afín, pero su enunciado debe tener en cuenta el hecho de que dos rectas concurrentes en un espacio proyectivo corresponden a dos rectas secantes o paralelas en un espacio afín.



## Desarrollable

• *Función desarrollable en serie entera.* — Una función real $f$ definida sobre un abierto D de **R** o de **C** es desarrollable en serie entera en el punto $x_0 \in D$ si existe en D un entorno abierto V de $x_0$ y una serie entera $\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ cuyo radio de convergencia sea no nulo, tales que para todo $x_0$ perteneciente a V, la serie:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(x - x_0)^n$$

converja hacia $f(x)$. Tal función es necesariamente de clase $\mathbf{C}^\infty$ sobre V y tenemos:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{pues } f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

La serie $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x - x_0)$ se denomina desarrollo de $f$ en serie entera en un entorno de $x_0$ o en $x_0$.
V. DESARROLLO (en serie entera).

• *Superficie reglada desarrollable.* — Superficie tal que para toda generatriz el plano tangente es el mismo en todo punto de la generatriz. Ejemplos: los conos y los cilindros. Por el contrario, una esfera, la hiperboloide (en un casco) y la paraboloide hiperbólica no son desarrollables, aunque esas dos primeras superficies estén regladas. Intuitivamente, si se representa con la ayuda de papel una superficie de ese tipo, se la puede hacer plana mediante cortes con las tijeras.

## Desarrollo

• *Desarrollo asintótico de una función real.* — V. ASINTÓTICO.

• *Desarrollo en base p* $(p \in \mathbf{N} - \{0, 1\})$. — Todo número entero positivo $x$ puede escribirse de forma única $x = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$, donde las $a_k$ son enteros naturales tales que $0 \leqslant a_k \leqslant p - 1$. La sucesión $a_0, a_1, \ldots, a_n$ así obtenida se llama el desarrollo de $x$ en base $p$ que a veces se escribe:

$$x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}^{\,p}.$$

Por ejemplo:

$$13 = \overline{1101}^{\,2}; \quad 13 = \overline{111}^{\,3}; \quad 13 = \overline{21}^{\,6}; \quad 13 = \overline{13}^{\,10}.$$

De esto desprende que todo elemento positivo del anillo $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \subset \mathbf{Q}$ puede escribirse:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k p^k$$

con $a_k$ entero de $[0, p-1]$ y $m \in \mathbf{Z}$. Así, en $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{5}\right]$ tenemos: $\frac{289}{25} = \frac{4}{5^2} + \frac{2}{5} + 1 + 2 \times 5$.

Para todo número real $x \in [\![0, 1]\!]$, existe una serie única $(a_n)_{n \geqslant 1}$ de enteros de $[0, p-1]$ tal que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{p^n}$ converja hacia $x$; esta serie es el desarrollo de $x$ en base $p$. Las sumas parciales de esta serie son elementos de $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \subset \mathbf{Q}$ que proporcionan aproximaciones racionales de $x$. El desarrollo de $x$ en base 10 también se llama desarrollo decimal.

V. DECIMAL (Desarrollo), HENSEL, *p*-ÁDICO.

• *Desarrollo de un determinante.* — Sea $M = (\alpha_{ij})$ una matriz cuadrada de orden $n$ con coeficientes en un cuerpo K. Para todo entero $i$ de $[1, n]$ si $\det(M_{ij})$ es el menor asociado al elemento $\alpha_{ij}$, se llama desarrollo de Laplace del determinante $\det(M)$ de M o desarrollo según la columna $i$ la fórmula:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ji} \det(M_{ji}).$$

Para $n = 2$ ó $n = 3$, esto da, si se toma por ejemplo $i = 1$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{21} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{31} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}.$$

Este método permite, por tanto, en principio, el cálculo práctico de todo determinante.

Se llama asimismo desarrollo de $\det(M)$ por relación a la $j$-ésima línea la fórmula:

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \alpha_{ji} \det(M_{ji}).$$

V. SARRUS.

• *Desarrollo en fracción continua de un irracional positivo.* — V. CONTINUA.

• *Desarrollo limitado de una función real.* — V. LIMITADO.

• *Desarrollo p-ádico o de Hensel.* — V. *p*-ÁDICO.

• *Función que admite un desarrollo en serie entera en* $x_0$. — Función desarrollable en serie entera en $x_0$.

V. DESARROLLABLE.

Damos aquí algunos ejemplos de desarrollos en serie entera:

$$e^x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}; \quad \cos x = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{y} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Los desarrollos precedentes son válidos para todo $x \in \mathbf{C}$; los que siguen lo son para $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n; \quad \operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

además, aquí $x \in \mathbf{R}$

$$\operatorname{Arc\,tg} x = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad \operatorname{Arg\,th} x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

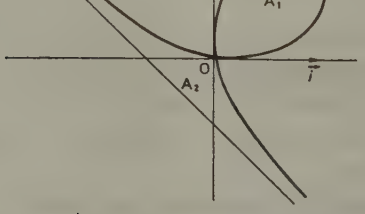
y

$$(1+x)^m = 1 + mx + \sum_{n\geqslant 2} \frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1)}{n!} x^n.$$

V. EULER (Teoremas de), MAC-LAURIN (Serie de), TAYLOR (Serie de).

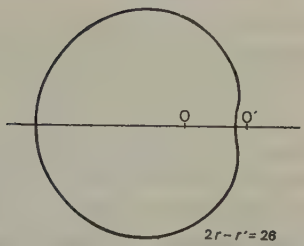
## **Descartes,** René (1596-1650)

• *Folium de Descartes.* — Cúbica de punto doble de ecuación cartesiana $x^3 + y^3 = 3axy$ en un sistema de referencias ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donde O es el punto doble y donde $\vec{i}$ y $\vec{j}$ son vectores directores de las dos tangentes en O a la curva. El área del dominio $A_1$ limitado por el rizo es igual al área del dominio $A_2$ limitado por las dos ramas infinitas y la asíntota de ecuación $x + y + a = 0$.




• *Ovalo de Descartes.* — Curva plana cuya ecuación bipolar por relación a dos puntos O y O′ es de la forma $ar + br' = c$, donde $a$, $b$, $c$ son tres reales tales que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Las cónicas de centro y el círculo son óvalos de Descartes particulares. Un óvalo de Descartes es analagmático por relación a cada uno de los puntos O y O′ llamados focos del óvalo.

$3r + 2r' = 60$




$2r - r' = 26$

• *Regla de los signos de Descartes.* — Dado un polinomio P(X) de coeficientes reales, se denota V el número de variaciones de signo de los coeficientes de P(X) (V aumenta en 1 cada vez que los signos de un coeficiente y del coeficiente no nulo siguiente son diferentes), Se denota $p$ el número de raíces positivas de P(X). El teorema de Descartes afirma que $V - p$ es un entero par positivo o nulo. Por ejemplo, para:

$$P(X) = 5X^6 + 3X^4 - X^3 - X^2 - X - 5,$$

tenemos V = 1, y, por tanto, P admite necesariamente una única raiz positiva.

• *Relación de Descartes.* — Sean A, B, C y D cuatro puntos de un eje tales que (A, B, C, D) sea una razón armónica. Estos puntos verifican la igualdad $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$, llamada relación de Descartes.

• *Teorema de Descartes-Euler.* — Sean A, F y S los números de aristas, de caras y de vértices de un poliedro convexo: el teorema de Descartes-Euler afirma que A = F + S − 2.

## Descomposición

• *Descomposición canónica de una aplicación.* — V. CANÓNICA.

• *Descomposición de Iwasawa.* — V. IWASAWA.

• *Descomposición en factores irreductibles en un anillo factorial* A. — Todo elemento no nulo y no inversible $x \in A$ se escribe de una manera única bajo la forma $up_1 \dots p_r$, donde $u$ es un elemento inversible de A y donde, para todo $i = 1, \dots, n$, el elemento $p_i$ es irreductible en A. Así, en C[X] todo polinomio P(X) de grado $n$ se escribe:

$$P(X) = a_0(X - a_1)(X - a_2) \dots (X - a_n),$$

donde $a_i \in C$ para todo $i$ tal que $0 \leqslant i \leqslant n$.

• *Descomposición en factores primos en* N. — Todo entero natural $n > 1$ se escribe de una manera única $n = p_1 p_2 \dots p_r$, donde para todo $i = 1, \dots, r$, el entero $p_i$ es primo.

• *Descomposición de una forma cuadrática en cuadrados.* — Sea $q$ una forma cuadrática definida sobre un K-espacio vectorial E de dimensión finita $n$. Des-

componer $q$ en cuadrados es determinar una base $(e_1, ..., e_n)$ de E en la que, para todo vector $x$, $q(x)$ se escribe:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$$

donde $\alpha_i \in \mathbf{K}$ y donde $(x_i)_{i:1, ..., n}$ son los componentes de $x$ sobre la base $(e_1, ..., e_n)$. La base $(e_1, ..., e_n)$ es entonces ortogonal para la forma polar de $q$.

• *Descomposición de Gauss.* — V. GAUSS.

• *Descomposición de un vector* V *según dos sub-espacios suplementarios* $E_1$ *y* $E_2$. — Escritura de V bajo la forma $V = V_1 + V_2$, donde $V_1$ es un vector de $E_1$ y $V_2$ un vector de $E_2$. Esta escritura es única.

• *Cuerpo de descomposición de un polinomio.* — Sinónimo de cuerpo de dislocación.

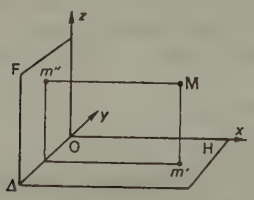
## Descompuesta

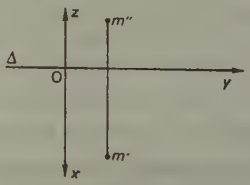
• *Cónica descompuesta.* — Cónica impropia.
V. ESPECIE (Clasificación por).

• *Cuádrica descompuesta.* — V. ESPECIE (Clasificación por).

## Descriptiva

• *Geometría descriptiva.* — Método que permite representar las figuras del espacio sobre un plano, facilitando de esta forma el estudio de sus propiedades. Particularmente, se puede reconstruir un sólido por medio de dos proyecciones sobre dos planos perpendiculares. El principio es el siguiente: se toman dos planos perpendiculares H y F denominados plano horizontal de referencia y plano frontal de referencia, un punto 0 de su intersección Δ llamada línea de tierra, una semirrecta $0y$ trazada por Δ, una semirrecta $0x$ de H y una semirrecta $0z$ de P tales que el triedro $0xyz$ sea directo. Si M es un punto del espacio, sus coordenadas $x$, $y$ y $z$ en ese triedro se denominan respectivamente distancia; ordenada y cota del punto M.



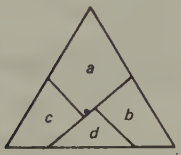

Para representar el espacio de una hoja de papel, se conviene que el plano de la hoja sea el plano horizontal de referencia en el que se superpone el plano frontal de referencia por rotación alrededor de la línea de tierra.

## Desglose (Problemas de)

• *Desglose de un cuadrado en un número finito de cuadrados todos desiguales, o problemas del cuadrado perfecto.* — El enunciado de este problema parece derivar únicamente del dominio de las matemáticas recreativas. De hecho, sus soluciones pueden ser utilizadas en la teoría de Kirchhoff sobre la distribución de las intensidades eléctricas en una red.
V. PERFECTO (Cuadrado).

• *Desglose de un cubo en un número finito de cubos todos desiguales.* — Este problema es imposible.

• *Desglose de un polígono.* — D. Hilbert ha demostrado que es posible transformar, tras desglose en un número finito de partes, todo polígono en cualquier otro polígono de área igual.



Al reunir las cuatro partes, unas tras otras, con la ayuda de tres puntos de unión, la cadena obtenida se vuelve a cerrar formando, bien el triángulo, bien el cuadrado según el sentido de rotación escogido.

## Desigualdad

Dada una relación de orden $\leqslant$ sobre un conjunto E, la expresión $a \leqslant b$ se llama una desigualdad y se lee «*a* es inferior a *b*».
V. BERNOULLI, CONVEXIDAD, HADAMARD, HÖLDER, KOLMOGOROV, MARKOV, MINKOWSKI, ULTRAMÉTRICO.

• *Desigualdad de Bessel o de Bessel-Parseval.* — V. BESSEL.

• *Desigualdad de Bienaymé-Tchebychev.* — V. BIENAYMÉ.

• *Desigualdad de Boole o de Boole-Poincaré.* — V. BOOLE.

• *Desigualdad estricta.* — V. ESTRICTA.

• *Desigualdad de Schwarz o de Cauchy-Schwarz.* — V. CAUCHY.

• *Desigualdad triangular.* — V. DISTANCIA, MINKOWSKI.

## Desigualdades

• *Prolongamiento de las desigualdades por continuidad.* — V. CONTINUIDAD.

## Deslizador

Sinónimo de vector deslizante.

## Deslizamiento

• *Velocidad de deslizamiento de un espacio móvil a lo largo de una recta fija* $\Delta_1$. — Si en el transcurso del movimiento una recta $\Delta$ ligada al espacio móvil coincide con la recta fija $\Delta_1$, cada punto de $\Delta$ tiene la misma velocidad llamada velocidad de deslizamiento del espacio móvil a lo largo de $\Delta_1$.

## Deslizante

• *Vector deslizante.* — Para $(D, \vec{V})$ donde D es una recta (llamada soporte) y donde $\vec{V}$ es el vector nulo o un vector director de D.
V. MOMENTO.

## Deslizarse

• *Rodar sin deslizarse.* — V. RODAR.

## Desplazamiento

• *Desplazamiento de un espacio afín|euclídeo* $\mathscr{E}$. — Isometría afín directa de $\mathscr{E}$. Los únicos desplazamientos del plano euclídeo son las rotaciones y las traslaciones; conservan las distancias y los ángulos de semi-rectas.
V. DIRECTO, HELICOIDAL.

## Despreciable

• *Función despreciable ante otra.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas sobre una parte de D de R. Se dice que $f$ es despreciable ante $g$ (o que $g$ es dominante sobre $f$) en el entorno de un real $x_0$ adherente a D si, para todo real $\varepsilon$ estrictamente positivo, existe un entorno V de $x_0$ tal que $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$ para todo real $x \in V \cap D$. Si $f$ es despreciable ante $g$, entonces $f$ está dominada por $g$; el recíproco es falso.
V. DOMINADA, HARDY, LANDAU.

• *Parte despreciable de un conjunto* E *para una medida* $\mu$. — Parte de E de medida nula.

## Despuntando

• *Como despuntado de* $K^{n+1}$ *donde* K *es un cuerpo.* — Parte C de $K^{n+1} - \{0\}$ tal que todo $x \in C$ y todo $\lambda \in K^*$ se tiene $\lambda x \in C$.

## Desviación

• *Desviación angular.* — V. ANGULAR.

• *Desviación de un real x a un real y.* — Diferencia $y - x$.
V. ABSOLUTO, INTERCUARTIL.

• *Desviación estándar.* — Sinónimo en vía de desaparición de desviación típica.

• *Desviación sobre un conjunto* E. — Aplicación $d$ de $E \times E$ en $\overline{R}_+ = [0, +\infty]$ que verifica para todos los puntos $x$, $y$ y $z$ de E:

1. $d(x, y) = d(y, x)$ (axioma de simetría);
2. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular);
3. $d(x, x) = 0$.

Una distancia es una desviación particular.
V. SEMIDISTANCIA.

## Determinación

• *Determinación del logaritmo complejo sobre un abierto conexo* D *de* C *que no contenga* 0. — Función compleja $f$ continua sobre D y tal que para todo $t \in D$ tengamos $e^{f(t)} = t$.

• *Determinación principal de un ángulo.* — V. MEDIDA (de un ángulo).

• *Juegos de determinación estricta.* — V. ESTRICTA.

## Determinante

• *Determinante de n vectores* $x_1, x_2, ..., x_n$ *respecto a una base* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *de un espacio vectorial de dimensión n.* — Valor tomado en $(x_1, ..., x_n)$ por la única forma $n$-lineal alternada $\varphi$ tal que $\varphi(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$. Este escalar se denota $\det_B(x_1, ..., x_n)$.

• *Determinante de un endomorfismo f de un espacio vectorial* E. — Determinante de la matriz de $f$ respecto a una base B de E. Es independiente de la base B elegida.

• *Determinante de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas* $x_1, x_2, ..., x_n$ *y con coeficientes dentro de un cuerpo* K. — Sea el sistema de $n$ ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n = \beta_n, \end{cases}$$

con $\alpha_{ij} \in K$ y $\beta_i \in K$. El determinante $\Delta$ de este sistema es por definición el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

V. CARACTERÍSTICAS (Determinantes), CRAMER, PRINCIPAL.

• *Determinante de una matriz cuadrada* $M = (\alpha_{ij})$ *de orden n para coeficientes en un cuerpo conmutativo* K. — Determinante respecto a la base canónica de $K^n$ de los $n$ vectores-columnas de la matriz. Se denota frecuentemente:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

V. DESARROLLO, GRAM, JACOBIANO, PRINCIPAL, SARRUS, SYLVESTER, VANDERMONDE, WRONSKIANO.

## Dextrorsum

Desde la izquierda hacia la derecha.
Se dice de una hélice circular si un supuesto observador colocado en el interior del cilindro, paralelamente al eje, la ve ante él «subir» de la izquierda hacia la derecha.
V. SENESTRORSUM.

## Diádico

• *Número racional diádico.* — Empleado por algunos para designar un número racional de la forma $a/2^k$ con $a \in \mathbf{Z}$ y $k \in \mathbf{N}$. Su conjunto es el anillo $\mathbf{Z}[1/2]$ que no hay que confundir con el anillo $\mathbf{Z}_2$ de los números enteros 2-ádicos.
V. *p*-ÁDICOS.

## Diagonal

• *Diagonal de un poliedro.* — Segmento que une dos vértices que no pertenecen a la misma superficie. El tetraedro no tiene diagonales como tampoco los poliedros de Csaszar y de Szilassi.

• *Diagonal de un polígono.* — Segmento de recta que une dos vértices que no pertenecen a un mismo lado. Las diagonales de un rectángulo tienen igual longitud.

• *Diagonal de un producto cartesiano* E × E. — Sub-conjunto de E × E formado de los pares $(x, x)$, donde $x \in E$.

• *Diagonal principal de una matriz cuadrada.* — V. PRINCIPAL.

• *Matriz diagonal.* — Matriz cuyos elementos todos no situados sobre la diagonal principal son nulos. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

• *Matriz de diagonal dominante.* — V. DOMINANTE.

## Diagonalizable

• *Endomorfismo diagonalizable.* — Un endomorfismo $f$ de un espacio vectorial E de dimensión finita se denomina diagonalizable si existe una base de E en la que la matriz de $f$ sea diagonal. El endomorfismo $f$ es diagonalizable si y solamente si E es igual a la suma directa de los sub-espacios propios asociados a los valores propios de $f$.

• *Matriz diagonalizable.* — Matriz cuadrada semejante a una matriz diagonal.
V. DIAGONALIZACIÓN.

## Diagonalización

• *Diagonalización de un endomorfismo f de espacio vectorial.* — Diagonalización de su matriz. Esto equivale a buscar una base en la que la matriz de $f$ sea una matriz diagonal.

• *Diagonalización de una matriz cuadrada diagonalizable* M. — Búsqueda de una matriz cuadrada inversible H tal que $H.M.H^{-1}$ sea una matriz diagonal.

## Diagrama

Nombre dado a representaciones esquemáticas de ciertas nociones o propiedades matemáticas, así como a ciertas representaciones gráficas de funciones numéricas definidas sobre una parte finita de **R**.
V. BARRAS, CARROLL, CONMUTATIVO, EULER, KARNAUGH, SAGITAL, VEITCH, VENN.

## Diametral

• *Plano diametral de una cuádrica con centro.* — Plano que pasa por el centro de la cuádrica.

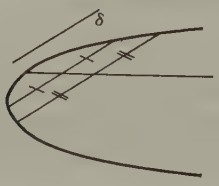
## Diametralmente

• *Puntos de un círculo diametralmente opuestos.* — V. OPUESTOS.

## Diámetro

• *Diámetro de un círculo.* — Diámetro de la cónica particular que es el círculo. Los diámetros del círculo son las cuerdas que pasan por el centro del círculo. Por abuso, se llama a veces diámetro a la longitud de esa cuerda.

• *Diámetro de una cónica.* — Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de dirección dada. Tiene por soporte una recta. Todo diámetro de una cónica con centro está sobre una recta que pasa por el centro de la cónica. Si se considera la cónica en el completado proyectivo de $\mathbf{R}^2$, un diámetro es la polar de un punto del infinito con relación a la cónica.




• *Diámetro de una parte no vacía* A *de un espacio métrico.* — Extremo superior (eventualmente infinito) de todas las distancias $d(x, y)$, donde $x$ e $y$ son puntos de A. Si A es una bola de radio $r$, su diámetro es inferior a $2r$; en un espacio ultramétrico, el diámetro de una bola es igual a $r$; en todo espacio normado sobre $\mathbf{R}$ el diámetro de una bola es igual a $2r$.

## Diámetros

• *Diámetros conjugados de una cónica.* — V. CONJUGADOS.

## Dicotomía

División en dos partes. Por ejemplo, una sucesión $(\overline{[a_n, b_n]})_{n\geqslant 0}$ de intervalos encajados se dice obtenida por dicotomías sucesivas si para todo $n \geqslant 0$ el intervalo $[\![a_{n+1}, b_{n+1}]\!]$ es uno de los intervalos $[\![a_n, c_n]\!]$ ó $[\![c_n, b_n]\!]$, con

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

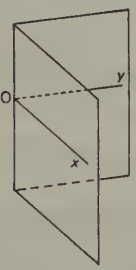
## Didon (en latín, Dido)

• *Problema de Didon.* — Determinación entre las curvas de longitud dada planas cerradas sin punto doble de aquélla cuyo interior tiene la mayor superfi-

cie; el círculo es la solución de este problema (resultado de J. Bernoulli), que lleva el nombre de la princesa de Tiro, fundadora de Cartago; ella habría encontrado una solución empírica durante la creación de su territorio.

## Diedro

Conjunto constituido por dos semi-planos, llamados caras del diedro, que tienen su frontera común, llamada arista del diedro.




• *Angulo o rectilíneo de un diedro.* — El ángulo de dos semi-rectas Ox y Oy obtenidas por sección del diedro por un plano P perpendicular a la arista es independiente del plano P. Se la llama ángulo o rectilínea del diedro. Considerando los rectilíneos de los diedros, se definen los diedros agudos, rectos, obtusos, complementarios y suplementarios. Por ejemplo, dos diedros se llaman complementarios si sus rectilíneos son complementarios.

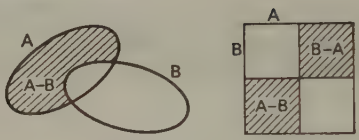
## Difeomorfismo

• *Difeomorfismo de un abierto* U *de un* **R**-*espacio vectorial normado* E *en un abierto* V *de un* **R**-*espacio vectorial normado* F. — Aplicación de U en V que es biyectiva, continuamente diferenciable y cuya biyección recíproca es también continuamente diferenciable.

## Diferencia

• *Diferencia de dos elementos a y b de un monoide conmutativo* (E, +). — Si la ecuación $b + x = a$ admite una solución única en E, se representa $a - b$, llamada diferencia entre $a$ y $b$. En un grupo conmutativo, la diferencia entre dos elementos $a$ y $b$ existe siempre; está definida por $a - b = a + b'$, donde $b'$ es el opuesto de $b$.
V. SUSTRACCIÓN.

• *Diferencia de dos conjuntos* A *y* B. — Conjunto denotado A − B (o, a veces, A\B) de elementos de A que no pertenecen a B.




• *Diferencia simétrica de dos conjuntos.* — V. SIMÉTRICA.

## Diferenciabilidad

• *Diferenciabilidad de una función.* — Propiedad de esa función de ser diferenciable.

## Diferenciable

• *Aplicación diferenciable.* — Dados dos espacios vectoriales normados reales E y F, una aplicación $f$ de un abierto U de E con valores en F es diferenciable en el punto $x_0$ de U si existe una aplicación lineal continua $u$ de E en F tal que:

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - u(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

tenga por límite 0 cuando $x$ tiende hacia $x_0$, por valores distintos de $x_0$. La aplicación lineal $u$, que es entonces única, se llama la diferencial de $f$ en el punto $x_0$ y se denota $df(x_0)$. Si la aplicación $f$ es diferenciable en todo punto de U, se dice que $f$ es diferenciable sobre U. En el caso en que $E = \mathbf{R}$, la aplicación $f$ es diferenciable en $x_0$ si y solamente si $f$ es derivable en $x_0$; la diferencial de $f$ en $x_0$ es la aplicación lineal de $\mathbf{R}$ en F definida por $h \mapsto hf'(x_0)$, donde $f'(x_0)$ es la derivada de $f$ en $x_0$.
V. DIFERENCIAL.

• *Aplicación continuamente diferenciable sobre un abierto* U *de un espacio vectorial normado* E. — Aplicación diferenciable sobre U cuya diferencial $df$ es continua sobre U.

• *Aplicación p veces diferenciable.* — Si una aplicación es diferenciable sobre un abierto U y si su diferencial $df$ es a su vez diferenciable sobre U, la aplicación se denomina dos veces diferenciable. Se define por recurrencia sobre $p \geqslant 1$ una aplicación $p$ veces diferenciable.

• *Aplicación p veces continuamente diferenciable.* — Aplicación $p$ veces diferenciable y cuya $p$-ésima diferencial $f^{(p)}$ es continua.

• *Aplicación indefinidamente diferenciable.* — Aplicación $p$ veces diferenciable para todo entero positivo $p$.

• *Variedad diferenciable.* — Variedad diferencial.

## Diferencial

• *Cálculo diferencial.* — En origen, cálculo sobre los «indivisibles» o infinitamente pequeños; el cálculo diferencial nació de problemas tales como el estudio de las velocidades y aceleraciones, la búsqueda de tangentes a las curvas o de los máximos de funciones, de los problemas de interpolación o de aproximación, etc. Rama del cálculo infinitesimal, se apoya principalmente en la noción de diferencial y de derivada y comprende el estudio de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones en derivadas parciales.

• *Operador diferencial.* — No daremos definición precisa de él. Digamos solamente que un operador diferencial actúa sobre funciones de varias variables reales o de campos de vectores que poseen buenas propiedades de diferenciabilidad, para asociarles una función o un campo de vectores con la ayuda de expresiones que incluyen las derivadas parciales.
V. CROCHET, DALAMBERTIANO, DIVERGENCIA, GRADIENTE, LAPLACIANO, ROTACIONAL.
Señalemos tres fórmulas notables: Sea $f$[resp. $\vec{V}$] una función diferenciable [resp. un campo de vectores] sobre un abierto de $\mathbf{R}^3$; entonces:

$$\overrightarrow{\text{rot grad}}\, f = 0; \quad \text{div rot}\, \vec{V} = 0; \quad \Delta f = \text{div}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f.$$

• (Homología). *Diferencial de grado n.* — V. COMPLEJO (de A-módulos).

• *Diferencial en un punto de una aplicación diferenciable en ese punto.* — V. DIFERENCIABLE.

• *Diferencial de una aplicación.* — Sean E y F dos espacios vectoriales normados no nulos y $f$ una aplicación definida sobre un abierto U de E con valores en F. Si $f$ es diferenciable sobre U, la aplicación de U en $\mathcal{L}(E, F)$ (espacio vectorial de las aplicaciones lineales continuas de E en F) definida por $x \mapsto df(x)$ se llama diferencial de $f$ sobre U y se denota $df$ o también $Df$. Si $f$ es diferenciable sobre un abierto de $\mathbf{R}^3$, las derivadas parciales existen y verifican:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

donde $dx_i$ ($i = 1, 2, 3$) designa la diferencial de la aplicación lineal que, a todo vector de $\mathbf{R}^3$, asocia su $i$-ésima componente.

• *Diferencial exterior de una forma diferencial.* — V. EXTERIOR.

• *Ecuación diferencial.* — Ecuación del tipo $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, donde la incógnita $y$ es una función $n$ veces diferenciable. Resolver esta ecuación es buscar todas las funciones $f$ que verifican:

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

• *Ecuación diferencial.* — V. BERNOULLI, BESSEL, CLAIRAUT, EULER, HILL, INCOMPLETA, INTEGRABLE, INTEGRAL, ISOCLINA, LAGRANGE, LINEAL, MATHIEU, ORDEN, RICATTI, SEPARADAS (A variables).

• *Forma diferencial de grado p sobre un abierto* U *de un espacio de Banach* E *y con valores en un espacio de Banach* F. — Aplicación de U en el espacio de Banach $\mathcal{A}_p(E, F)$ de las aplicaciones $p$-lineales alternadas continuas de $E^p$ en

F. Una forma diferencial de grado 1 es, por tanto, una aplicación de U en el espacio $\mathscr{L}(E, F)$ de las funciones lineales continuas de E en F. La diferencial de una función es una forma diferencial (V. EXACTA, CERRADA).

• *Geometría diferencial.* — Estudio de las variedades diferenciales. Es una rama muy viva de las matemáticas contemporáneas.

• *p-forma diferencial.* — Sinónimo de forma diferencial de grado *p*.

• *Variedad diferencial de dimensión n y de clase* $C^k$. — Viene dada por un conjunto X y una clase de atlas equivalentes, de dimensión *n* y de clase $C^k$. Un atlas de esta clase se denomina entonces atlas de la variedad y un mapa de ese atlas un mapa de la variedad. Las variedades diferenciales de dimensión 1 son las curvas parametradas; las de dimensión 2 son las superficies parametradas.

## Diferente

Contrario de «igual».

## Difusión

• *Ecuación de difusión del calor.* — Ecuación en las derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

donde *a* es un escalar. Si $u(x, y, z, t)$ designa la temperatura en el instante *t* en el punto de coordenadas $(x, y, z)$ de un sólido conductor homogéneo, la función *u* verifica una ecuación en la que *a* depende de la naturaleza del sólido. Fourier estudió esta ecuación utilizando las series que llevan ahora su nombre.

## Dilatación

• *Dilatación de un plano afín* P. — Aplicación afín biyectiva de P sobre P transformando toda recta de P en una recta paralela. Una dilatación es una homotecia afín de razón no nula o una traslación.

## Dimensión

En una teoría matemática dada, una dimensión es una aplicación que a un objeto de esa teoría asocia un cardinal eventualmente infinito..

• *Dimensión de un espacio afín asociado a un espacio vectorial* E *sobre un cuerpo* K. — Es la dimensión del espacio vectorial E sobre el cuerpo K.

• *Dimensión de un espacio proyectivo* $\mathbf{P}(E)$, *donde* E *es un espacio vectorial de dimensión finita* $n > 0$. — El entero $n - 1$; así, $\mathbf{P}(\mathbf{R}^3) = \mathbf{P}_2(\mathbf{R})$ es de dimensión 2.

• *Dimensión de un espacio vectorial.* — Esta noción tomó todo su sentido cuando se comprendió el interés de estudiar los espacios en cuatro dimensiones y después de cualquier dimensión, no admitiendo más representaciones (tan intuitivas) como el plano (dimensión 2) o el espacio usual (dimensión 3). En un espacio vectorial sobre un cuerpo K, todas las bases son equipotentes. El cardinal de una de ellas se denomina la dimensión del espacio considerado; se la denota $\dim_K(E)$ o $\dim(E)$. El espacio se llama de dimensión finita (resp. infinita), según que ese cardinal sea finito (resp. infinito). Por ejemplo, el cuerpo **C** es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre **R** y de dimensión infinita no numerable sobre **Q**; para todo $n \geqslant 1$ el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ es de dimensión finita $n$ sobre **R** y $\mathbf{R}[X]$ de dimensión infinita numerable; el espacio vectorial $\mathscr{C}(\mathbf{I}, \mathbf{R})$ es de dimensión infinita no numerable.

• *Dimensión de Krull de un anillo conmutativo o de un álgebra.* — V. KRUKL.

• *Dimensión de una variedad algebraica afín* V *de* $K^n$ *y de ideal* I. — Dimensión de Krull del álgebra afín $K[V] = K[X_1, ..., X_n]/I$ de la variedad V. V. CODIMENSIÓN.

• *Dimensión de una variedad diferencial.* — V. DIFERENCIAL.

• *Dimensión fractal.* — V. FRACTAL.

• *Dimensión hilbertiana de un espacio de Hilbert.* — V. HILBERTIANA.

## Dinámica

Rama de la mecánica que estudia el movimiento de un móvil en relación con sus causas e introduce la noción de fuerza. El principio de la proporcionalidad de la fuerza en la aceleración en el caso del punto material y las extensiones que pueden hacerse de ella a sistemas más generales remiten la mayoría de los problemas de dinámica a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

## Dini, Ulysse (1845-1918)

• *Problema de Dini-Neumann.* — Determinación de una función armónica $f$ en un dominio D de $\mathbf{R}^n$ conociendo nosotros la derivada normal de $f$ en todo punto M de la frontera de D. Este problema se plantea en química, por ejemplo, en el estudio de ciertos movimientos de fluidos.

• *Teoremas de Dini:*

1) Una función numérica acotada sobre $[\![a, b]\!]$ y cuyos puntos de discontinuidad son todos ellos de primera especie es integrable.

2) Sea E un espacio métrico compacto. Si una sucesión creciente $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de funciones definidas sobre E, continuas y con valores reales, converge simplemente hacia una función continua $g$, entonces la sucesión $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformemente hacia $g$.

## Dinostrato (siglo IV a. de C.)

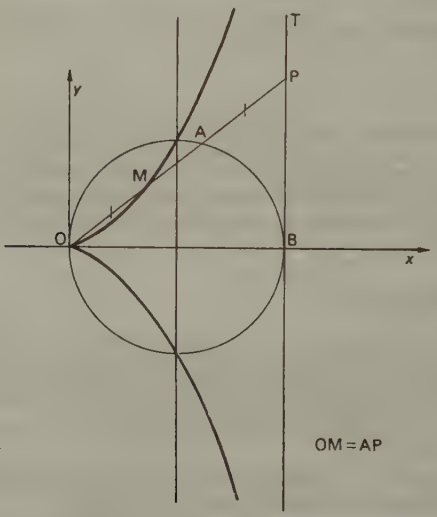
V. CUADRATRIZ.

## **Diocles** (siglo II a. de C.)

• *Cisoide de Diocles.* — Cúbica circular unicursal que tiene un punto de retroceso y un eje de simetría. Es una cisoide oblicua particular, utilizada por Diocles como curva auxiliar para la duplicación del cubo.
La podaria de una parábola con relación a su vértice es una cisoide de Diocles. Se la puede engendrar a partir de una tangente T a un círculo de radio $a$ y del punto O diametralmente opuesto al punto de contacto B de la tangente. La construcción es la siguiente: toda recta que pasa por O y no paralela a T corta el círculo en A y la tangente en P; cuando A describe el círculo, el punto M tal que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AP}$ describe una cisoide de Diocles de la que O es el punto de retroceso y OB el eje de simetría. En un sistema de referencias ortonormado cuyo origen es O y cuyo eje de abscisas coincide con OB, su ecuación cartesiana es $y^2(2a - x) = x^3$. Puede ser definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{2at^3}{1 + t^2}.$$

El área comprendida entre la curva y su asíntota es igual a $3\pi a^2$.




## **Diofante** (325-409)

• *Identidad notable de Diofante.* — Para todo cuadruplete de números reales $(x, y, u, v)$:

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$$

V. LAGRANGE (Identidad de).

## Diofántica

• *Aproximación diofántica de un número real.* — Aproximación de ese número real por números racionales. La herramienta de base es la noción de fracción continua. El estudio por Liouville de la aproximación diofántica de los irracionales algebraicos permitió en 1844 dar los primeros ejemplos explícitos de los números trascendentes: los números llamados hoy números de Liouville. V. LIOUVILLE, MAHLER.

• *Ecuación diofántica.* — Ecuación de la forma $P(x, y, z, ...) = 0$, donde P es un polinomio de coeficientes en **Z** o **Q** del que se buscan las soluciones en **Z** o **Q**. Así, Diofante buscaba «encontrar un triángulo rectángulo del que la suma del área y la hipotenusa fuera un cuadrado y cuyo perímetro fuera un cubo», problema que se remite a la resolución en números racionales de una ecuación de la forma $y^2 = x^3 + k$ (V. MORDELL). La ecuación diofántica más célebre es indudablemente la ecuación de Fermat $x^n + y^n = z^n$ con $n \geqslant 3$ (V. FERMAT). Todavía se ignora si existe un entero $n \geqslant 3$ para el que esa ecuación admita una solución en **Z**.
V. CATALÁN, CHOODNOVSKY, MATJASEVITCH.

## Dirac, Paul Adrien Maurice (1902-1984)

• *Distribución de Dirac.* — Distribución T definida por $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Intuitivamente, es una función nula salvo en cero cuya integral es igual a 1.

• *Medida de Dirac sobre un conjunto* E. — Dado un espacio de Riez $\mathscr{R}$ de funciones reales definidas sobre E, se denomina medida de Dirac sobre $\mathscr{R}$ en el punto $a \in E$ la medida $\delta_a$ definida por $\delta_a(f) = f(a)$ para toda función $f$ de $\mathscr{R}$.

## Dirección

• *Dirección de una variedad lineal afín* $\mathscr{A}$ *de un espacio afín* $\mathscr{E}$ *asociado a un espacio vectorial* E. — Sub-espacio vectorial E′ de E asociado a $\mathscr{A}$. Por ejemplo, la dirección de una recta afín es la recta vectorial que le está asociada. Dos rectas afines tienen igual dirección si y solamente si son paralelas.
V. ORTOGONALES, PARALELISMO.

• *Dirección antiparalela.* — V. ANTIPARALELA.

• *Dirección asintótica.* — V. ASINTÓTICA.

• *Punto del infinito en una dirección.* — V. INFINITO.

• *Derivada en una dirección.* — V. DERIVADA.

## Directa

• *Base directa de un espacio vectorial orientado.* — V. ORIENTACIÓN.

• *Imagen directa de una parte* P *de un conjunto* E *por una aplicación f de* E *en*

F. — Sinónimo de imagen de $p$ por $f$; utilizada por oposición a imagen recíproca.

• *Isometría afín directa de un espacio euclídeo* $\mathscr{E}$. — Isometría afín cuyo automorfismo ortogonal asociado es directo. Tal isometría también se llama un desplazamiento.
V. DESPLAZAMIENTO.

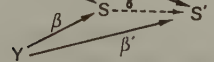
• *Semejanza directa.* — Semejanza que, en tanto que automorfismo, es un automorfismo directo.
V. SEMEJANZA.

• *Suma directa de dos sub-grupos de un grupo conmutativo* G. — Suma directa en tanto que sub-**Z**-módulos del **Z**-módulo G.

• *Suma directa de dos sub-módulos.* — Dados dos sub-módulos $E_1$ y $E_2$ de un módulo E tales que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, el sub-módulo $F = E_1 + E_2$ es tal que todo $x$ de F puede escribirse de forma única $x = x_1 + x_2$ con $x \in E_1$ y $x_2 \in E_2$. El sub-módulo E es denotado $E_1 \oplus E_2$ y llamado suma directa de $E_1$ y $E_2$.

• *Suma directa de dos sub-espacios vectoriales sobre un cuerpo* K. — Suma directa en tanto que sub-K-módulo. Por ejemplo, si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base de $\mathbf{R}^2$ tenemos $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\vec{e}_1 \oplus \mathbf{R}\vec{e}_2$.

• *Suma directa de dos objetos* X *e* Y *de una categoría* $\mathscr{C}$ *(si existe).* — Triplete de la forma $(S, \alpha, \beta)$, donde S es un objeto de $\mathscr{C}$ y $\alpha$, $\beta$ morfismas $\alpha: X \to S$ y $\beta: Y \to S$ tal que si $(S', \alpha', \beta')$ es otro triplete que verifica las mismas condiciones, existe un único morfisma $\gamma: S \to S'$ que cierra conmutativamente el diagrama siguiente.
V. UNIVERSAL.




• *Suma directa de dos conjuntos.* — Reunión disjunta de esos dos conjuntos.

## Directamente

• *Figuras directamente isométricas.* — Figuras F y F' de un espacio afín euclídeo tal que existe una isometría directa I de E sobre E que verifica $I(F) = F'$.
V. INVERSAMENTE.

• *Figuras directamente iguales.* — Sinónimo abusivo de figuras directamente isométricas.

## Directo

• *Automorfismo directo de un* **R***-espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Automorfismo cuyo determinante es positivo. Si E está orientado, transforma

toda base de E en una base de igual sentido. Si E es euclídeo, el determinante de un automorfismo ortogonal directo es igual a 1.

• *Automorfismo afín directo.* — Automorfismo afín cuya aplicación lineal asociada es un automorfismo directo.

• *Factor directo de un módulo (o de un espacio vectorial)* E. — Sub-módulo (o sub-espacio vectorial) que posee un suplementario en E.

• *Producto directo de dos anillos* $A_1$ *y* $A_2$. — Anillo denotado $A_1 \times A_2$ cuyas leyes son definidas por:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

• *Producto directo de dos grupos* $G_1$ *y* $G_2$ *cuyas leyes son denotadas multiplicativamente.* — Grupo denotado $G_1 \times G_2$ cuya ley es definida por:

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

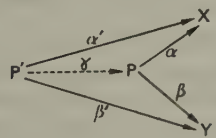
Si los grupos $G_1$ y $G_2$ son conmutativos, el grupo $G_1 \times G_2$ es conmutativo.

• *Producto directo de dos espacios vectoriales* $E_1$ *y* $E_2$ *sobre un cuerpo* K *(o dos módulos* $E_1$ *y* $E_2$ *sobre un anillo* K). — Espacio vectorial denotado $E_1 \times E_2$ sobre el cuerpo K (o módulo denotado $E_1 \times E_2$ sobre el anillo K), cuyas leyes son definidas por:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

• *Producto directo de dos objetos* X *e* Y *de una categoría* $\mathscr{C}$ *(si existe).* — Triplete (P, $\alpha$, $\beta$), donde P es un objeto, $\alpha: P \to X$ y $\beta: P \to Y$ de los morfismos de $\mathscr{C}$ tales que, si (P', $\alpha'$, $\beta'$) es otro triplete que verifica las mismas condiciones, existe un único morfismo $\gamma: P' \to P$ que cierra conmutativamente los diagramas que pueden verse más abajo. Esta noción es la generalización natural a una categoría cualquiera de la noción habitual de producto directo para los grupos o los espacios vectoriales.

V. UNIVERSAL.




• *Razonamiento directo.* — Que no utiliza el principio del razonamiento por el absurdo.

• *Triedro directo.* — Cuando $\mathbf{R}^3$ está orientado, se dice que un triedro (Ox, Oy, Oz) es directo si siendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, vectores directores de las semi-rectas Ox, Oy y Oz, el triplete $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ es una base directa.

## Director

• *Coeficiente director de una recta de un plano P de ecuación* $y = ax + b$ *con*

*relación a un sistema de referencias cartesiano* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *de* P. — El número real $a$. Dos rectas que tienen el mismo coeficiente director con relación a un mismo sistema de referencias son paralelas.

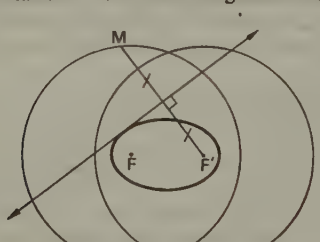
V. PENDIENTE.

• *Vector director de una recta* D *de un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Vector no nulo $\vec{V}$ que pertenece a la dirección de D. Si $A \in D$, entonces D es el conjunto de los puntos M de $\mathcal{E}$ tales que $\vec{V}$ y $\overrightarrow{AM}$ sean colineales.

• *Vector director de una semi-recta* $Ox'$ *de un espacio afín real* $\mathcal{E}$. — Vector director V de la recta que contiene $Ox$ tal que para todo $M \in Ox$ se tenga $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{V}$ con $\alpha \geqslant 0$.

## Directores

• *Círculos directores de una cónica en centro.* — Círculos con centro en los focos de la cónica y cuyo radio es igual a $2a$, donde $a$ es el semi-eje focal. El círculo director en el foco F' es el lugar de los puntos simétricos del otro foco F con relación a las rectas tangentes a la cónica.




• *Cosenos directores de una recta por relación a un sistema de referencias ortonormado* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. — Componentes $(\alpha, \beta, \gamma)$ sobre la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de un vector unitario $\vec{u}$ director de la recta. Tenemos $\alpha = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{i}})$, $\beta = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{j}})$, $\gamma = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{k}})$.

• *Parámetros directores de una recta por relación a un sistema de referencias cartesiano* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. — Componentes sobre la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de un vector director de la recta.

## Directriz

V. CILINDRO, CÓNICA, CONO, CONOIDE, REVOLUCIÓN (Superficie de).

## Dirichlet, Peter Gustav o Lejeune-Dirichlet, P. G. (1805-1859)

• *Criterio de convergencia de Dirichlet.* — Dada una sucesión $(u_n)_{n \geqslant 0}$ de nú-

meros reales, monótona, convergente hacia cero y una sucesión $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de números reales, si existe un número real K tal que:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| \leqslant K$$

cualquiera que sea $n \geqslant 0$, entonces la serie $\Sigma a_n u_n$ es convergente.

• *Criterio de convergencia uniforme de Dirichlet.* — Sean un intervalo $[\![a, b]\!]$ y $(u_n)_{n\geqslant 0}$ una sucesión de funciones numéricas definidas sobre $[\![a, b]\!]$ tales que para todo $x \in [\![a, b]\!]$, la sucesión $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ sea creciente; sea $(a_n)_{n\geqslant 0}$ una sucesión de funciones numéricas definidas sobre $[\![a, b]\!]$. Si existe un número K tal que para todo $x \in [\![a, b]\!]$ tengamos:

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\right| \leqslant K$$

cualquiera que sea $n \geqslant 0$ y si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformemente hacia cero sobre $[\![a, b]\!]$ entonces la serie $\Sigma a_n u_n$ converge uniformemente sobre $[\![a, b]\!]$.

• *Función de Dirichlet.* — Función $f$ de **R** en $\{0, 1\}$ definida por $f(x) = 1$ si $x$ es un racional y $f(x) = 0$ si $x$ es un irracional. Es la función característica de **Q** en **R**.

• *Integral de Dirichlet.* — Integral de la forma $\int_a^b f(x)\frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}dx$, donde $f$ es una función integrable sobre $[\![a, b]\!]$.

• *Núcleo de Dirichlet.* — Función $t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(2^n+1)\pi t}{\operatorname{sen}\pi t}$. Interviene en la expresión de la suma parcial $S_n$ de la serie de Fourier de una función $2\pi$-periódica e integrable:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\frac{x-t}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x-t}{2}}dt.$$

• *Principio de Dirichlet-Schläfli.* — Si $f: E \to F$ es una aplicación entre dos conjuntos finitos E y F tales que Card E > Card F, entonces $f$ no es inyectiva. Este principio fue establecido, utilizado y bautizado como principio del agujero de pichón por Dirichlet. También se llama principio de los cajones o principio de las cajas.

V. AGUJERO DE PICHÓN, CAJAS, CAJONES.

• *Problema de Dirichlet.* — Sean un abierto $\Omega$ limitado de $\mathbf{R}^n$ y $u$ una función real definida y continua sobre la frontera $\Sigma$ de $\Omega$. El problema de Dirichlet consiste en hallar una función $f$ armónica en $\Omega$, continua en $\Omega \cup \Sigma$ y tal que $f(x) = u(x)$ para todo $x \in \Sigma$. Cuando el problema de Dirichlet admite una solución, es única.

V. MONTECARLO (Método de).

• *Serie de Dirichlet.* — Serie de términos complejos $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$, donde $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos y tal que: $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$.

• *Teoremas de Dirichlet.* — 1) Dados dos enteros extraños $a$ y $b$ existe una infinidad de enteros primos en el conjunto de los enteros de la forma $an + b$, es decir, una infinidad de enteros primos congruentes con $b$ módulo $a$.
2) El grupo de las clases de un anillo de enteros algebraicos es finito.

• *Teorema de Dirichlet sobre la convergencia de las series de Fourier.* — V. JORDAN.

• *Teorema de las unidades de Dirichlet.* — V. UNIDADES.

## Disco

• *Disco de un plano euclídeo.* — Bola de ese plano.
V. APUNTADO, BOLA, CONCÉNTRICOS (Discos), UNIDAD (Disco).

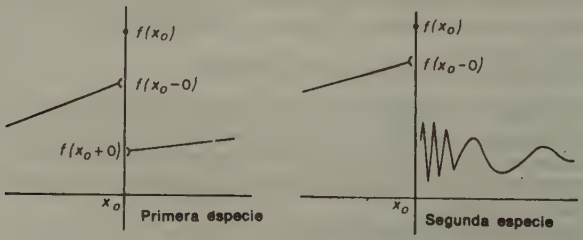
• *Disco de* C. — Dado ún complejo $z_0$ y un número real $r$ estrictamente positivo, se llama disco cerrado (resp. abierto) de centro $z_0$ y de radio $r$ el conjunto de los números complejos $z$ tales que $|z - z_0| \leqslant r$ (resp. $|z - z_0| < r$). Un disco se nota $D(z_0, r)$.
V. CONVERGENCIA (Disco de).

## Discontinua

• *Función discontinua en un punto.* — Función que no es continua en ese punto.
V. DISCONTINUIDAD.

## Discontinuidad

• *Punto de discontinuidad de una función.* — Punto en que la función considerada es discontinua. Se clasifica estos puntos en dos especies. El punto de discontinuidad se llama de primera especie si la función admite un límite a izquierda y un límite a la derecha en ese punto. Se denomina de segunda especie en el caso contrario.



## Discontinuo

• *Espacio topológico totalmente discontinuo.* — Espacio topológico cuyas componentes conexas son singletones. Ejemplos: los espacios discretos, los cuerpos **Q**, $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbf{N}^*}$ y el conjunto triádico de Cantor.

## Discreta

• *Distancia o métrica discreta sobre un conjunto* E. — Distancia definida sobre E por $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. La topología que define sobre E es la topología discreta.

• *Topología discreta sobre un conjunto* E. — Topología sobre E tal que toda parte de E sea abierta, lo que entraña que toda parte de E sea igualmente cerrada. Esta topología puede ser definida por una distancia: la distancia discreta.

• *Variable aleatoria discreta.* — Variable aleatoria cuyo conjunto de valores tomados es finito o numerable. La ley binomial y la ley de Poisson, por ejemplo, son leyes de variables aleatorias discretas.

## Discreto

Se emplea a veces en análisis como sinónimo de numerable o de discontinuo, por oposición a continuo.

• *Anillo (grupo, espacio vectorial) discreto.* — Anillo (grupo, espacio vectorial) topológico cuya topología es la topología discreta. Los sub-grupos discretos de $\mathbf{R}^n$ son de la forma:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{Z} e_i,$$

donde $m \leqslant n$ y los $e_i$ para $1 \leqslant i \leqslant m$ son vectores **R**-linealmente independientes.
V. RED.

• *Carácter cuantitativo discreto.* — Carácter cuantitativo que no toma más que un número finito de valores. Por ejemplo, el número de hijos de un hogar.

• *Espacio topológico discreto (o espacio discreto).* — Espacio topológico provisto de topología discreta. Tal espacio es métrico.

## Discriminante

• *Análisis discriminante.* — V. DATOS (Análisis de).

• *Discriminante de la ecuación del segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ de coeficientes complejos.* — Discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ del polinomio $ax^2 + bx + c$.
V. SEGUNDO GRADO.

• *Discriminante de un polinomio* $F = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n$ *de coeficientes complejos.* — Función simétrica de las raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definida por:

$$\Delta = a_0^{2n-2} \prod_{i<k} (x_i - x_k)^2;$$

en particular:

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2 \quad \text{para} \quad n = 2$$

y $$\Delta = a_1^2a_2^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 - 27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3 \text{ para } n = 3.$$

Si R designa el resultante de los polinomios $f$ y $f'$, donde $f'$ designa al polinomio derivado de $f$, tenemos:

$$R = a_0^{2n-1} \prod_{i \neq k} (x_i - x_k) = (-1)^{n(n-1)/2} a_0 \Delta.$$

V. RESULTANTE.

• *Discriminante de una forma bilineal* $\Phi$ *sobre un espacio vectorial* E *de dimensión finita n por relación a una base* B *de* E. — Determinante designado $\Delta_B(\Phi)$ de la matriz de $\Phi$ con relación a B.

## Disimetría

(Usual.) Sinónimo de asimetría.

• *Coeficientes de disimetría de una serie estadística.* — V. FISHER, PEARSON, YULE.

## Disimétrico

Este término, que se emplea frecuentemente en el lenguaje corriente como sinónimo de asimétrico, se utiliza poco en matemáticas.

## Disjunta

• *Reunión disjunta de dos conjuntos* A *y* B. — Sean A′ y B′ dos conjuntos disjuntos equipotentes a A y B. El conjunto $A' \cup B'$ se denomina una reunión disjunta de A y B.

## Disjuntos

• *Conjuntos disjuntos.* — Conjuntos cuya intersección dos a dos es vacía.

## Dislocación

• *Cuerpo de dislocación de un polinomio* $f \in K[X]$, *donde* K *es un cuerpo conmutativo.* — El más pequeño sobrecuerpo (conmutativo) de K conteniendo

todas las raíces de $f$. Es una extensión de grado finito de K. También se le llama cuerpo de raíces o cuerpo de descomposición del polinomio $f$. Por ejemplo, si $p > 0$ es un entero primo y $n \in \mathbf{N}^*$ el cuerpo finito $\mathbf{F}_{p^n}$ es el cuerpo de dislocación del polinomio $X^{p^n} - X \in \mathbf{F}_p[X]$.
V. RESOLUBLE.

## Dispersión

• *Dispersión estándar.* — En estadística, sinónimo en vías de desaparición de desviación típica.

• *Parámetros de dispersión de una serie estadística de carácter cuantitativo.* — Números que reflejan la extensión de valores tomados por el carácter alrededor de un parámetro de posición. Ejemplos: la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación, la desviación intercuartil, los momentos.

## Distancia

V. DESCRIPTIVA.

• *Distancia o métrica sobre un conjunto* E. — Aplicación $d$ de $E^2$ en $\mathbf{R}_+$ tal que para todos $x$, $y$, $z$ de E:
1) $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$ (axioma de separación);
2) $d(x, y) = d(y, x)$ (axioma de simetría);
3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdad triangular).
El valor absoluto de un anillo A define sobre A la distancia $d : (x, y) \mapsto |x - y|$.
V. DISCRETA, EUCLÍDEA, HAMMING, HAUSDORFF, MÉTRICA, $p$-ÁDICO, SEMIDISTANCIA, TOPOLOGÍA asociada, TRIVIAL, ULTRAMÉTRICA.

• *Distancia entre dos partes* A *y* B *de un espacio métrico* (E, $d$). — Límite inferior de las distancias $d(x, y)$, donde $x$ pertenece a A e $y$ a B. No es una distancia en el sentido definido anteriormente. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$ referido a un sistema de referencias ortonormales la distancia de un punto $A(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ a un hiperplano H de ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ es igual a:

$$\frac{|a_1t_1 + a_2t_2 + \cdots + a_nt_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}.$$

• *Distancia entre dos puntos x e y de un espacio métrico* (E, $d$). — El real $d(x, y)$. En el espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$, corresponde al sentido ordinario de la palabra distancia.

• *Distancia sobre un espacio vectorial normado* E *asociado a una norma de* E. — Distancia $d$ definida sobre E por $d(x, y) = \|x - y\|$. Por el contrario, una distancia no está necesariamente asociada de esa forma a una norma.

• *Distancia sobre un espacio afín* $\mathscr{E}$ *asociado a una norma sobre el espacio vectorial* E *unido a* $\mathscr{E}$. — Distancia $d$ sobre $\mathscr{E}$ definida por $d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|$.

- *Distancia angular.* — V. ANGULAR.
- *Distancia focal de una cónica de centro.* — V. FOCAL.
- *Distancia esférica.* — V. ESFÉRICA.

## Distancias

V. EQUIVALENTES.

## Distinguido

- *Sub-grupo distinguido de un grupo* G. — Sub-grupo H tal que para todo elemento $g$ de G y todo elemento $h$ de H se tenga $ghg^{-1} \in H$. El grupo de las translaciones es distinguido en el grupo de los desplazamientos y el grupo alternado $A_n$ es distinguido en el grupo simétrico $S_n$. En $S_3$ ningún sub-grupo de orden 2 es distinguido. Sea H un sub-grupo de G; entonces G/H está provisto canónicamente de una estructura de grupo si y solamente si H es distinguido en G. Los sub-grupos distinguidos también son denominados sub-grupos invariantes o normales.

## Distribución

Noción que generaliza la de función en el sentido en que la entiende el analista. Su interés estriba en el hecho de que unifica nociones aparentemente extrañas, que permite justificar rigurosamente cierto número de procedimientos de cálculos empleados, hasta ahora sin justificación teórica, y que intervenía en las cuestiones ligadas a las transformaciones de Laplace o de Fourier y los problemas que atañen a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales. Damos aquí una definición de la noción de distribución: sea $\mathcal{D}$ el espacio vectorial de las funciones complejas, definidas sobre $\mathbf{R}^n$, de clase $C^\infty$ y de soporte compacto. Se llama distribución a toda forma lineal continua T sobre $\mathcal{D}$ (no precisamos la topología puesta sobre $\mathcal{D}$).
Frecuentemente, se escribe $\langle T, \varphi \rangle$ en lugar de $T(\varphi)$. Ejemplos de distribución:

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \quad \text{donde} \quad x_0 \in \mathbf{R}^n$$

$$\langle T_2, \varphi \rangle = \int_a^b \varphi(t)\,dt \qquad (n = 1)$$

$$\langle T_3, \varphi \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

V. DIRAC.

- *Distribución de un carácter cuantitativo discreto.* — Función que a cada valor $x$ tomado por el carácter asocia la frecuencia de $x_i$.
V. BARRAS (Diagrama de), BIMODAL, UNIMODAL.

- *Distribución de una variable aleatoria discreta* X *sobre un espacio de probabi-*

*lidades* ($\Omega$, $\mathscr{A}$, P). — Sea $X(\Omega)$ el conjunto finito o numerable de los valores tomados por X. Se llama distribución de X la función $f: X(\Omega) \to \mathbf{R}$ que a todo real $x \in X(\Omega)$ asocia la probabilidad del suceso $X^{-1}(x)$, es decir: «la probabilidad para que $X = x$»; el número real $f(x)$ es positivo y

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x) = 1.$$

V. BARRAS (Diagrama en).

## Distributiva

• *Ley distributiva con relación a otra.* — Sean dos leyes de composición interna $*$ y T sobre un conjunto E. Se dice que la ley T es distributiva a derecha (resp. a izquierda) por relación a la ley $*$ si, cualesquiera que sean los elementos $x$, $y$ y $z$ de E, tenemos:

$$(x * y) \mathrm{T} z = (x \mathrm{T} z) * (y \mathrm{T} z) \quad [\text{resp. } x \mathrm{T} (y * z) = (x \mathrm{T} y) * (x \mathrm{T} z)].$$

Si la ley T es distributiva a izquierda y a derecha, se dice más simplemente que es distributiva con relación a la ley $*$. En **R**, la multiplicación es distributiva por relación a la adición, pero la adición no lo es con relación a la multiplicación. En $\mathfrak{P}$ (E), la intersección y la reunión son distributivas la una con relación a la otra.

## Distributividad

Propiedad de ser distributivo.
V. DISTRIBUTIVA, DISTRIBUTIVO.

## Distributivo

• *Retículo distributivo.* — Retículo cuyas leyes $\wedge$ y $\vee$ son distributivas una con relación a la otra.

## Disyunción

Conector denotado $\vee$ (se lee «o») definido con la ayuda de la negación y de la conjunción. $A \vee B$ es una abreviatura de $\Gamma(\Gamma A \wedge \Gamma B)$. La proposición $A \vee B$ es verdadera desde el momento en que A o B es verdadero.

| A | B | A ∨ B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

• *Disjunción exclusiva.* — Conector «o exclusivo» igualmente llamado «alternativa» y denotado a veces W.
V. EXCLUSIVO.

• *Disjunción exclusiva.* — Sinónimo de disjunción, empleado por oposición a disjunción exclusiva.

## div

V. DIVERGENCIA.

## Divergencia

• *Divergencia de un campo de vectores diferenciable* $\overrightarrow{V}$ *de componentes* $P_1, P_2, ..., P_n$ *definido sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^n$. — Función de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$, denotada $\operatorname{div}\overrightarrow{V}$, definida sobre U por:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{V}(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n).$$

La divergencia es un operador diferencial.

• *Teorema de flux-divergencia.* — Teorema de Ostrogradski.

## Divergente

Contrario de convergente; por ejemplo, la serie armónica $\Sigma\frac{1}{n}$ es divergente; la serie $(-1)^n$ es divergente.

## Dividendo

Nombre que se da a veces en una división al número que es dividido.

## Divina

• *Divina proporción.* — Nombre que a veces se da al número de oro.
V. ORO.

## Divisibilidad

Relación, denotada $|$, definida en un monoide (o un anillo) conmutativo por $x|y$ («x divide a y») si y solamente si $x$ es un divisor de $y$. Es un preorden; pero en $\mathbf{N}$, por ejemplo, es un orden.

## Divisible

Un elemento $x$ de un monoide conmutativo M es divisible por el elemento $y$ de M si $y$ es divisor de $x$.

## División

Operación inversa a la multiplicación; en un anillo A, efectuar, cuando sea posible, la división de $a$ por $b$, es encontrar $q \in A$ tal que $a = bq$. El elemento $q$ se llama un cociente de $a$ por $b$. Si el anillo A es íntegro, el cociente (cuando existe) es único y se denota $a/b$ o $a:b$.

• *División armónica.* — V. ARMÓNICA.

• *Algebra de división.* — Algebra en la que todo elemento no nulo es inversible; ejemplos: todo cuerpo a la izquierda o los octoniones de Cayley.
V. WEDDERBURN.

• *División euclídea en un anillo euclídeo.* — V. EUCLÍDEA.

• *División de los polinomios según las potencias crecientes.* — Sean A y B dos polinomios tales que $B(0) \neq 0$. Dado un entero natural $n$, existe una pareja única (Q, R) de polinomios tales que $A = BQ + RX^{n+1}$ con $d^0(Q) \leqslant n$. Determinar (Q, R) es efectuar la división de A por B según las potencias crecientes.

• *División de polinomios según las potencias decrecientes.* — Nombre dado a veces a la división euclídea de dos polinomios por oposición a la división según las potencias crecientes.
V. EUCLÍDEA.

## Divisor

• *Divisor a derecha (resp. a izquierda) en un monoide* (M, .) *o en un anillo* (M, +, .). — Sean $x$ e $y$ dos elementos de M. Si existe un elemento $q$ de M tal que $x = qy$(resp. $x = yq$) se dice que $y$ es un divisor a derecha (resp. a izquierda) de $x$. Si M es conmutativo las nociones de divisores a derecha y a izquierda coinciden y se habla de divisor.
V. COCIENTE.

• *Divisor de cero.* — V. CERO.

• *Máximo común divisor.* — M.C.D.

## Divisoria

• *Líneas divisorias de una superficie.* — Los puntos de una curva de nivel en los que la pendiente de la superficie admite un mínimo relativo describen, cuando la curva de nivel varía, curvas llamadas líneas divisorias o línea divisoria de las aguas.
V. THALWEG (Líneas de).

## Doble

- *Doble implicación.* — Equivalencia lógica.
- *Doble negación.* — V. PEIRCE.
- *Doble toro o bretzel.* — Toro de dos agujeros.
- *Integral doble.* — V. MÚLTIPLE.
- *Punto doble de una aplicación de* E *en* E. — Sinónimo de punto fijo.
- *Punto doble de una curva paramétrica.* — Punto múltiple de orden 2.
- *Raíz doble de un polinomio* $P \in K[X]$. — Raíz de orden (de multiplicidad) igual a 2.
V. MULTIPLICIDAD.
- *Serie doble convergente.* — V. CONVERGENTE.
- *Sucesión doble.* — V. MÚLTIPLE (Sucesión).

## Doblemente

- *Función doblemente periódica.* — V. PERIÓDICA.

## Doblete

Empleado a veces por par.

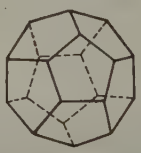
## Dodecaedro

Poliedro de 12 caras. Existe un dodecaedro regular: sus 12 caras son pentágonos regulares; posee 30 aristas y 20 vértices.
En función de la longitud de la arista $a$ la superficie del dodecaedro es:

$$S = 3\left(\sqrt{5 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)a^2 \simeq 20{,}6457\ a^2$$

y su volumen es:

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{5} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 a^3 \simeq 7{,}6631\ a^3.$$

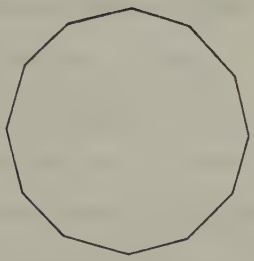


Dodecaedro regular

Véase en VOLÚMENES estas medidas en función del radio de la esfera circunscrita.

## Dodecágono

Polígono de 12 lados.



Dodecágono convexo regular

## Dodgson, Charles Lutwidge (llamado Lewis Carroll), 1832-1898

V. CARROLL.

## Dominada

• *Función dominada por otra.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones definidas sobre una parte D de R. Se dice que $f$ es dominada por $g$ en el entorno de un número real $x_0$ adherente a D si existe un real M estrictamente positivo y un entorno V de $x_0$ tales que $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$ para todo número real $x \in V \cap D$.
V. DESPRECIABLE, HARDY, LANDAU.

• *Teorema de la convergencia dominada.* — Teorema de Lebesgue.

## Dominancia

• *Relación de dominancia sobre un conjunto* E. — Relación binaria sobre E que es antirreflexiva y asimétrica pero no necesariamente transitiva. En ciencias humanas aparecen relaciones de dominancias.

## Dominante

• *Coeficiente dominante de un polígono no nulo.* — Coeficiente de su monomio del más alto grado.

• *Matriz de diagonal dominante.* — Una matriz cuadrada $(a_{ij})$ de orden $n$ de coeficientes reales es llamada de diagonal dominante con relación a las líneas (resp. con relación a las columnas) si para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (resp. todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$) los elementos de la $i$-ésima línea (resp. de la $j$-ésima columna) verifican:

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \text{ (resp. } \sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{jj}|\text{)}.$$

Abajo, la matriz A es de diagonal dominante con relación a las líneas y la matriz B es de diagonal dominante por relación a las líneas y a las columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -9 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- *Valor dominante.* — Nombre que también se da en estadística a la moda.

## Dominio

- *Dominio de un mapa.* — V. MAPA.
- *Dominio de definición de una función o de una relación.* — V. DEFINICIÓN.
- *Dominio de un espacio topológico.* — Parte abierta y conexa de ese espacio.
- *Dominio de integridad.* — Anillo íntegro conmutativo y unitario.
- *Dominio de operadores.* — V. ACCIÓN.

## Dorada

- *Sección dorada.* — V. ORO (Sección de).

## Dos

- *Teorema de los dos cuadrados:*

1) Sea $p > 0$ un entero primo; las aserciones siguientes son equivalentes:
 i) $p$ no es suma de dos cuadrados en $\mathbf{Z}$;
 ii) $p \equiv 3 \bmod 4$;
 iii) $p$ es un entero primo de Gauss.

2) Sea $n = \Pi_p p^{\alpha_p}$ la descomposición de un entero $n$ en factores primos; el entero $n$ es suma de dos cuadrados en $\mathbf{Z}$ si y solamente si $p \equiv 3 \bmod 4$ implica que $\alpha_p$ es par.

V. GAUSS (tres cuadrados), LAGRANGE (cuatro cuadrados).

- *Toro de dos agujeros.* — V. TORO.

## Douglas, Jesse (1897-1965)

V. PLATEAU (Problema de).

## Dual

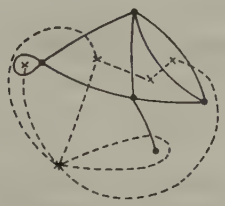
• *Dual de un espacio vectorial.* — Sinónimo de dual algebraico. V. BIDUAL.

• *Dual algebraico (resp. topológico) de un espacio vectorial.* — V. ALGEBRAICO, TOPOLÓGICO.

• *Grafo dual de un grafo planario topológico* G. — Grafo planario topológico G′ construido de la forma siguiente:

1) se escoge un punto en cada cara de G. Estos puntos constituyen los vértices de G′;
2) cada vez que una arista $a$ de G es frontera a dos caras distintas $f_1$ y $f_2$, se unen los vértices de G′ situados en $f_1$ y $f_2$ por una arista cortante $a$;
3) cada vez que una arista $a$ de G llega a un vértice frontero situado en una cara $f$, se traza a partir del vértice de G′ situado en $f$ un lazo que corta $a$.

Si G′ es un grafo dual de G, entonces G es un grafo dual de G′.



Grafo y su grafo dual

• *Base dual de la base* $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ *de un espacio vectorial* E *de dimensión finita* $n$. — Base $(e_i^*)_{i=1,\ldots,n}$ del dual algebraico E* de E definida por $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij}$ es el símbolo de Kronecker.

• *Categoría dual de una categoría* $\mathscr{C}$. — Categoría $\mathscr{C}^*$ cuyos objetos son los objetos de $\mathscr{C}$ y tal que para todo objeto X y todo objeto Y de $\mathscr{C}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^*}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$$

La composición $*$ de los morfismas en $\mathscr{C}^*$ es definida, cuando esto tiene un sentido, por $f * g = g \circ f$.
La categoría dual de la categoría $\mathscr{C}^*$ es la categoría $\mathscr{C}$ misma.

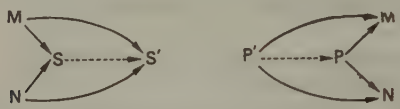
## Duales

• *Nociones duales.* — Intuitivamente dos nociones matemáticas son duales si por permutación de esas nociones en el enunciado de un teorema se obtiene un nuevo teorema. Por ejemplo, la intersección y la reunión son duales; en las fórmulas de De Morgan tenemos:

$$\complement_E (A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B) \quad \text{et} \quad \complement_E (A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B).$$

con más precisión, dada una categoría $\mathscr{C}$ se dice que dos nociones son duales una de la otra si se obtiene la definición de la segunda «invirtiendo» las flechas en la definición de la primera, es decir, si se obtiene esta definición por

transcripción en la categoría dual $\mathscr{C}^*$ de aquélla en $\mathscr{C}$. Por ejemplo, las nociones de producto directo P y de suma directa S de dos objetos M y N son dos nociones duales.




Ejemplos de nociones duales:

| | |
|---|---|
| Núcleo | Conúcleo |
| Imagen | Coimagen |
| Monomorfismo | Epimorfismo |
| Producto directo | Coproducto o suma directa |

## Dualidad

• *Principio de dualidad en el espacio proyectivo* $P_n(K)$. — Resume las dos propiedades siguientes: a todo punto M de $P_n(K)$ de coordenadas homogéneas $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ puede asociarse el hiperplano H de coordenadas tangenciales $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$; recíprocamente, a todo hiperplano H se puede asociar el punto M cuyas coordenadas homogéneas son las coordenadas tangenciales del hiperplano. En el caso del plano proyectivo, H es la polar de M con relación al círculo imaginario de ecuación $x^2 + y^2 + t^2 = 0$ en coordenadas homogéneas.

• *Principio de dualidad por polaridad por relación a una cónica del plano.* — A toda propiedad de posición en el plano le corresponde otra por polaridad cuyo enunciado se obtiene sustituyendo en el enunciado de la primera las palabras «punto» y «recta», respectivamente por «recta» y «punto». Este principio permite, por ejemplo, pasar del teorema de Pascal al de Brianchon y recíprocamente.

• *Razonamiento por dualidad.* — Demostración de una proposición en una categoría $\mathscr{C}$ [resp. en la categoría dual $\mathscr{C}^*$ de una categoría $\mathscr{C}$] «invirtiendo las flechas» en la demostración del enunciado correspondiente en $\mathscr{C}^*$ [resp. en $\mathscr{C}$]. En tal razonamiento (que puede conducir a errores graves si no se toman precauciones), cada noción es reemplazada por su noción dual.

• *Transformada por dualidad de una curva algebraica* $\Gamma$ *plana.* — Curva cuya ecuación cartesiana es la ecuación tangencial de $\Gamma$.

• *Transformada por dualidad de una superficie algebraica* $\Sigma$. — Superficie cuya ecuación cartesiana es la ecuación tangencial de $\Sigma$.

## Duhamel, Jean Marie Constant (1797-1872)

• *Criterio o regla de convergencia de Raabe-Darboux-Duhamel.* — V. RAABE.

## Duodecimal

• *Sistema duodecimal.* — Sistema de numeración de posición de base 12 en el que algunos ven un posible sucesor del sistema decimal.

## Dupin, Charles (1784-1873)

• *Cíclido de Dupin.* — Superficie evoluta de las esferas tangentes a tres esferas fijas.

• *Indicatriz de Dupin.* — Sea M un punto de una superficie $\Sigma$ tal que en este punto la superficie admite un plano tangente P y radios de curvaturas principales $R_1$ y $R_2$ (eventualmente «infinitos»). Consideremos en P el sistema de referencia cartesiano de origen M cuyos ejes M$x$ y M$y$ vienen dados por las rectas de intersección de P con los planos de secciones de $\Sigma$ de curvaturas $R_1$ y $R_2$. Toda cónica de P cuya ecuación con relación al sistema de referencias sea de la forma:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = h$$

se denomina una indicatriz de Dupin en el punto M de la superficie. La naturaleza de esta cónica informa sobre la forma de la superficie en el entorno de M.

## Duplicación

• *Duplicación del cubo.* — Célebre problema de la matemática griega (siglo VI a. de C.) (V. DELÍACO) que pregunta cómo construir, con la regla y el compás, el lado de un cubo C a partir del lado de un cubo C′ para que el volumen de C sea el doble del volumen de C′. Los matemáticos griegos intentaron vanamente resolverlo mediante la utilización de curvas auxiliares (duplicatrices). Hubo que esperar a 1837 para que Wantzel estableciese que ese problema y el de la trisección del ángulo no admiten solución (W. WANTZEL). Por el contrario, en $\mathbf{R}^4$, el problema de la duplicación del tesseract (hipercubo de $\mathbf{R}^4$) es resoluble.

V. CONSTRUCCIÓN, CUADRATURA, RECTIFICACIÓN, TRISECCIÓN.

• *Fórmula de duplicación de la función euleriana de primera especie* $\Gamma$. — Para todo real estrictamente positivo $x$, la función $\Gamma$ verifica la igualdad:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

llamada fórmula de duplicación.

## Duplicatriz

Curva auxiliar que permite la duplicación del cubo. Por ejemplo, la cisoide de Diocles.

## Dupuis

• *Teorema de Dupuis.* — El lugar del punto de contacto de una esfera móvil tangente a dos esferas fijas es una circunferencia sobre cada esfera fija.

## Dzeta

V. ZETA.

# E

## ∃

Símbolo del cuantificador existencial. Se representa mediante la letra E invertida, por ser E la inicial de la palabra «existe».

## e

Inicial de la palabra exponencial; designa la base del logaritmo neperiano cuyo valor aproximado es $e = 2{,}7182818284590...$ Este número interviene en numerosas fórmulas de varias ramas de las matemáticas; en particular: es la suma de la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, el límite de la sucesión de término general $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, el único real $\alpha$ tal que $\int_1^\alpha \frac{dt}{t} = 1$ y el único real $a$ tal que la función $x \mapsto a^x$ sea igual a su derivada. Es trascendente (resultado de Hermite), por tanto irracional, y verifica $e^{i\pi} = -1$ (fórmula de Euler). El número $e$ también se llama número de Néper.

## Easton, William B. (1929- )

• *Teorema de Easton.* — Si la teoría de los conjuntos es no contradictoria, se le puede añadir el axioma $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}$, para todo cardinal regular $\aleph_\alpha$.
El estudio de $2^{\aleph_\alpha}$ cuando $\aleph_\alpha$ es un cardinal singular todavía es objeto de numerosos trabajos en 1979.
V. CANTOR (Teorema de), CONTINUO (Hipótesis del), SINGULARES (Hipótesis de los cardinales).

## Econometría

Dominio reciente de las matemáticas aplicadas concebido para las ciencias económicas. Basada en las estadísticas, la econometría trata de proporcionar a los economistas el medio de estimar numéricamente los parámetros de sus modelos económicos y la precisión de estimación de estos parámetros. La economía también intenta permitir previsiones en el interior de los modelos económicos estudiados.
V. MATEMÁTICA (Economía).

## Economía matemática

V. ECONOMETRÍA, MATEMÁTICA.

## Ecosiheptagrama

V. CÚBICA (Superficie).

## Ecuación

Empleado solo, este término es matemáticamente indefinible. Su sentido depende esencialmente del contexto o del calificativo que le acompaña (ecuación diferencial, ecuación de una cónica, etc.). Cuando la ecuación es una relación de la forma $f(x) = g(x)$, donde $f$ y $g$ son aplicaciones de un conjunto E en un conjunto F, resolverla es determinar el conjunto de los elementos $a$ de E (llamados raíces o soluciones de la ecuación) para los cuales la igualdad $f(a) = g(a)$ está verificada.

• *Ecuación algebraica.* — V. ALGEBRAICA, BICUADRADA, BINOMIO (Ecuación del), GRADO, RESOLVENTE.

• *Ecuación característica de un endomorfismo o de una matriz.* — V. CARACTERÍSTICA.

• *Ecuación de cuarto grado.* — V. CUARTO.

• *Ecuación de una curva.* — V. BIPOLAR, CARTESIANA, INTRÍNSECA, POLAR, TANGENCIAL.

• *Ecuación de derivadas parciales.* — V. PARCIALES.
V. también: CLAIRAUT, DIFUSIÓN, HELMHOLTZ, LAPLACE, ONDAS, ORDEN, PLATEAU, POISSON, SINE-GORDON, TELEGRAFISTAS, VIBRANTES (Cuerdas, membranas, placas, vergas).

• *Ecuación diferencial.* — V. DIFERENCIAL.
V. también: BERNOULLI, BESSEL, CLAIRAUT, EULER, HILL, INCOMPLETA, INTEGRABLE, INTEGRAL, ISOCLINA, LAGRANGE, LINEAL, MATHIEU, ORDEN, RICATTI, SEPARADAS (Variables).

• *Ecuación diofantiana.* — V. DIOFÁNTICA o DIOFANTIANA.
V. también: CATALÁN, FERMAT, MORDELL, PITÁGORAS.

• *Ecuación en forma normal de Euler de una recta.* — V. EULER.

• *Ecuación horaria de un movimiento.* — V. HORARIA.

• *Ecuación imposible.* — V. IMPOSIBLE.

• *Ecuación indeterminada.* — V. INDETERMINADA.

• *Ecuación integral.* — V. INTEGRAL.
V. también: FREDHOLM, VOLTERRA.

• *Ecuación lineal.* — V. HOMOGÉNEA, LINEAL.

• *Ecuación de n-ésimo grado.* — V. GALOIS (Teorema de), *n*-ÉSIMO.

• *Ecuación de primer grado.* — V. PRIMER.

• *Ecuación de quinto grado.* — V. QUINTO, GALOIS (Teoremas de).

• *Ecuación resoluble por radicales.* — V. RADICALES.

• *Ecuación de segundo grado.* — V. SEGUNDO.

• *Ecuación de una superficie.* — V. CARTESIANA, TANGENCIAL.

• *Ecuación de tercer grado.* — V. CARDAN, REDUCIDA (Forma), TERCERA.

• *Coeficientes de una ecuación algebraica* $P(x) = 0$. — Coeficientes del polinomio P.

• *Discriminante de una ecuación algebraica* $P(x) = 0$. — Discriminante del polinomio P.

## Ecuaciones

V. EQUIVALENTES, PARAMÉTRICAS, RESULTANTE, SISTEMA.

• *Ecuaciones de una curva de intersección de dos superficies* $S_1$ *y* $S_2$ *de ecuaciones cartesianas* $P(x, y, z) = 0$ *y* $Q(x, y, z) = 0$. — Las ecuaciones cartesianas de $S_1$ y $S_2$.

• *Ecuaciones canónicas.* — V. HAMILTONIANO.

• *Ecuaciones de Hamilton o de Poisson-Hamilton.* — V. HAMILTONIANO.

• *Ecuación de Lagrange.* — V. LAGRANGIANO.

## Eficacia

• *Eficacia de un algoritmo.* — Duración de ejecución de ese algoritmo en función de la magnitud del problema. Se considera como eficaz [resp. ineficaz] los algoritmos cuya duración de ejecución crece polinomialmente [resp. exponencialmente] con la magnitud del problema; entonces se habla de algoritmo de tipo polinomial [resp. de tipo exponencial]. Esta noción es empleada para dar una clasificación de los problemas.
V. PROBLEMAS.

## Eficaz

• *Algoritmo eficaz.* — V. EFICACIA.

## Egipcia

| | |
|---|---|
| 1 | 831 |
| 2 | 1 662 |
| 4 | 3 324 |
| 8 | 6 648 |
| 16 | 13 296 |
| 25 | 20 775 |

$25 \times 831 = 20\,775$

• *Multiplicación egipcia.* — Nombre que se da a veces al método presentado al lado para efectuar una multiplicación. Para calcular $25 \times 831$, por ejemplo, se llenan dos columnas: en la de la izquierda se escriben las potencias de 2 deteniéndose en aquélla que es inferior o igual a 25; en la de la derecha se escribe 831 arriba y se doblan sucesivamente los números. Se busca en la columna de la izquierda los números que tienen una suma igual a 25 y se le añaden los números de la derecha situados a su lado.

V. RUSA.

## Eisenstein, Ferdinand Gotthold (1823-1852)

• *Criterio de Eisenstein.* — Sean A un anillo principal, $p$ un elemento primo de A y $F(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$, un polinomio de A[X] tal que $p$ divide todos los $a_i (0 \leqslant i \leqslant n-1)$ y tal que $p^2$ no divida $a_0$. El criterio de Eisenstein afirma que en estas condiciones F(X) es irreductible en K[X], donde K es el cuerpo de las fracciones de A. Por ejemplo, el polinomio $X^4 3X^2+6X-15$ es irreductible en Q[X].

## Eje

• (Descriptiva.) *Eje de un abatimiento.* — V. ABATIMIENTO.

• *Eje de abscisas.* — V. CARTESIANO (Sistema de referencia).

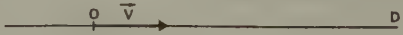
• *Eje de afinidad.* — V. AFINIDAD.

• *Eje de Brocard de un triángulo.* — V. BROCARD.

• *Eje central de un torsor.* — V. CENTRAL.

• *Eje de un desplazamiento helicoidal* (o atornillamiento). — V. HELICOIDAL.

• *Eje de un espacio afín real.* — Triplete (O, D, $\overline{V}$), donde D es una recta afín, O un punto de D y $\overline{V}$ un vector director de D. La aplicación de D sobre **R** que a M asocia el número real $x$ tal que $\overline{OM} = x\overline{V}$ es una biyección. El número real $x$ se llama la abscisa de M sobre el eje.




• *Eje focal de una cónica propia.* — V. FOCAL.

• *Eje de los lados.* — V. CARTESIANO (Sistema de referencia).

• *Eje de Lemoine de un triángulo.* — V. LEMOINE.

• *Eje de un movimiento de rotación.* — V. ROTACIÓN (Movimiento de).

• *Eje no focal de una cónica con centro.* — V. FOCAL.

• *Eje de las ordenadas.* — V. CARTESIANO (Sistema de referencias).

• *Eje polar.* — V. POLARES (Coordenadas).

• *Eje radical.* — V. RADICAL.

• *Eje de revolución.* — V. REVOLUCIÓN (Superficie de).

• *Eje de una rotación afín de* $\mathbf{R}^3$. — V. ROTACIÓN.

• *Eje de una simetría.* — V. SIMETRÍA (Por relación a una recta).

• *Eje mayor de una elipse.* — V. GRAN (de).

• *Eje menor de una elipse.* — V. PEQUEÑO.

• *Semi-eje mayor de una elipse.* — Sinónimo de semi-eje focal. V. FOCAL.

• *Semi-eje menor de una elipse.* — Sinónimo de semi-eje no focal. V. FOCAL.

## Ejes

• *Ejes de inercia.* — V. INERCIA.

• *Ejes de referencias.* — Ejes de un sistema de referencia cartesiano.

• *Ejes de un sistema de referencias afín o cartesiano.* — V. AFÍN, CARTESIANO.

• *Sistema de ejes.* — Empleado por los físicos por sistema de referencia cartesiano.

## Elección

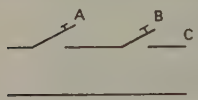
• *Axioma de elección.* — Axioma de la teoría de los conjuntos, puesto de manifiesto a principios de este siglo por Zermelo. Fue objeto de numerosas polémicas jamás acabadas. Afirma que para todo conjunto no vacío E existe al menos una aplicación $F: \mathfrak{P}(E) \to E$ (función de elección) tal que si X es una parte no vacía de E, entonces $F(X) \in X$. De este modo, si $E = \mathbf{N}$, la función F puede ser aquélla que asocia a una parte no vacía su elemento más pequeño. No se conoce función de elección sobre $\mathbf{R}$.
V. ZERMELO, ZORN.

## Eléctricos

• *Algebra o teoría de los circuitos eléctricos.* — Rama de las matemáticas aplicadas relacionada con la lógica que utiliza el cálculo en un álgebra de Boole. Las tablas de verdad de los conectores lógicos $\wedge$ (y), $\vee$ (o), $\neg$ (no) pueden ser interpretados por los montajes eléctricos siguientes, donde 0 significa: la corriente no pasa y 1 la corriente pasa.

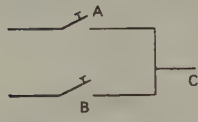
| A | B = ¬A |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

La corriente pasa a B si y solamente si no pasa a A para excitar la bobina.




| A | B | C = A ∧ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

La corriente pasa a C si y solamente si los interruptores A y B están cerrados.




| A | B | C = A ∨ B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

La corriente no pasa a C si y solamente si los dos interruptores A y B están abiertos.

## Elemental

• *Cadena (resp. camino) elemental.* — Cadena (resp. camino) que no encuentra dos veces el mismo vértice.

• *Ciclo (resp. circuito) elemental.* — Ciclo (resp. circuito) que no encuentra dos veces el mismo vértice excepción hecha del vértice inicial del ciclo (resp. del circuito) que coincide con el vértice terminal.

• (Lógica.) *Enunciado elemental.* — V. ENUNCIADO.

• (Probabilidades.) *Suceso elemental de un espacio de probabilidades* $(\Omega, \mathscr{A})$. — Singleton $\{x\}$ perteneciente a $\mathscr{A}$. Dos sucesos elementales son incompatibles y todo suceso es una reunión de sucesos elementales.

• *Geometría elemental.* — Geometría que estudia directamente, sin recurrir a sistemas de coordenadas, las propiedades de las figuras tradicionales.

• *Abierto elemental.* — V. TOPOLÓGICO (Producto).

## Elementales

• *Funciones simétricas elementales de* $\mathbf{C}^n$ *en* $\mathbf{C}^n$. — Funciones $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ definidas por $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma x_{i1} x_{i2} \ldots x_{ik}$, extendiéndose la suma a todas las partes de $k$ elementos $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ejemplos:

$$\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$
$$\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_ix_j + \cdots + x_{n-1}x_n$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 \ldots x_n.$$

Sea $f$ una función polinomial simétrica en $n$ variables definida sobre $\mathbf{C}^n$; se demuestra que:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = p(\sigma_1(x_1, ..., x_n), ..., \sigma_n(x_1, ..., x_n))$$

donde $p$ es una función polinomial en $n$ variables definida sobre $\mathbf{C}^n$. Las $n$ raíces $x_1, x_2, ..., x_n$ de la ecuación algebraica:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

de coeficientes complejos y con $a \neq 0$ verificando las relaciones:

$$\sigma_k(x_1, x_2, ..., x_n) = (-1)^k \frac{a_k}{a_0} \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

## Elemento

● *Elemento de un conjunto.* — Noción primitiva de las matemáticas. La relación $a \in b$ se lee «$a$ es elemento de $b$».
V. Pertenencia, Conjunto.
V. Absorbente, Algrebaico, Complementado, Extremal, Idempotente, Inverso, Involutivo, Irreductible, Maximal, Minimal, Neutro, Nilpotente, Nulo, Orden, Período, Primo, Regular, Simétrico, Simetrizable, Simple, Simplificable, Transcendente, Unidad, Universal.

● *Elemento lineal de una superficie.* — V. Lineal.

● *Más grande (resp. más pequeño) elemento.* — V. Grande, Pequeño.

## Elementos

V. Asociados, Comparables, Equivalentes, Extraños, Matriz, Primos.

● *Elementos de reducción de un torsor.* — V. Reducción.

## Elevar

● *Elevar un número real a una potencia.* — Sean $a$ y $x$ dos números reales tales que $a$ sea estrictamente positivo. Elevar el número real $a$ a la potencia $x$ es buscar la imagen $a^x$ de $x$ por la exponencial de base $a$.

● *Elevar una perpendicular.* — Cuando se traza la perpendicular a una recta D en un punto A de D se dice usualmente que se eleva la perpendicular de D partiendo de A.

V. Trazar.

## Eliminación

• *Eliminación de una variable.* — En la práctica, eliminar una variable $x$ entre dos ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ es encontrar una condición necesaria y suficiente para que esas dos ecuaciones tengan por lo menos una solución común.

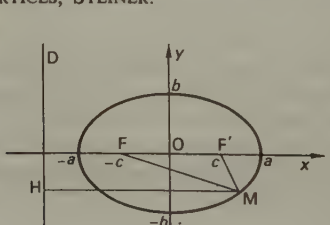
V. RESULTANTE.

## Elipse

Cónica con centro cuya ecuación cartesiana, con relación a un sistema ortonormado trazado por sus dos ejes de simetría, es de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. El círculo es una elipse particular que corresponde al caso en que $a = b$. Una elipse es la sección de un cono de revolución por un plano que corta a todas las generatrices. La elipse admite dos focos F y F′ tales que la suma de las distancias de un punto M de la elipse a F y F′ es constante: $MF + MF' = 2a$. Esta propiedad permite trazar las elipses sobre el suelo manteniendo tendido un hilo unido a dos estacas F y F′. Una elipse es asimismo el lugar de los puntos cuya relación MF/MH de las distancias a un punto fijo F y a una recta fija D es constante e inferior a 1. La ecuación polar de la elipse por relación al sistema de referencias (F, FF′) es $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$, donde $e$ designa la excentricidad y donde $p = a(1 - e^2)$. La elipse está definida paramétricamente por las ecuaciones: $x = a\cos t$ e $y = b\,\text{sen}\,t$. El área de la elipse es igual a $\pi ab$. El estudio de su longitud que no puede expresarse simplemente está en el origen de la teoría de las funciones elípticas. Un valor aproximado bastante bueno de esta longitud es:

$$\pi[3(a + b) - \sqrt{(a + 3b)\,(3a + b)}].$$

V. BANDA DE PAPEL, CÓNICA, ESPECIE, EXCÉNTRICA (Anomalía), FOCAL (Eje, no eje, semi-eje, no semi-eje), GARGANTA, GRAN EJE, PARÁMETRO, PEQUEÑO EJE, VÉRTICES, STEINER.

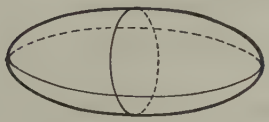



## Elipsoide

Cuádrica cuyas secciones planas son elipses. Un elipsoide admite un centro de simetría, tres ejes de simetría y, por relación a un sistema de referencias ortonormado trazado por esos tres ejes, su ecuación cartesiana es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La esfera que corresponde al caso $a=b=c$ es una elipsoide particular.
V. ALARGADO, APLASTADO, INERCIA, REVOLUCIÓN.



## Elíptica

• (Usual.) *Elíptica.* — Que tiene la forma de una elipse.

• *Función elíptica.* — Función de C en C doblemente periódica y meromorfa en C cuya relación de los períodos no es real. Introducidas inicialmente para el estudio de la longitud de un arco de elipse, las funciones elípticas juegan un papel importante en teoría de números, en geometría algebraica y en análisis.

V. JACOBIANAS, WEIERSTRASS.

• *Geometría elíptica.* — Geometría de Riemann.
V. CAYLEY, RIEMANN.

• *Integral elíptica.* — Integral de la forma $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, donde R es una función racional de dos variables y donde P es una función polinomio de una variable de grado 3 ó 4. En el caso en que el grado de P sea 3, la integral elíptica se escribe con la ayuda de las integrales:

$$I_0=\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\quad I_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}}\quad y\quad J_1=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}$$

Si P es de grado 4, la integral se escribe con la ayuda de:

$$H_0=\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\quad H_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}},$$

$$H_2=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{P(x)}}\quad y\quad K_1=\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}.$$

Por cambio de variable puede remitirse el cálculo de una integral elíptica a los cálculos de integrales de Weierstrass o de integrales puestas bajo la forma normal de Legendre.
V. LEGENDRE, WEIERSTRASS.

## Elíptico

• *Cilindro elíptico.* — Cilindro cuyas secciones por planos no paralelos a las generatrices son elipses. Es una cuádrica impropia que admite un punto doble en el infinito.

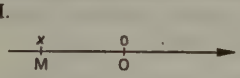
• *Paraboloide elíptico.* — Cuádrica propia cuya ecuación cartesiana en un

sistema de referencias ortonormado convenientemente escogido se escribe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$, donde $a$ y $b$ son dos reales tales que $b^2 < a^2$. Las secciones planas de un paraboloide elíptico son elipses o parábolas.

• *Punto elíptico de una superficie* $\Sigma$. — Punto M de $\Sigma$ cuya indicatriz de Dupin es una elipse. Intuitivamente, en un entorno de M la superficie tiene la forma de un paraboloide elíptico.

## Elongación

En mecánica designa una desviación a partir de una posición de equilibrio. Por ejemplo, la elongación de un movimiento rectilíneo sinusoidal de ecuación horaria $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ es el número real $x$ que representa la desviación entre la abscisa de M y la del punto O de abscisa 0 alrededor del cual oscila M.

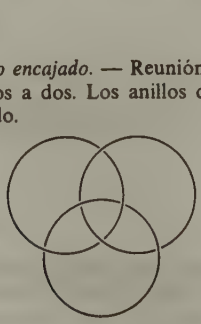



## Enantiomorfos

Se dice, en química y física, de dos figuras asimétricas que son la imagen una de la otra en un espejo. Ejemplo: las dos manos de un hombre.

## Encajado

• *Nudo encajado.* — Reunión de varios nudos simples sin puntos de intersección dos a dos. Los anillos de Borromeo (véase figura) constituyen un nudo encajado.



## Encajados

• *Axioma (o principio) de segmentos encajados.* — Si $([a_n, b_n])_{n\in\mathbf{N}}$ es una familia de segmentos encajados de **R** tal que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, la intersección de esos intervalos no está vacía. El cuerpo **Q** no verifica este axioma; es una de las propiedades fundamentales de **R**.

• *Conjuntos encajados.* — Dos conjuntos se llaman encajados si uno está incluido en el otro.

• *Familia o sucesión de segmentos encajados.* — Familia $([a_n, b_n]_{n\in\mathbf{N}}$ de segmentos de un conjunto totalmente ordenado E tal que:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset \cdots$$

La sucesión $(a_n)_{n\geqslant 0}$ es creciente y $(b_n)_{n\geqslant 0}$ decreciente.

## Encuadramiento

• *Encuadramiento de un real x.* — Par $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tal que $a \leqslant x \leqslant b$.

## Endociclo

Sean A, B, C tres puntos de un plano de Lobatchevski-Bolyai, y $d_1$, $d_2$ y $d_3$ las perpendiculares a las rectas (BC), (CA) y (AB), elevadas en el punto medio de los segmentos BC, CA, AB. Si las rectas $d_1$, $d_2$ y $d_3$ concurren en un mismo punto O, los puntos A, B, C están a igual distancia de O y pertenecen al lugar de los puntos situados a la distancia OA del punto O. Esta curva se denomina círculo o endociclo.

V. HORICICLO, HIPERCICLO.

## Endomorfismo

• *Endomorfismo afín.* — V. AFÍN.

• *Endomorfismo de* E *provisto de una estructura algebraica.* — Homomorfismo de E en él mismo.

V. ANTIAUTO-ADJUNTO, AUTO-ADJUNTO, DETERMINANTE, DIAGONALIZABLE, MATRIZ, NILPOTENTE, NORMAL, ESPECTRO, SIMÉTRICO, TRAZO, TRIANGULARIZABLE.

## Energía

En física, se designa por energía la facultad que posee un cuerpo o un sistema de cuerpos de proporcionar un trabajo. Las formas de energía son muy diversas (energía química, calorífica, eléctrica, nuclear...). En mecánica racional se

interesan en dos tipos de energía, la energía potencial y la energía cinética. V. CINÉTICA, POTENCIAL.

## Engendrada

• *Semi-recta vectorial engendrada por un vector.* — V. VECTORIAL.

• *Topología engendrada sobre un conjunto* E *por un conjunto* $\mathscr{F}$ *de partes de* E. — Topología, la menos fina, para la que los elementos de $\mathscr{F}$ son abiertos.

• *Tribu engendrada por una familia* $\mathscr{F}$ *de partes de un conjunto* E. — La más pequeña tribu (para la relación de inclusión) que contiene $\mathscr{F}$. Es también la intersección de las tribus que contienen $\mathscr{F}$.

## Engendrado

• *Clan engendrado por una familia* $\mathscr{F}$ *de partes de un conjunto.* — El más pequeño clan (para la relación de inclusión) que contiene $\mathscr{F}$. También es la intersección de todos los clanes que contiene $\mathscr{F}$.

• *Haz lineal engendrado por dos curvas o dos superficies algebraicas.* — V. LINEAL.

• *Lenguaje engendrado por una gramática formal.* — V. FORMAL.

## Enlazadas

• *Curvas mutuamente enlazadas.* — Sinónimo de curvas entrelazadas.

• *Sub-anillo engendrado por una parte* P *de un anillo* A. — El más pequeño sub-anillo de A que contiene P.

• *Sub-cuerpo engendrado por una parte* P *de un cuerpo* K. — El más pequeño sub-cuerpo de K que contiene P.

• *Sub-espacio afín engendrado por una parte* P *de un espacio afín* $\mathscr{E}$. — El más pequeño sub-espacio afín de $\mathscr{E}$ que contiene P.

• *Sub-espacio proyectivo engendrado por una parte* A *de un espacio proyectivo* P(E). — El más pequeño sub-espacio proyectivo de P(E) que contiene A.

• *Sub-espacio vectorial engendrado por una parte* P *de un espacio vectorial* E. — El más pequeño sub-espacio vectorial de E que contiene P. En $\mathbf{R}^3$, dos vectores no colineales engendran un plano.

• *Sub-grupo engendrado por una parte* P *de un grupo* G. — El más pequeño sub-grupo de G que contiene P.

• *Sub-módulo engendrado por una parte* P *de un módulo* M. — El más pequeño sub-módulo de M que contiene P.

## Ensamblador

Género de lenguaje no evolucionado, utilizado en informática y dependiente estrechamente del modelo de calculadora utilizada. Este tipo de lenguaje está muy próximo al lenguaje directamente interpretado por el ordenador (lenguaje máquina). Evita el uso de un órgano complejo de traducción (compilador).

## Ensamblaje

• Se emplea principalmente en lógica (cálculo proposicional o cálculo de los predicados) para designar una serie finita de símbolos.

## Entera

• *Función entera.* — Función analítica sobre **C**; en todo punto de **C** admite un desarrollo en serie entera.

• *Parte entera de una fracción racional* $\frac{P}{Q} \in K(X)$, *donde* K *es un cuerpo.* — El único polinomio $R \in K[X]$ tal que $\frac{P}{Q} = R + \frac{P'}{Q}$, donde $P' \in K[X]$ es un polinomio de grado estrictamente inferior al de Q.

• *Parte entera de un real x.* — El único entero racional denotado $[x]$ tal que:

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

La parte entera de 7,83 es 7; la de $-3{,}531$ es $-4$.

• *Serie entera.* — Serie de función de término general $f_n$, donde $f_n$ es una función de **C** en **C** de la forma $z \mapsto a_n z^n$ con $a_n \in \mathbf{C}$. Se denota $\Sigma a_n z^n$ a esta serie. Las series enteras generalizan la noción de polinomios de coeficientes en **C**.

V. CONVERGENCIA (Disco, radio de), DESARROLLABLE, DESARROLLO, FORMAL.

## Entero

• *Cuaternion entero.* — Cuaternion $a + bi + cj + dk$, donde $a$, $b$, $c$ y $d$ son enteros racionales. Un cuaternion entero puede escribirse también $\alpha + j\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}[i]$.

• *Entero o número entero.* — Elemento del conjunto **Z**; la terminología para designar los elementos de **N** y de **Z** era imprecisa y criticable. El cuadro inferior muestra de qué forma ha evolucionado.

| | N | Z |
|---|---|---|
| Antiguamente | Enteros | Enteros relativos<br>o<br>enteros algebraicos |
| Hoy | Naturales<br>o<br>enteros naturales<br>o<br>enteros positivos | Enteros<br>o<br>enteros racionales |

V. ALGEBRAICO, CICLOTÓMICO, IMPAR, NATURAL, PAR, PARTICIÓN, PRIMARIO, RACIONAL, RELATIVO.

• *Entero de Gauss.* — V. GAUSS.

• *Entero p-ádico.* — V. *p*-ÁDICOS.

• *Entero primo de Gauss.* — V. PRIMO.

• *Elemento de un anillo conmutativo* A *entero sobre un sub-anillo* B *de* A. — Elemento $x$ de A tal que existe $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ en B verificando:

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = 0.$$

Los elementos de **Q**, enteros sobre **Z**, son los elementos de **Z**, y ellos solos, de ahí su nombre de enteros racionales.

## Entorno

La noción de entorno es fundamental en topología; se puede definir tan perfectamente un espacio topológico a partir de la noción de entorno así como de la de abierto o cerrado.
V. TOPOLOGÍA, ENTORNOS.

• *Entorno de una parte de A de un espacio topológico* E. — Parte de E que contiene un abierto conteniendo a A.

• *Entorno de un punto x de un espacio topológico* E. — Entorno de la parte reducida de $\{x\}$. Un conjunto es abierto si y sólo si es entorno de cada uno de sus puntos.

## Entornos

• *Axiomas de los entornos.* — Una topología sobre un conjunto E puede definirse si en todo punto $x$ de E de una familia $\mathscr{V}_x$ de partes de E se satisfacen a los axiomas de los entornos:

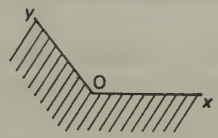
$[V_1]$ Toda parte de E que contenga un elemento de $\mathscr{V}_x$ es elemento de $\mathscr{V}_x$.
$[V_2]$ Toda intersección finita de elementos de $\mathscr{V}_x$ es elemento de $\mathscr{V}_x$.
$[V_3]$ El elemento $x$ pertenece a cada conjunto de $\mathscr{V}_x$.

[$V_4$] Si V pertenece a $\mathscr{V}_x$ existe un W en $\mathscr{V}_x$ tal que para todo $y \in W$ se tiene V en $\mathscr{V}_y$.
V. TOPOLOGÍA.

- *Base de entornos.* — V. BASE.
- *Sistema fundamental de entornos.* — V. FUNDAMENTAL.

## Entrante

- *Angulo entrante.* — Utilizado abusivamente en lugar de sector angular entrante.
- *Sector angular entrante.* — Sector angular no convexo.




## Entraña

Sinónimo de «implica».
V. IMPLICACIÓN.

## Entrelazadas

- *Curvas entrelazadas o mutuamente enlazadas.* — Dos curvas simples cerradas se llaman entrelazadas si no existe homeomorfismo del espacio para el que las imágenes de dos curvas estén contenidas en esferas disjuntas. No se conoce criterio analítico general que permita decidir si dos curvas son entrelazadas.

## Enumerativa

- *Geometría enumerativa.* — Rama de la geometría proyectiva, desarrollada a finales del siglo XIX que concierne a la investigación explícita del número (finito) de soluciones de problemas cuya resolución escapa al cálculo algebraico usual. Un ejemplo de problema es la búsqueda de cónicas tangentes a cinco cónicas dadas en el plano: en situación general, hay 3.264 (resultado de Chasles). Más generalmente, el número de cuádricas tangentes a nueve cuádricas en posición general es 666.841.088 (Schubert).

## Enunciación

• *Enunciación del cálculo de predicados.* — Sea $\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_n$ una sucesión finita de reuniones tal que, para cada reunión $\mathscr{A}_i$, se realiza una de las cuatro condiciones siguientes:

1) $\mathscr{A}_i$ es una variable proporcional;
2) existe $j < i$ tal que $\mathscr{A}_i = \neg \mathscr{A}_j$;
3) existe $j < i$ y $h < i$ tales que $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}_j k \mathscr{A}_h$, donde $k$ es un conector;
4) Existe una variable $x$, un individuo $a$, un cuantificador Q y $j < i$ tales que $x$ no se produce en $\mathscr{A}_j$ y tal que $\mathscr{A}_i = (Qx)\ ((x|a)\mathscr{A}_j)$.

Tal serie es una enunciación de $\mathscr{A}_n$. Ejemplo:

$$r^2 ab; \quad (\exists x)\ (r^2 xb); \quad (r^2 ab) \Rightarrow ((\exists x)\,(r^2 xb))$$

es una enunciación de la reunión $(r^2 ab) \Rightarrow ((\exists x)\,(r^2 xb))$.

• *Enunciación del cálculo proposicional.* — Sucesión finita $\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_n$ de reuniones tal que para cada $\mathscr{A}_i$ se realiza una de las tres condiciones siguientes:

1) es una variable proporcional;
2) existe $j < i$ tal que $\mathscr{A}_i = \neg \mathscr{A}_j$;
3) existe $j < i$ y $h < i$ tales que $\mathscr{A}_i = \mathscr{A}_i k \mathscr{A}_h$, donde $k$ es un conector.

Tal sucesión es una enunciación de $\mathscr{A}_n$.

## Enunciado

Reunión que posee al menos una enunciación; también se habla de proposición.
V. EQUIVALENTES (Enunciados).

• *Enunciado decidible.* — V. DECIDIBLE.

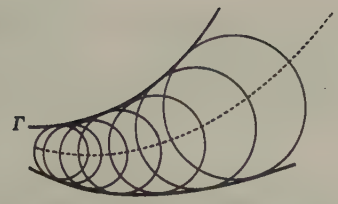
• *Enunciado elemental del cálculo de predicados.* — Reunión formada de un predicado $r^p$ de peso $p$ seguida de $p$ individuos: $r^p a_1 a_2 \ ... \ a_p$.

• *Enunciado elemental del cálculo proposicional.* — Toda variable proposicional.

• *Enunciado verdadero.* — Sinónimo de tautología.

## Envolvente

• *Envolvente de una familia* $(C_t)_{t \in I}$ *de curvas planas, donde* I *es un intervalo de* R. — La curva Γ, si existe, tangente en cada uno de sus puntos a una de las curvas $C_t$ y tal que, recíprocamente, cada curva $C_t$ le sea tangente al menos en un punto. La envolvente de las rectas normales a una curva plana es la evoluta de esa curva.



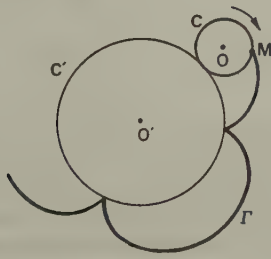

Envolvente de una familia de círculos

• *Envolvente de una familia de superficies.* — Superficie tangente en cada uno de sus puntos a una de las superficies de la familia y tal que, recíprocamente, cada superficie de la familia le sea tangente.

• *Envolvente inferior (resp. superior) de una familia de funciones.* — V. INFERIOR, SUPERIOR.

## Epicicloide

Curva plana Γ descrita por un punto fijo M de un círculo C de radio $r$ que gira exteriormente sin deslizarse sobre un círculo C′ de radio R. Cuando $R/r$ es un irracional, el epicicloide no se cierra. Cuando $R/r$ es un racional, el epicicloide admite un número finito de puntos de retroceso. Si $R = r$ es una cardioide. Si $R = 2r$ es una nefroide. La Hire mostró el uso que puede hacerse de ella para el trazado de engranajes.
V. HIPOCICLOIDE.




• *Epicicloide alargada o abreviada.* — V. EPITROCOIDE.

## Epiménides de Cnosos (o el Cretense) (Siglo VI a. de C.)

• *Paradoja de Epiménides de Cnosos.* — Paradoja del mentiroso.
V. MENTIROSO.

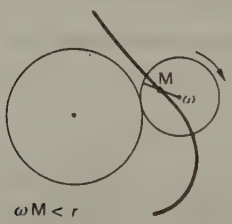
## Epimorfismo

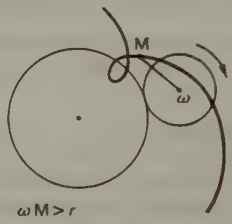
• *Epimorfismo en una categoría* $\mathscr{C}$. — Morfismo $u$ de $\mathscr{C}$ tal que para todo

morfismo $f$ y todo morfismo $g$ de $\mathscr{C}$ la igualdad $f \circ u = g \circ u$ implica $f = g$. Esta noción es dual de la de monomorfismo.
V. MONOMORFISMO.

## Epitrocoide

Curva plana engendrada por un punto M unido al plano móvil de un círculo de centro $\omega$ y de radio $r$ que gira sin deslizarse exteriormente sobre un círculo de radio R. Si $\omega M = r$ es un epicicloide. Si $\omega M < r$ el epitrocoide se denomina también epicicloide abreviada; si $\omega M > r$ se llama epicicloide alargada.
V. HIPOTROCOIDE.




## Equiángulo (Espiral)

V. LOGARÍTMICA (Espiral).

## Equicontinua

• *Parte equicontinua.* — Sean E un espacio topológico y F un espacio métrico. Una parte H del conjunto de las aplicaciones de E en F se llama equicontinua en un punto $x_0 \in E$ si para todo número real $\varepsilon > 0$ existe un entorno V de $x_0$ tal que $x \in V$ implique $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ para toda función $f \in H$. (El entorno V depende de $\varepsilon$ pero es independiente de $f$.) En el caso en que H sea equicontinua en todo punto de E, se dice que H es equicontinua sobre E.

## Equicontinuidad

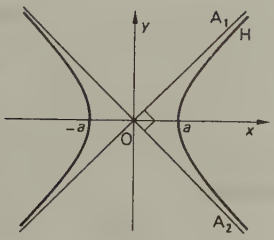
Propiedad de ser equicontinuo.
V. EQUICONTINUA.

## Equidistantes

Situados a la misma distancia.

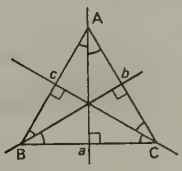
## Equilátera

• *Hipérbola equilátera.* — Hipérbola cuyas asíntotas son perpendiculares. Con relación a un sistema de referencia trazado por sus ejes de simetría admite una ecuación cartesiana de la forma: $x^2 - y^2 = a^2$. Su excentricidad es igual a $\sqrt{2}$.




## Equilátero

• *Triángulo equilátero.* — Triángulo cuyos tres lados son isométricos, es decir, tienen igual longitud. Sus tres ángulos tienen igual medida y los puntos de concurrencia de las bisectrices, alturas, medianas y mediatrices están confundidos.




## Equilibrio

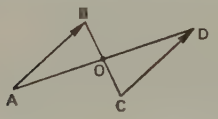
• (Mecánica.) *Equilibrio de un punto material.* — Un punto material M está en equilibrio si su velocidad es nula y si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él es nula. Si después de una ligera modificación de su posición tiende a volver a su posición inicial, el equilibrio se denomina estable. En el caso contrario, se denomina inestable. Se dice metastable si vuelve a su estado inicial después de haber sufrido una débil perturbación, pero la deja si la perturbación es suficientemente fuerte.

• (Teoría de los juegos.) *Estrategias de equilibrio.* — En un juego de suma nula de dos jugadores, se dice que las estrategias escogidas por los dos jugadores son estrategias de equilibrio si ningún jugador consigue cambiar solo de estrategia.

• (Teoría de los juegos.) *Punto de equilibrio.* — En teoría de juegos se denomina punto de equilibrio el resultado obtenido por los jugadores al final del juego cuando utilizan estrategias de equilibrio.

## Equipolencia

En un espacio afín, dos bipuntos (A, B) y (C, D) son equipolentes si los segmentos AD y BC tienen el mismo centro. La relación de equipolencia es una equivalencia sobre el conjunto de los bipuntos. Sus clases de equivalencia son los vectores llamados asociados al espacio afín.




## Equipolentes

• *Bipuntos equipolentes.* — V. EQUIPOLENCIA.

## Equipotencia

Dos conjuntos son equipotentes si existe una biyección del uno sobre el otro. Los conjuntos **N** y {0, 2, 4, 6, ...} de enteros naturales pares son equipotentes porque $n \mapsto 2n$ es una biyección del primero sobre el segundo. Se muestra que **N**, **Z** y **Q** son equipotentes, pero que **R** no es equipotente de **N**.
V. CARDINAL, CONTINUO (Potencial del), ENUMERABLE.

## Equipotencial

• *Superficie equipotencial de un potencial* U. — Superficie de nivel de la función U.

## Equipotentes

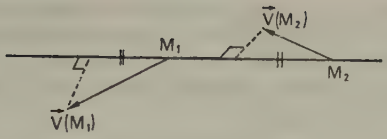
• *Conjuntos equipotentes.* — V. EQUIPOTENCIA.

## Equiprobables

• *Sucesos equiprobables.* — Sucesos que tienen la misma probabilidad.

## Equiproyectivado

• *Equiproyectivado de un campo de momentos* $\overline{V}$ *definido sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^3$. — Para toda pareja $(M_1, M_2)$ de puntos distintos de U, las proyecciones de vectores $\overline{V}(M_1)$ y $\overline{V}(M_2)$ sobre la recta $M_1 M_2$ son iguales. Esta propiedad, llamada equiproyectividad, caracteriza los campos de momentos: se demuestra, en efecto, que todo campo de vectores que verifican esta propiedad es un campo de momentos.




## Equivalencia

Sinónimo, bien de relación de equivalencia, bien de equivalencia lógica.

• *Clase de equivalencia.* — V. CLASE.

• *Equivalencia lógica.* — Conector denotado $\Leftrightarrow$ o a veces $\leftrightarrow$ (se lee «equivalente a»); $A \Leftrightarrow B$ es una abreviatura de $(A \Rightarrow B)$ **a** $(B \Rightarrow A)$. La proposición $A \Leftrightarrow B$ es verdadera si y solamente si A y B son los dos verdaderos o los dos falsos.
Este conector también es llamado bicondicional o doble implicación.

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

• *Relación de equivalencia sobre un conjunto* E. — Relación binaria sobre E que es reflexiva, simétrica y transitiva. Ejemplo, el paralelismo sobre el conjunto de rectas del plano.
V. CERRADA, ABIERTA.

## Equivalentes

• *Atlas* $C^k$ *equivalentes.* — Dos atlas $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ de clase $C^k$ sobre X son equivalentes si $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ es también un atlas de clase $C^k$ sobre X.

• *Curvas (resp. superficies) topológicamente equivalentes.* — Curvas (resp. superficies) homeomorfas.
V. HOMEOMORFAS, ISÓTOPAS.

• *Distancias topológicamente equivalentes sobre un conjunto* E. — Distancias que definen la misma topología sobre E. Para que $d$ y $d'$ sean dos distancias equivalentes sobre E es preciso y suficiente que la aplicación idéntica de E sea continua de (E, $d$) sobre (E, $d'$) y de (E, $d'$) y de (E, $d'$) sobre (E, $d$).

• *Distancias uniformemente equivalentes sobre un conjunto* E. — Dos distancias $d$ y $d'$ sobre E son uniformemente equivalentes si la aplicación idéntica de E es uniformemente continua de (E, $d$) sobre (E, $d'$) y de (E, $d'$) sobre (E, $d$).

• *Ecuaciones equivalentes.* — Ecuaciones que admiten el mismo conjunto de soluciones.

• *Elementos equivalentes.* — Sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre un conjunto E. Dos elementos $a$ y $b$ de E tales que $a$ esté en relación con $b$ se denominan equivalentes módulo $\mathcal{R}$.

• *Enunciados equivalentes.* — Dos enunciados P y Q son equivalentes si el enunciado $P \Leftrightarrow Q$ es una tautología.

• *Funciones equivalentes.* — Sean dos funciones numéricas $f$ y $g$ definidas sobre un intervalo abierto de $\mathbf{R}$ conteniendo un real $x_0$. Se dice que $f$ y $g$ son equivalentes en un entorno $x_0$ si existe una función $\varepsilon$ definida en un entorno de $x_0$ que admite por límite 0 cuando tiende hacia $x_0$ y que verifica:

$$f(x) = g(x)\,(1 + \varepsilon(x)).$$

Si $f$ y $g$ son definidas en un intervalo $[a, +\infty[$ (resp.] $-\infty, b[$) se dice que $f$ y $g$ son equivalentes al entorno de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si las funciones:

$$x \to f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{y} \quad x \mapsto g\left(\frac{1}{x}\right)$$

son equivalentes al entorno de cero.

• *Geometrías equivalentes.* — Sean $\mathcal{G}_1$ una geometría sobre un conjunto de puntos $E_1$ sobre el que opera un grupo $G_1$, y $\mathcal{G}_2$ una geometría sobre un conjunto de puntos $E_2$ sobre el que opera un grupo $G_2$. Las geometrías $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ se denominan equivalentes si existe una biyección $\theta$ de $E_1$ sobre $E_2$ tal que para todo elemento de T' de $G_2$ exista un único elemento T de $G_1$ que verifica $T' = \theta T \theta^{-1}$.

• *Matrices equivalentes.* — Sean A y B dos matrices de $n$ líneas y $p$ columnas de elementos en un cuerpo K conmutativo. Las matrices A y B son equivalentes si existen dos matrices cuadradas inversibles P de orden $p$ y Q de orden $n$ tales que $B = QAP$.

• *Nudos equivalentes.* — Nudos de igual tipo.

• *Números equivalentes sobre un* **R***-espacio vectorial* E. — Normas que definen la misma topología. Dos normas $\| \quad \|_1$ y $\| \quad \|_2$ son equivalentes si y solamente si existen dos números reales estrictamente positivos $\alpha$ y $\beta$ tales que:

$$\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1$$

para todo elemento $x$ de E. Sobre $\mathbf{R}^n$ todas las normas son equivalentes así como sobre todo $\mathbf{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

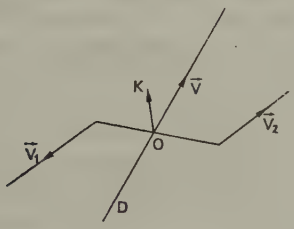
• *Sistemas de deslizadores equivalentes.* — Dos sistemas de deslizadores son equivalentes si tienen los mismos elementos de reducción en un punto.

• *Sucesiones equivalentes.* — Dos sucesiones de Cauchy $(u_n)_{n \geqslant 0}$ y $(v_n)_{n \geqslant 0}$ se dicen equivalentes si la sucesión $(u_n - v_n)_{n \geqslant 0}$ converge hacia 0.

• *Torsores equivalentes.* — Si dos torsores tienen los mismos elementos de reducción en un punto, entonces tienen los mismos elementos de reducción en cualquier otro punto. Se dice que son equivalentes. Un torsor es equivalente a un par cuyo momento es el del torsor en un punto O y a un deslizador $(D, \overline{V})$, donde D pasa por O y donde $\overline{V}$ es la resultante general del torsor.

• *Variedades algebraicas birracionalmente equivalentes.* — Se dice que dos va-

riedades algebraicas V y W son birracionalmente equivalentes si existe una biyección birracional de V en W. Esto equivale a decir que los cuerpos $k(V)$ y $k(W)$ de las funciones racionales sobre V y W son isomorfos. Por ejemplo, $\mathbf{A}_n(C)$ y $\mathbf{P}_n(C)$ son birracionalmente equivalentes.




## Eratóstenes (284-192 a. de C.)

• *Criba de Eratóstenes.* — Método práctico que permite hallar los números primos inferiores a un entero $n_0 \geqslant 2$ dado. Se escribe la lista de enteros de 2 a $n_0$ y se tachan los múltiplos de los enteros encontrados en el orden creciente (de hecho basta con detenerse en el entero inmediatamente inferior o igual a $\sqrt{n_0}$). Los enteros no tachados son primos. Por ejemplo, los números primos inferiores a 30 son los enteros no tachados de la lista que viene a continuación. Nos hemos detenido en los múltiplos de 5, puesto que $6^2 > 30$.

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~
~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~.

## Erdös, Paul (1913-1996)

• *Conjeturas de Erdös:*

Erdös enunció numerosas conjeturas, célebres desde entonces, acompañadas de premio para la solución de algunas. Entre las más recientes señalemos la siguiente:

Todo conjunto de enteros cuya suma de inversos diverge, contiene para todo entero $k$, un sub-conjunto de $k$ números en progresión aritmética. Erdös ofrece 3.000 dólares a quien lo resuelva.

• *Teorema de Erdös-Mordell.* — V. MORDELL.

## Ergódica

• *Hipótesis ergódica.* — Presentida por J. C. Maxwell, fue imaginada y formulada por L. Boltzmann a fin de dar una base estadística a la teoría cinética de los gases, así como a las teorías de la difusión y mezcla de los líquidos. Parte del postulado o principio ergódico en virtud del cual, tras una disposi-

ción inicial arbitraria, las moléculas quedan uniformemente repartidas al cabo de cierto tiempo. La hipótesis fundamental ergódica afirma que, en una transformación puntual del espacio euclídeo, el entorno de casi todos los puntos contiene una infinidad de puntos de la trayectoria.

• *Teorema ergódico.* — La teoría cinética de los gases no trata de seguir en el curso del tiempo el movimiento individual de las moléculas. Identifica todas las magnitudes medibles (como la presión, la temperatura, etc.) por las medias. Estas medias pueden ser tomadas sobre las diferentes posiciones ocupadas, en el transcurso del tiempo, por una sola molécula o, en un instante dado, sobre un gran número de moléculas. El valor medio (que es una esperanza matemática) es una función del tiempo que representa, en cada instante, alrededor del que se hacen las fluctuaciones. La identidad de las medias calculadas de este modo constituye el teorema ergódico. Afirma que existe un estado permanente, estacionario, independiente, de la mezcla de los líquidos.
De la física matemática, la noción y la teoría de la ergodicidad han pasado al marco de las probabilidades, de la estadística, de la topología y de la teoría de la medida (en el sentido matemático de la palabra) sustituyendo cierta media a la «medida instantánea» del físico.
V. ERGÓDICA (Teoría).

F. LL.

• *Teoría ergódica.* — Rama de la mecánica estadística nacida a principios de siglo del estudio de los sistemas dinámicos constituidos por un gran número de partículas (movimiento browniano). Su marco natural se vuelve hoy la teoría de la medida. Uno de sus principios básicos equivale a sustituir la noción de «medida instantánea» del físico por una cierta media. Las aplicaciones de la teoría ergódica en la actualidad diversas van de las matemáticas aplicadas hasta la teoría de los números.

## Ergodicidad

Los fenómenos de ergodicidad y las hipótesis, postulados, principios, teoremas y teorías que se refieren a ella aparecieron en primer lugar en física.
Liberada de su aparato matemático formal, puede definirse la ergodicidad como la propiedad de un sistema que tiende, en los diversos sentidos posibles del cálculo de probabilidades, hacia un estado límite independiente de la situación inicial.
Un ejemplo simple de ergodicidad viene proporcionado por el barajamiento de cartas de juego, problema que ha sido estudiado por H. Poincaré. Un barajamiento puede ser considerado como una serie de permutaciones; la probabilidad de paso de un estado del paquete a otro estado aparece como una matriz $M = (p_{ij})$ donde $p_{ij}$ es la probabilidad para que después de una operación de barajamiento la carta que estaba en la $i$-ésima plaza vaya a ocupar la $j$-ésima. Si M satisface a condiciones muy generales, la probabilidad $p_{ij}^{(n)}$ para que después de $n$ operaciones la carta inicialmente en el puesto $i$-ésimo vaya a ocupar el $j$-ésimo tiende hacia un límite $\omega_j$, independiente de $i$. Dicho en otros términos, la probabilidad para que después de un barajamiento bastante prolongado una carta ocupe un lugar dado es independiente de la posición que inicialmente ocupaba. Debido a que admiten esta ergodicidad, los jugadores

confían en el barajamiento (sin trucos) de las cartas para restablecer una situación de «azar» antes de comenzar una nueva partida.

F. LL.

## Ergodismo

Sinónimo, en vía de desaparición, de ergodicidad.

## Erlangen

• *Programa de Erlangen de F. Klein.* — Clasificación de las geometrías enunciadas por primera vez (1872) en términos de grupos de transformaciones cuyos invariantes se buscan.

## Error

• *Error de una aproximación.* — V. APROXIMACIÓN.

• *Función de error.* — Primitiva F de la función numérica $x \mapsto e^{-x^2}$. No se conoce en general el valor exacto de la integral $\int_a^b e^{-x^2}dx$ salvo en algunos casos particulares. Por ejemplo, la integral de Gauss:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## Escala

Modo de presentación de un dibujo con vistas a una lectura utilizable: asignación de un real a cada punto de una curva (generalmente una recta) trazada sobre una hoja de papel.

V. FUNCIONAL, LOGARÍTMICA, MÉTRICA.

## Escalar

El término «escalar» se emplea para designar un número (o un elemento de un cuerpo) por oposición a la palabra «vector».

• *Cuadrado escalar de un vector x de un espacio prehilbertiano.* — Producto escalar de $x$ consigo mismo.

• *Matriz escalar de orden n.* — Matriz diagonal $A \in M_n(K)$ de la forma $A = aI_n$ donde $I_n$ es la matriz unidad y donde $a \in K$.

• *Producto escalar sobre un C-espacio vectorial* E. — Forma sesquilineal hermitiana $\varphi$ compleja positiva sobre E. Para todo par $(x, y) \in E^2$, el escalar $\varphi(x, y)$ también designado por $(x/y)$ o $x \,.\, y$ se llama producto escalar de $x$ e $y$. El

espacio E provisto de la forma $\varphi$ es un espacio prehilbertiano complejo. Si $\varphi$ es no degenerada, E es un espacio hermitiano. El producto hermitiano sobre $\mathbb{C}^n$ es un producto escalar.

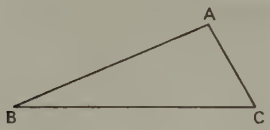
• *Producto escalar sobre un* R*-espacio vectorial* E. — Forma bilineal simétrica $\varphi$ positiva sobre E. Para todo par $(x, y)$ de $E^2$, el real $\varphi(x, y)$, también designado por $(x/y)$ o $x \,.\, y$, se llama producto escalar de $x$ e $y$. El espacio E provisto de la forma $\varphi$ es un espacio prehilbertiano real. Si $\varphi$ es no degenerada, E es euclídeo. El producto escalar de un espacio euclídeo E de dimensión $n$ verifica $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ donde $(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $(y_1, y_2, ..., y_n)$ son las componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en una base ortonormada; en $\mathbb{R}^2$ verifica $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \,.\, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

## Escalares

• Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K; el cuerpo K se llama cuerpo de escalares (V. ESCALAR).

## Escaleno

• *Triángulo escaleno.* — Triángulo cuyos lados no tienen la misma longitud.

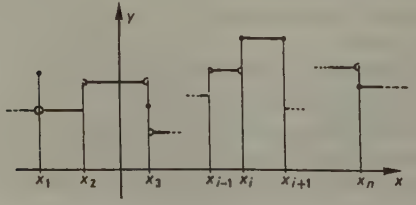



## Escalera

• *Función en escalera.* — Una función numérica $f$ se denomina en escalera si existen puntos $x_1 < x_2 < ... < x_n$ de **R** tales que las restricciones de $f$ a los intervalos

$$]-\infty, x_1[, \; ]x_n, +\infty[ \text{ y } ]x_i, x_{i+1}[$$

para $i = 1, ..., n-1$ sean funciones constantes. Ejemplos: la función característica de un intervalo real o la función «parte entera».
V. ESCALONADA.



## Escalonada

• *Función escalonada sobre un clan de partes de un conjunto.* — Toda combinación lineal de coeficientes reales de funciones características de los elementos del clan. Si se toma la tribu de Borel sobre **R**, toda función en escalera sobre **R** está escalonada sobre esa tribu.

## Escindida

• *Serie exacta escindida.* — Se dice que una serie exacta $O \to E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \to O$ es escindida si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$ admite un suplementario en E. En este caso, E es isomorfo con $E' \oplus E''$.

## Escuadra

Instrumento de dibujo que materializa un triángulo rectángulo.

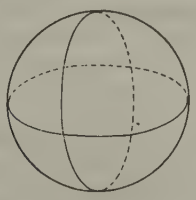
## Esencial

• *Punto singular esencial de una función compleja f.* — V. SINGULAR.

## Esfera

• *Esfera de los colmos.* — V. COLMOS.

• (Usual.) *Esfera de* $R^3$. — Dado un punto 0 de $R^3$ y un real $r>0$, se denomina esfera de centro 0 y de radio $r$ al conjunto de los puntos de $R^3$ situados a la distancia $r$ de 0. La esfera es una superficie de revolución que puede ser engendrada por un círculo de centro 0 y de radio $r$ girando alrededor de uno de sus diámetros. Su área es igual a $4\pi r^2$. A veces se llama abusivamente esfera a la bola de centro 0 y de radio $r$ cuyo volumen es $4\pi r^3/3$.
V. CIRCUNSCRITA, COLMOS, CONCÉNTRICA, HAZ, GRANDE (Círculo), HIPERESFERA, MERIDIANOS, MONGE, OSCULATRIZ, SEUDO-ESFERA, RADICAL (Eje, centro, plano), RIEMANN.



• *Esfera dentro de un espacio métrico* E. — Dado un punto $x_0 \in E$ y un real $r>0$, se llama esfera de centro $x_0$ y de radio $r$ al conjunto $S(x_0, r)$ de los

puntos $x \in E$ tales que $d(x, x_0) = r$. Cuando E es un espacio vectorial normado, la esfera $S(x_0, r)$ es el conjunto de los vectores $x$ tales que $\|x - x_0\| = r$. Las esferas de un plano euclídeo son círculos. La palabra esfera encuentra su sentido usual en el caso en que E sea el espacio euclídeo $R^3$.
V. BOLA, UNIDAD.

• *Esfera en* $K^n$ de centro $x = (x_1, ..., x_n)$ *y de radio* $a \in K$. — Conjunto de los ceros en $K^n$ del polinomio $(X_1 - x_1)^2 + \cdots + (X_n - x_n)^2 - a \in K[X_1, ..., X_n]$. Para $n \geq 4$, se habla a veces de hiperesfera.

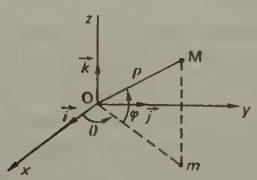
• *Esfera punto.* — V. PUNTO.

• *Paradoja de la esfera.* — Teorema, en apariencia paradójico, debido a Hausdorff. Afirma que se puede dividir la superficie de la esfera en tres conjuntos disjuntos superponibles entre ellos y superponibles también a su unión.

• *Problema de la inversión de la esfera.* — V. INVERSIÓN.

## Esféricas

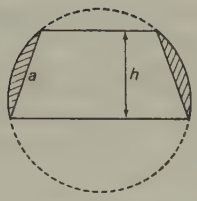
• *Coordenadas esféricas de un punto* M *con relación a un sistema de referencias ortonormado* $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *de* $R^3$. — Sea $m$ la proyección ortogonal de M sobre el plano de ecuación $z = 0$. Se llaman coordenadas esféricas de M al triplete $(\rho, \theta, \varphi)$ donde $\rho$ es igual a $\|\overrightarrow{OM}\|$, donde $\theta \in [0, 2\pi[$ es la medida en radianes del ángulo $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{0m})}$ y donde $\varphi \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ es la medida en radianes del ángulo $\widehat{(\overrightarrow{0m}, \overrightarrow{0M})}$. Los números $\rho$, $\theta$, $\varphi$ se llaman respectivamente radio-vector, longitud (o azimut) y latitud (o altura) de M. Para algunos, $\varphi \in [0, \pi]$ designa




la medida en radianes del ángulo $\widehat{(\vec{k}, \overrightarrow{OM})}$ y es llamado colatitud. Estos tipos de sistemas son muy utilizados en astronomía.

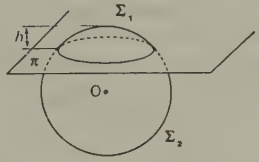
## Esférico

• *Anillo esférico.* — Volumen A engendrado por un segmento circular S de un círculo C que gira alrededor de una recta que no corta a S, situada en el plano de C y que pasa por su centro. Su volumen es $V = \frac{1}{6}\pi a^2 h$ donde $a$ es la longitud de la cuerda y $h$ la distancia entre los planos de los círculos paralelos extremos.




Sección del anillo

• *Casquete esférico.* — La intersección de una esfera por un plano $\pi$ que no pasa por su centro determina dos superficies llamadas casquetes esféricos. El área de un casquete de una esfera de radio R es igual a $2\pi Rh$, donde $h$ es la distancia entre $\pi$ y el plano paralelo a $\pi$ y tangente al casquete.



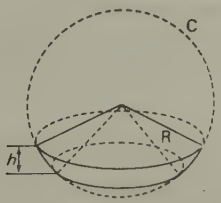

• *Distancia esférica entre dos puntos* A *y* B *de una esfera.* — Medida $\delta(A, B)$ del arco menor AB del círculo grande que pasa por A y B. Si la unidad de medida es el radián, $0 \leqslant \delta(A, B) \leqslant \pi$.

• *Exceso esférico de un triángulo esférico.* — Real positivo $A + B + C - \pi$ donde A, B, C son las medidas en radianes de los ángulos del triángulo esférico.

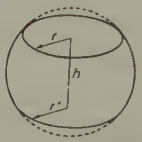
• *Indicatriz esférica de un arco geométrico de clase* $C^k (k \geqslant 2)$ *sin puntos estacionarios.* — Curva engendrada, cuando M varía sobre $\Gamma$, por el extremo P del vector $\overrightarrow{OP} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ donde 0 es un punto fijo y $s$ la abscisa curvilínea de M sobre $\Gamma$.

Como $\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \right\| = 1$, la indicatriz esférica se traza sobre una esfera de centro 0 y de radio 1.

• *Sector esférico.* — Volumen engendrado por un sector circular de un círculo C que gira alrededor de un diámetro de C. Su volumen es $2\pi R^2 h/3$ donde R y $h$ son respectivamente el radio de C y la altura de la zona esférica descrita por el arco del sector circular.

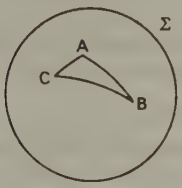


• *Segmento esférico.* — Conjunto de los puntos de una bola de radio R comprendido entre dos planos paralelos distantes $h$ y que cortan la bola. Su volumen es $\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r^2 + r'^2)h$, donde $r$ y $r'$ son los radios de los círculos obtenidos por sección de la bola por los dos planos.




• *Triángulo esférico.* — Sean tres puntos A, B, C de una esfera Σ no situados sobre un mismo círculo grande. Se llama triángulo esférico de vértices A, B, C al triplete (AB, AC, BC) de los arcos menores de los círculos grandes de Σ llamados lados del triángulo esférico. Su superficie es igual a $E\rho^2$ donde E es el exceso esférico y $\rho$ el radio de Σ.

V. Angulos, Girard, Esférico (Trigonometría).




• *Trigonometría esférica.* — Estudio de las relaciones que existen entre los ángulos y los lados de un triángulo esférico. Desempeña un papel importante en astronomía. Si A, B, C son los ángulos y $a$, $b$, $c$ las medidas de los lados de un triángulo esférico, las principales fórmulas son:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

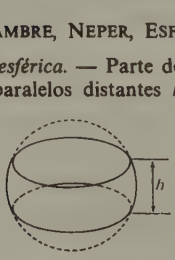
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

$$\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} A$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$$

V. Delambre, Neper, Esférico (Exceso).

• *Zona esférica.* — Parte de una esfera Σ de radio R comprendida entre dos planos paralelos distantes $h > 0$ y que cortan la esfera. Su área es $2\pi Rh$.



## Espacio

Empleado solo, este sustantivo es sinónimo de espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$. De hecho es utilizado en numerosas expresiones que designan conjuntos provistos de estructuras. Ejemplos: espacio vectorial, espacio topológico, espacio normado completo, espacio de Hilbert, etc. (V. SEMIESPACIO).

• *Geometría en el espacio.* — Cuando no se precisa más se trata del espacio euclidiano $\mathbf{R}^3$.

## Especial

• *Grupo especial lineal.* — Sinónimo de grupo unimodular. V. UNIMODULAR.

• *Grupo especial ortogonal.* — Sea E un K-espacio vectorial de dimensión finita provisto de una forma cuadrática no degenerada $q$. Se llama grupo especial ortogonal de $q$ al sub-grupo $SO(q)$ del grupo ortogonal $O(q)$ formado por los automorfismos $u \in O(q)$ cuyo determinante es igual a 1. Cuando E es euclídeo, el grupo especial ortogonal es el grupo de las rotaciones notado $SO(E)$ ó $O^+(E)$.

• *Grupo especial unitario.* — Sea E un K-espacio vectorial de dimensión finita provisto de una forma hermitiana no degenerada $q$. Se denomina grupo especial unitario al sub-grupo $SU(E)$ del grupo unitario $U(E)$ formado por los automorfismos $u \in U(E)$ cuyo determinante es igual a 1.

## Especiales

• *Funciones especiales.* — Término impreciso utilizado para designar las funciones soluciones de ecuaciones funcionales (función $r$ por ejemplo) o de ecuaciones diferenciales (funciones de Bessel). Desempeñan un papel fundamental en análisis, en matemáticas aplicadas y en física.

## Especie

• *Especie de un tensor.* — V. TENSOR.

• *Clasificación por especie de una cónica.* — Si $(x, y, t)$ son las coordenadas homogéneas de un punto M en el completado proyectivo del plano afín, la ecuación de la cónica se escribe:

$$(x, y, t)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} = 0,$$

donde A es una matriz real cuadrada simétrica de orden 3. Si $\det A \neq 0$, la cónica se denomina propia; es una elipse, una hipérbola o una parábola. Si $\det A = 0$, la cónica se denomina impropia; se descompone en dos rectas.

• *Clasificación por especie de una cuádrica.* — Sean $(x, y, z, t)$ las coordenadas homogéneas de un punto M en el completado proyectivo del espacio afín $\mathbf{R}^3$; la ecuación de la cuádrica se escribe:

$$(x,\ y,\ z,\ t)\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$$

donde A es una matriz real cuadrada simétrica de orden 4.
— Si $\det A \neq 0$, la cuádrica se denomina propia; es bien un elipsoide, bien un hiperboloide elíptico o hiperbólico.
— Si $\det A = 0$, la cuádrica se denomina impropia. Entre las cuádricas impropias algunas son conos o cilindros (se llaman no descompuestas), las otras son reuniones de dos planos secantes, paralelos o confundidos (se lleman descompuestas).

• *Elementos simples de primera o segunda especie.* — V. SIMPLES.

• *Función o integral euleriana de primera o segunda especie.* — V. EULERIANA.

• *Punto de discontinuidad de primera o segunda especie.* — V. DISCONTINUIDAD.

• *Punto de retroceso de primera o segunda especie.* — V. RETROCESO.

## Espectral

• *Teoría espectral.* — Una de las ramas más importantes del análisis funcional moderno. Estrechamente ligada a la teoría general de la integración, estudia, en particular, los espectros de endomorfismos (operadores) de espacios de Banach complejos.

• *Topología espectral.* — Topología de Zariski sobre el espectro de un anillo conmutativo unitario.

## Espectro

• *Espectro de un anillo.* — Sinónimo de espectro primo de este anillo.
V. PRIMO, ESQUEMAS.

• *Espectro de un endomorfismo f de un* K*-espacio vectorial* E. — Conjunto de los valores propios de *f*.
V. CARACTERÍSTICA (Polinomio), MINIMAL (Polinomio).

• *Espectro de una matriz cuadrada en elementos de un cuerpo conmutativo* K. — Conjunto de los valores propios de la matriz.
V. CARACTERÍSTICA (Polinomio), MINIMAL (Polinomio).

- *Espectro maximal de un anillo.* — V. MAXIMAL.
- *Espectro primo de un anillo.* — V. PRIMO.

## Esperanza

- *Esperanza matemática.* — V. MATEMÁTICA, MOMENTO.

## Espiral

(Usual.) Curva plana que describe revoluciones alrededor de un punto que se aleja, y que recuerda más o menos la forma de la espiral logarítmica; sin embargo, algunas espirales tienen formas muy alejadas de ésta.
V. ARQUÍMEDES, BERNOULLI, CORNU, HIPERBÓLICA, PARABÓLICA, SINUSOIDAL.

- *Espiral de Fermat.* — Espiral parabólica.

## Espíricas

- *Curvas espíricas.* — Secciones planas del toro.
V. VILLARCEAU (Círculos de).

- *Curvas espiricas.* — Secciones planas del toro.
V. VILLARCEAU (Círculos de).

## Esporádicos

- *Grupos esporádicos.* — Casi todos los grupos finitos simples conocidos pertenecen a cinco clases, entre los cuales figuran los grupos cíclicos de primer orden y los grupos alternados $A_n$ con $n \geqslant 5$. Se llaman grupos esporádicos a los grupos finitos simples que no pertenecen a estas cinco familias. Actualmente, se han detectado 26, que son los cinco grupos de Mathieu (V. Mathieu). Los dos más grandes son el «bebé monstruo» y el «monstruo» de Fischer.
V. CONWAY, FISCHER.

## Esquemas

(Usual.) Dibujos o figuras simplificadas.

- *Teoría de los esquemas.* — Cuadro de la geometría algebraica con posterioridad a los trabajos de Grothendieck (a partir de 1957). Los objetos geométricos estudiados son los esquemas (lo que corresponde a las variedades), es decir, los espectros de anillos provistos de la topología de Zariski y de un «ház» de anillos locales que permite describir las condiciones de unión.
V. ALGEBRAICA (Geometría).

## Estabilidad

• *Número de estabilidad de un grafo* (S, U). — Sea $\mathscr{A}$ el conjunto de las partes estables A de S. El entero $\sup_{A \in \mathscr{A}} (\text{Card } A)$ se llama número de estabilidad de G.

## Estabilizador

• *Estabilizador de un elemento* $x \in E$ *por un grupo* G *que opera sobre el conjunto* E. — Sub-grupo $G_x$ de G formado por los elementos $g \in G$, tales que $gx = x$.

## Estable

• *Conjunto estable de vértices de un grafo.* — Conjunto de vértices dos a dos no adyacentes.

• *Parte estable de un conjunto* E *provisto de una ley de composición interna*.* — Parte A de E tal que para todo par $(x, y)$ de elementos de A el compuesto $x * y$ pertenece a A.

• *Parte estable de un conjunto* E *provisto de una acción* $*$ *de* $\Omega$ *sobre* E. — Parte A de E tal que, para todo par $(\alpha, x)$ de $\Omega \times A$, el compuesto $\alpha * x$ pertenece a A.

• *Parte estable por una aplicación f de un conjunto* E *en sí mismo.* — Parte P de E tal que la imagen $f(P)$ de P por $f$ esté contenida en A.

## Estacionario

• *Punto estacionario de un arco parametrado* (I, $f$) *de* $\mathbf{R}^3$ *de clase* $C^k$ $(k \geqslant 2)$. Se denomina así, por oposición a un punto ordinario, a un punto M del arco tal que en ese punto el vector derivado $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \overrightarrow{f'(t)}$ sea nulo.

• *Punto estacionario de una superficie.* — Dada una superficie $\Sigma$ de ecuación cartesiana $z = f(x, y)$, donde $f$ es de clase $C^2$, se llama punto estacionario de $\Sigma$ (con relación a un sistema de referencia cartesiano considerado) a todo punto de $\Sigma$ de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$, tal que $\partial f/\partial x(x_0, y_0) = \partial f/\partial y(x_0, y_0) = 0$. En un punto como éste $\Sigma$ admite un plano tangente paralelo al plano $(x0y)$. Entre los puntos estacionarios de $\Sigma$ se distinguen los vértices, los fondos y los puertos.
V. PUERTO, FONDO, MONTAÑOSO, VÉRTICE.

• *Sucesión estacionaria.* — Sucesión $(x_n)_{n \in N}$ de elementos de un conjunto E tal que existe un entero $n_0$ para el cual $x_n = x_{n_0}$ cualquiera que sea $n \geqslant n_0$.

## Estadística

• *Cálculo estadístico o estadística.* — Rama de las matemáticas aplicadas en relación con el cálculo de las posibilidades pero que, a diferencia de este último, se basa en la observación de sucesos reales a partir de los cuales se busca establecer una hipótesis plausible según las previsiones que conciernen a circunstancias análogas. El estudio de un problema estadístico se puede descomponer en cuatro etapas: recogida de datos, clasificación y reducción de estos datos (estadística descriptiva), análisis de los datos para relacionarlos con los modelos de probabilidades, deducción de previsiones.

• *Serie estadística.* — Dada una muestra $(u_1, u_2, ..., u_N)$ de N individuos de una población sobre la cual se quiere estudiar un carácter X, se llama serie estadística a la serie $X(u_1), ..., X(u_N)$ de los N resultados encontrados después del sondeo realizado sobre los N individuos. En el caso en que se estudien dos caracteres X, Y... sobre la misma muestra $(u_1, u_2, ..., u_N)$, se llama serie estadística doble a la serie de los pares de resultados $(X(u_1), Y(u_1)), (X(u_2), Y(u_2)), ..., (X(u_N), Y(u_N))$.

• *Teoría estadística de la comunicación.* — Teoría matemática de la información.
V. INFORMACIÓN.

• *Variable estadística.* — Sinónimo de carácter cuantitativo.

## Estándar

• *Análisis no estándar.* — V. NO ESTÁNDAR.

• *Desviación o dispersión estándar.* — Sinónimo, poco usado, de desviación típica.

• *Elemento estándar.* — Elemento de $Z \subset {}^*Z$ o de $R \subset {}^*R$.
V. NO ESTÁNDAR.

## Estática

Rama de la mecánica.
V. MECÁNICA.

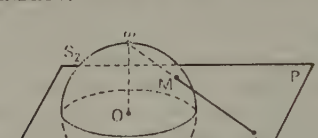
## Estatmo

• *Estatmo euclídeo.* — V. EUCLÍDEO (Anillo).

## Estereográfica

• *Proyección estereográfica.* — Procedimiento corrientemente empleado por los geógrafos. Sean $S_2$ la esfera de $R^3$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y P el plano $x0y$. Sea $\omega$ el punto de coordenadas (0, 0, 1). Se llama proyección

estereográfica de polo o de vértice $\omega$ a la aplicación de $S_2 - \{\omega\}$ sobre P que, a todo punto M de $S_2 - \{\omega\}$ asocia el único punto de intersección M' de la recta $\omega$M con el plano P. Esta aplicación es un homeomorfismo.
V. ALEXANDROV.




## Estereometría

Campo formado por las aplicaciones prácticas de la geometría a la medida de los volúmenes.

## Estigma

• *Estigma de un matroide.*—Sinónimo del circuito del matroide.

## Estimación

Búsqueda del valor de uno o varios parámetros de una ley de probabilidad a partir de datos proporcionados por diversas experiencias o sondeos. No se puede estar seguro del valor hallado. Todo lo más, se puede determinar con un margen de error muy pequeño.
V. ESTIMADOR.

## Estimador

• *Estimador de un parámetro de una ley de probabilidad.* — Variable aleatoria cuyos valores tomados sobre muestras de la población son considerados como estimaciones del parámetro. Un estimador es una función de $n$ variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ independientes y de igual ley cuyos valores tomados son los valores derivados de las muestras de $n$ individuos.
V. CENTRADO (Bien, Mal), JUSTO, SESGADO, VEROSIMILITUD (Método del maximum de).

## Estocástica/o

Que es de naturaleza aleatoria o ligado al azar.

• *Convergencia estocástica.*—Se dice que una sucesión $(X_n)_n \geq 0$ de variables aleatorias converge estocásticamente o en probabilidad hacia una variable

aleatoria X si, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene un $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$. La convergencia estocástica lleva consigo la convergencia en ley.

● *Suceso estocástico.*—Suceso que depende de una o varias variables aleatorias.

● *Proceso estocástico.*—Proceso en el que a una variable $x$ (determinada o aleatoria) corresponde al menos una variable simplemente probable. V. PROBABILIDADES (Cálculo de las).

## Estocásticamente

● *Sucesión de variables aleatorias estocásticamente convergentes.*—V. ESTOCÁSTICA (Convergencia).

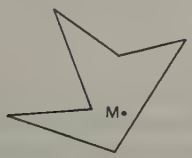
● *Sucesos estocásticamente independientes.*—V. INDEPENDIENTES.

## Estrategia

● *Estrategia de un jugador.*—Descripción completa de la manera en que se debería comportar el jugador ante cualquier circunstancia posible, en cada jugada. En un juego finito, si se conocen las estrategias de los jugadores, se puede saber el desarrollo y el resultado del juego (V. EQUILIBRIO, GANADOR).

## Estrellada

● *Parte de un espacio afín estrellado con relación a uno de sus puntos* M. — Parte P de un espacio afín tal que para todo punto N perteneciente a P el segmento MN está contenido en P. Una parte convexa es estrellada por relación a uno cualquiera de sus puntos.




## Estrellado

● *Polígono estrellado.* — Polígono no convexo.

## Estricta

● *Inclusión estricta.*—Relación de orden estricto sobre $\mathfrak{P}$ (E), notada $\subset$ o $\subset$ y definida por $A \subset B$ si y sólo si A está estrictamente incluido en B.

Cuando la inclusión es notada $\subset$ (especialmente en las obras anglo-sajonas), la inclusión estricta es notada $\subset\cdot$.

• *Desigualdad estricta.*—Si una desigualdad $f(x) \leqslant g(x)$ es tal que $f(x) \forall g(x)$, se dice que es estricta y se escribe $f(x) < g(x)$ y se lee «$f(x)$ estrictamente inferior a $g(x)$».
V. INFERIOR.

• *Juegos de determinación estricta.*—Un juego con dos jugadores se denomina de determinación estricta si uno de los jugadores tiene a su disposición una estrategia ganadora, es decir, una estrategia que le asegure la victoria haga lo que haga su adversario. En 1912, Ernest Zermelo demostró que todo juego finito, de información perfecta, con suma nula y con dos jugadores, se determina de forma estricta. El ajedrez es, pues, un juego de determinación estricta; existe una estrategia ganadora para uno de los jugadores, pero el teorema no proporciona un medio para encontrar esta estrategia.

## Estrictamente

V. CRECIENTE, DECRECIENTE, INCLUIDO, INFERIOR, MONÓTONA, SUPERIOR.

## Estricto

• *Orden estricto sobre un conjunto E.*—Sea una relación de orden $\leqslant$ sobre E; la relación $<$ sobre E definida por $x < y$ (se lee «$x$ estrictamente inferior a $y$») si y sólo si $x \leqslant y$ y $x \forall y$ se dice de orden estricto sobre E. El signo $<$ se sustituye a veces, en este caso, por otro signo. Esta relación, a pesar de su nombre, no es una relación de orden, ya que no es reflexiva.

## Estrofoide

V. RECTA, OBLICUA.

## Estructura

Se dice que un conjunto está provisto de estructura si se dan una o varias relaciones, una o varias leyes de composición internas o externas, una o varias topologías (el «o» no es de ningún modo exclusivo) sobre este conjunto. Entre el gran número de estructuras estudiadas figuran las de álgebra (grupo, espacio vectorial...), de topología (espacios compactos, completos), de álgebra topológica, etc. La noción de estructura permite clasificar y comparar los objetos matemáticos estudiados; se dice frecuentemente «E provisto de una estructura de ...» o «¿Cuál es la estructura de E?» V. ALGEBRAICA, INDUCIDA.
En lógica, siendo L un lenguaje, una estructura para L o una realización de L es la dada: por un conjunto no vacío D; para cada individuo $a$ de L, por un elemento $a$ de D; para cada predicado $r$ de L de peso $n$, por una relación $n$-ária $\bar{r}$ sobre D y para cada signo operatorio $f$ de L de peso $n$, por una operación $n$-ária $\bar{f}$ sobre D.

## Euclídea

• *Distancia euclídea en un espacio afín euclídeo* $\mathscr{E}$. — Distancia $d$ asociada a la norma euclídea definida sobre el espacio vectorial E unido a $\mathscr{E}$.

• *Distancia euclídea en un espacio vectorial euclídeo* E. — Distancia $d$ asociada a la norma de E. En $\mathbf{R}^3$, la distancia euclídea de $(x, y, z)$ a $(x', y', z')$ es igual a:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

• *División euclídea en un anillo euclídeo* A. — Sean $a$ y $b$ dos elementos de A con $b$ no nulo y $\varphi$ el estatmo euclídeo de A. Efectuar la división euclídea de $a$ por $b$ es determinar el único par $(q, r)$ de elementos de A tal que $a = bq + r$ con $r = 0$ ó $\varphi(r) < \varphi(b)$. El elemento $q$ se denomina el cociente euclídeo y $r$ el resto euclidiano de la división de $a$ por $b$. En el anillo euclidiano K[X] de los polinomios de coeficientes en un cuerpo conmutativo K. la división euclídea también se denomina división según las potencias decrecientes.

• *División euclídea en el conjunto* N *de enteros naturales.* — Sean $a$ y $b$ dos enteros naturales tales que $b$ sea no nulo. Efectuar la división euclídea de $a$ por $b$ es determinar el único par $(q, r)$ de enteros naturales tales que $a = bq + r$ con $0 \leqslant r < b$.

• *Geometría euclídea.* — En origen, estudio de la geometría en el marco y el espíritu impuesto por los trabajos de Euclides, particularmente por el quinto de sus postulados. La intuición y la observación jugaban un gran papel en ella. En el siglo XIX, el descubrimiento de las geometrías no euclídeas proporcionó indispensables fundamentos sólidos de la geometría; Hilbert propuso una axiomatización de la geometría euclídea apoyándose en un sistema de axiomas independientes. En la actualidad, la geometría euclídea es el estudio del grupo ortogonal sobre un espacio vectorial euclídeo (V. NO EUCLÍDEA).

• *Norma euclídea en un espacio vectorial euclídeo* E. — Norma definida sobre E por $||x|| = \sqrt{q(x)}$, donde $q$ es la forma cuadrática definida positiva sobre E. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$, la norma euclídea de $(x, y, z)$ es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

## Euclídeo

• *Algoritmo euclídeo.* — V. EUCLÍDEO (Anillo).

• *Anillo euclídeo.* — Anillo conmutativo íntegro A provisto de una aplicación $\varphi$ de A* en N llamada algoritmo o estatmo euclídeo tal que si $a, b \in$ A y $a$ divide $b$, entonces $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ y tal que para todo $a \in$ A y $b \in$ A* existe un par $(q, r)$ de elementos de A tal que $a = bq + r$ con $r = 0$, donde $\varphi(r) < \varphi(b)$. Los anillos Z, Z[$i$] y K[X], donde K es un cuerpo, son euclídeos; en cada uno de ellos, el estatmo $\varphi$ se define respectivamente por $\varphi(a) = |a|$, $\varphi(x + iy) = x^2 + y^2$, $\varphi$(P) es el grado de P. Todo anillo euclídeo no es principal, por tanto factorial.
V. EUCLÍDEA (División).

• *Espacio vectorial euclídeo.* — Espacio prehilbertiano real cuya forma cuádrica asociada al producto escalar es definida positiva; es el caso del espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ provisto de la forma cuádrica:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \text{ donde } x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Todo espacio vectorial euclídeo de dimensión $n$ es isométrica en $\mathbf{R}^n$.

• *Espacio afín euclídeo.* — Espacio afín asociado a un espacio vectorial euclídeo.

• *Cociente y resto euclídeo.* — V. EUCLÍDEA (División).

• *Estatmo euclídeo.* — V. EUCLÍDEO (Anillo).

## Euclides (315?-255? a. de C.)

• *Algoritmo de Euclides.* — Algoritmo que permite determinar el MCD de dos enteros naturales $a$ y $b$ no nulos tales que $a$ sea superior a $b$. Utiliza el principio siguiente: «Si $q_1$ y $r_1$ son el cociente y el resto de la división euclídea de $a$ por $b$, el MCD de $a$ y $b$ es igual al MCD de $b$ y $r_1$». Se efectúan las divisiones euclídeas sucesivas:

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1 \quad \text{con} \quad 0 \leqslant r_1 < b;\\
&b = r_1 q_2 + r_2 \quad \text{con} \quad 0 \leqslant r_2 < r_1;\\
&r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad \text{con} \quad 0 < r_3 \leqslant r_2; \ \ldots\ ;\\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1} \quad \text{con} \quad 0 < r_{n+1} \leqslant r_n.
\end{aligned}$$

Al plantear $r_0 = b$, la sucesión de término general $r_n$, estrictamente decreciente, es finita. El MCD de $a$ y $b$ es el último término no nulo de esa sucesión.

• *Algoritmo de un anillo euclídeo.* — V. EUCLÍDEO (Anillo).

• *Postulados de Euclides.* — En número de cinco formaban un grupo de hipótesis («se pide que...») que Euclides renunciaba a demostrar. Enuncian:

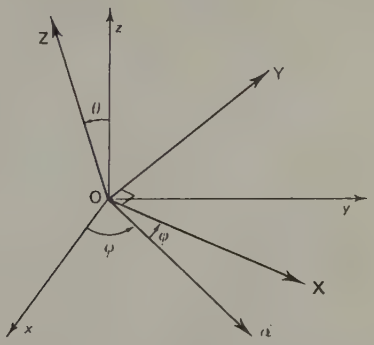
1) se puede trazar una recta de un punto cualquiera a un punto cualquiera;
2) y prolongar por continuidad una recta finita en una recta;
3) y describir un círculo de un punto cualquiera y con un intervalo cualquiera;
4) y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí;
5) y que, si una recta cae sobre dos rectas, con los ángulos interiores del mismo lado más pequeños que dos rectos, esas rectas, prolongadas al infinito se encuentran del lado en que los ángulos son más pequeños que dos rectos.

El quinto postulado, también llamado «el» postulado de Euclides, es el que más a menudo se enuncia bajo la forma: «Por un punto exterior a una recta se puede trazar una paralela y sólo una a esa recta.» Durante siglos, por iniciativa del propio Euclides, fue objeto de consideraciones particulares que en el siglo XIX condujeron a la elaboración de geometrías llamadas no euclídeas.

V. EUCLÍDEA (Geometría), NO EUCLÍDEA (Geometría).

## Euler, Leonhard (1707-1783)

• *Angulos de Euler.* — Angulos utilizados en mecánica para estudiar, en particular, el movimiento de un sólido del que un punto O es fijo. Sean (Ox, Oy, Oz) un triedro trirrectángulo fijo (OX, OY, OZ) un triedro trirrectángulo unido al sólido móvil y Oα una semi-recta de origen O trazada por la recta de intersección de los planos (xOy) y (XOY). El ángulo $\psi = (\widehat{Ox, O\alpha})$ orientado por Oz se llama ángulo de precesión; el ángulo $\theta = (\widehat{Oz, OZ})$ orientado por Oα se llama ángulo de nutación, y el ángulo $\varphi = (\widehat{O\alpha, OX})$ orientado por OZ se llama ángulo de rotación propia. Los ángulos $\psi$, $\varphi$ y $\theta$ son los tres ángulos de Euler. Se pasa del triedro (Ox, Oy, Oz) al triedro (OX, OY, OZ) por medio de tres rotaciones: primero una rotación de eje Oz y de ángulo $\psi$,, luego una rotación de eje Oα y de ángulo $\theta$ y finalmente una rotación de eje OZ y de ángulo $\varphi$.




• *Característica de Euler-Poincaré de un complejo de cadena* M. — Suma alternada

$$\chi = \sum_n (-1)^n b_n(M)$$

donde $b_n(M)$ es el $n$-ésimo número de Betti de M.

• *Característica de Euler-Poincaré de un grafo conexo* G *que tiene n vértices y m aristas.* — El entero $n - m = b_0(G) - b_1(G)$, donde $b_i(G)$ es el $i$-ésimo número de Betti de G. El número ciclomático ha sustituido a esta noción que ha caído en desuso.

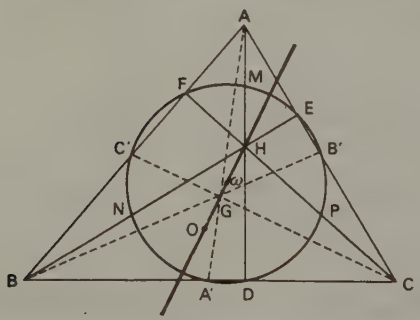
• *Característica de Euler-Poincaré de un poliedro.* — Para un poliedro que posee V vértices, A aristas y C caras, se llama característica de Euler-Poincaré el entero V − A + C. Para un poliedro convexo es igual a 2 (teorema de Descartes-Euler).

• *Características de Euler-Poincaré de una superficie* Σ. — Generalización de la característica de Euler-Poincaré de un poliedro. Sean $n$, $m$, y $c$ los números

de vértices, de aristas y de caras de una representación celular de un grafo conexo sobre la superficie Σ. El entero $n - m + c$ denotado o también $\chi$, es independiente de la representación celular. Se llama característica de Euler-Poincaré de Σ. Es un invariante topológico. La característica de una superficie homeomorfa en una esfera provista de $p$ asas, de $q$ gorros cruzados y atravesada $r$ veces es $c = 2 - 2p - q - r$. En particular, $c = 2$ para el plano y la esfera, $c = 1$ para el disco del plano, $c = 0$ para el toro y la botella de Klein; $c = -2$ para el toro de dos agujeros.
V. GÉNERO.

• *Característica de Euler-Poincaré de una variedad diferencial compacta* M *de dimensión m.* — Es el número $\chi(V)$ definido por $\chi(V) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n b_n(V)$, donde $b_n(V)$ es el $e$-ésimo número de Betti de V.

• *Círculo de Euler.* — Círculo que pasa por nueve puntos notables de un triángulo ABC: los pies de las alturas, los pies de las medianas y los medios de los segmentos AH, BH, CH, donde H designa el ortocentro del triángulo. Su centro $\omega$ está sobre la recta de Euler, es el medio de OH, siendo el punto O el centro del círculo circunscrito al triángulo.




Además de los nueve puntos históricos que han servido para definir ese círculo, se han descubierto otros treinta y cuatro ya conocidos por otras propiedades notables.

• *Conjetura de Euler.* — No existe ningún cuadrado greco-latino de orden $2n$ con $n > 1$ entero impar; Bose, Parkes y Shrikhande han invertido esta conjetura y demostrado, en 1959, con la ayuda de un ordenador, que existen cuadrados greco-latinos de todos los órdenes, salvo de 2 y 6.
V. OFICIALES.

• *Constante de Euler.* — Límite C de la sucesión $(U_n)_{n>0}$, donde:

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n.$$

Valor aproximado: C = 0,57721566... Antiguamente llamada constante de Mascheroni, se ignora su naturaleza aritmética, es decir, si es racional o irracional, algebraica o transcendente.

• *Criterio de Euler.* — Sean $a$ un entero y $p$ un número entero primo positivo impar y extraño con $a$. El criterio de Euler afirma que $a^{\frac{p-1}{2}}$ es congruente con $\left(\frac{a}{p}\right)$ módulo $p$, donde $\left(\frac{a}{p}\right)$ es el símbolo de Legendre igual a 1 si $a$ es residuo cuadrático módulo $p$ e igual a $-1$ si no.

• *Diagrama de Euler o de Euler-Venn.* — A fin de ilustrar los razonamientos lógicos, Euler utilizó, medio siglo antes de Venn, círculos que simbolizan, en lenguaje actual, conjuntos. V. VENN.

• *Ecuación de Euler.* — Ecuación diferencial del tipo:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = f(x).$$

Para resolverla, hay que remitirse a una ecuación lineal mediante el cambio de variable $u = \text{Log } |x|$. Asimismo, se denominan ecuaciones de Euler numerosas ecuaciones diferenciales cuyas soluciones dio Euler.

• *Ecuación de Euler o de Euler-Lagrange.* — Ecuación que está en la base del círculo de variaciones; sean:

$$F : (x, y, y') \mapsto F(x, y, y')$$

una función numérica de clase $C^2$ sobre $[\![a, b]\!] \times \mathbf{R}^2$ y $f$ una función numérica de clase $C^2$ sobre $[\![a, b]\!]$, verificando $f(a) = \alpha$ y $f(b) = \beta$. Para que $f$ haga máxima o mínima la integral:

$$\int_a^b F(x, f(x), f'(x))dx$$

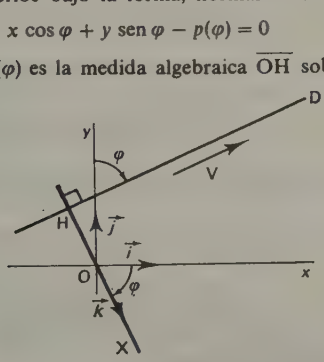
es preciso que $f$ verifique la ecuación de Euler:

$$F'_y(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}[F'_{y'}(x, f(x), f'(x))] = 0.$$

• *Ecuación bajo la forma normal de Euler de una recta* D. — Sean $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un sistema de referencias ortonormado, $\vec{V}$ un vector director de una recta D y H la proyección de O sobre D. Se plantea $\varphi = (\widehat{\vec{j}, \vec{V}})$. La ecuación cartesiana de D se escribe bajo la forma, normal de Euler:

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p(\varphi) = 0$$

donde $p(\varphi)$ es la medida algebraica $\overline{OH}$ sobre el eje $(O, \vec{k})$ tal que $(\widehat{\vec{i}, \vec{k}}) = \varphi$.



• *Función indicatriz de Euler.* — Sinónimo de indicador de Euler.

• *Fórmulas de Euler:*

1) Sean $R_1$ y $R_2$ los radios de curvatura principales de una superficie en un punto M de una superficie y R el radio de curvatura de una sección de la superficie por un plano normal P en M. La fórmula de Euler afirma que:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2}$$

donde $\varphi$ es el ángulo que forma el plano normal P con el plano normal $P_1$, cuya sección con la superficie tiene por radio de curvatura $R_1$.

2) Si $f$ es una función homogénea de grado $r$ de dos variables $x$ e $y$, admitiendo derivadas parciales continuas, la fórmula de Euler afirma que:

$$x f'_x(x, y) + y f'_y(x, y) = r f(x, y).$$

3) $e^{i\pi} = -1$: fue durante mucho tiempo considerada como el fin de las matemáticas porque da una relación simple entre los números más «misteriosos» 1, $i$, $\pi$ y $e$.

4) Para $z \in C$, tenemos:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = \cos iz \quad \text{y} \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = -i \operatorname{sen} iz.$$

5) V. también EULER (Relación de).

• *Fórmulas de Euler-Fourier.* — V. FOURIER (Coeficientes de).

• *Fórmulas de Euler-Mac Laurin.* — Permiten el cálculo de integrales definidas, así como el cálculo de sumas finitas. Sea una función $f$ real $2n + 2$ veces continuamente derivable sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$. La función $f$ verifica la fórmula de Euler-Mac Laurin:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k B_k}{(2k)!}(b-a)^{2k}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_n.$$

Poniendo:

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}}{(2n+2)!}(b-a)^{2n+3} f^{2n+2}(c) \quad \text{donde } c \in [\![a, b]\!].$$

Si $a$ y $b$ son dos enteros, se obtiene la fórmula sumatoria de Euler-Mac Laurin:

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(t)\,dt + \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + r_n.$$

Siendo el resto $r_n$ tal que:

$$|r_n| \leqslant \frac{(n+1/2)\,B_n}{(2n+1)!} \int_a^b |f^{(2n+1)}(t)|\,dt.$$

En estas fórmulas $B_k$ representa los números de Bernoulli.

• *Identidad de Euler.* — Sea $s$ un real estrictamente superior a 1. La identidad de Euler afirma que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty}$ significa «suma para todos los enteros $n$ sucesivos», y donde $\prod_{p=2}^{\infty}$ significa «producto para todos los números primos $p$ sucesivos». Esta identidad, todavía válida en el caso de que $s = a + ib$ es un número complejo tal que $a$ sea estrictamente superior a 1, condujo a Riemann al estudio de la función $\zeta(s)$ que lleva su nombre.

• *Indicador de Euler en un entero* $n \in \mathbf{N}^*$. — Número $\varphi(n)$ de números primos con $n$, inferiores a $n$. Es igual a:

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_r^{\alpha_r}$ es la descomposición de $n$ en factores primos.

• *Integrales de Euler.* — Nombre dado a las funciones eulerianas beta y gamma.
V. EULERIANAS.

• *Métodos de Euler:*

1) Método de resolución de la ecuación algebraica de cuarto grado:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

2) Método de resolución de las ecuaciones diferenciales sin segundo miembro y de coeficientes constantes.

• *Puntos de Euler de un triángulo.* — Entre los nueve puntos del círculo de Euler, tres están situados en las alturas del triángulo a igual distancia del ortocentro y de cada vértice. Estos tres puntos son denominados los puntos de Euler del triángulo.

• *Problema de Euler.* — Construir un triángulo conociendo el centro I del círculo inscrito, el centro de gravedad G y el ortocentro H.

• *Problema de los 36 oficiales de Euler.* — V. OFICIALES.

• *Recta de Euler de un triángulo.* — Recta que pasa por el centro O del círculo circunscrito, por el centro de gravedad G, por el ortocentro H y por el centro del círculo de Euler.

• *Relación de Euler para una representación celular de un grafo.* — Sean $n$, $m$ y $f$ los números de vértices, de aristas y de caras de una representación celular de un grafo conexo G sobre una superficie $\Sigma$ de característica $c$. Estos números verifican la relación $n - m + f = c$, llamada relación o fórmula de Euler. En el caso particular de un grafo planario representado celularmente sobre un plano o una esfera tenemos: $n - m + f = 2$.

• *Relación de Euler en un triángulo.* — El radio R del círculo circunscrito al triángulo, el radio $r$ del círculo inscrito y la distancia $d$ entre los centros de esos círculos verifican la relación $d = R^2 - 2rR$ llamada relación o fórmula de Euler.

• *Sumas de Euler de una sucesión.* — V. EULER (Transformación de).

• *Teoremas de Euler:*

1) Si $n$ y $a$ son dos enteros primos entre sí tales que $n > 1$, entonces $n$ divide $a^{\varphi(n)} - 1$, donde $\varphi(n)$ es el indicador de Euler de $n$. Este resultado generaliza un teorema de Fermat.

2) Si $\alpha$ es un real (racional o irracional), la función $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ es desarrollable en serie entera para todo real $x$ tal que $|x| < 1$ y:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)x^n + \ldots}{n!}$$

Esta última fórmula generaliza el desarrollo del binomio de Newton.

3) Un grafo conexo es euleriano si y solamente si el número de sus vértices de grado impar es 0 ó 2.

• *Teorema de Descartes-Euler.* — V. DESCARTES.

• *Transformación de Euler para ciertas ecuaciones en derivadas parciales.* — Transformación que permite simplificar la ecuación:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (\alpha + \beta)\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

remitiendo su resolución a la de una ecuación de la forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \lambda\, \partial \mu} = \mathrm{F}\left(\lambda,\ \mu,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda},\ \frac{\partial z}{\partial \mu}\right)$$

donde no figura más que una derivada segunda.

• *Transformaciones de Euler por las series.* — Sea E el espacio vectorial de las sucesiones de números reales. La aplicación lineal A de E en E que, a toda sucesión de término general $x_n$ asocia la sucesión de término general $A(x_n) = x_n + x_{n+1}$, se llama transformación de Euler de las sucesiones. Para $n \geqslant 0$ el número real:

$$\frac{A^n(x_0)}{2^n} = \frac{1}{2^n}[x_0 + \binom{n}{1}x_1 + \cdots + \binom{n}{i}x_i + \cdots + \binom{n}{n}x_n]$$

se llama suma de Euler de la sucesión $(x_n)_{n\geqslant 0}$ Si la sucesión $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge, la sucesión $\left(\frac{\Delta^n(x_0)}{2^n}\right)$ converge también y tiene igual límite. Si la serie $\sum'_{n\geqslant 0} x_n$ converge, la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\Delta^n(x_0)}{2^{n+1}}$ converge también y tiene igual límite.

## Euleriana

• *Cadena euleriana de un grafo sin rizo.* — Cadena que pasa una vez y una sola por cada arista del grafo.

• *Función euleriana de primera especie o función gamma.* — Función real de variable real definida para $x > 0$ por $\Gamma(x) \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$. Verifica la igualdad $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Para $x$ entero natural, tenemos: $\Gamma(x) = (x-1)!$
Admite una prolongación analítica sobre $\mathbf{C} - \{-n;\ n \in \mathbf{N}\}$.
V. COMPLEMENTOS (Fórmula de los), DUPLICACIÓN (Fórmula de), GAUSS (Fórmula de), WALLIS (Integral de), WEIERSTRASS (Fórmula de).

• *Función euleriana de segunda especie o función beta.* — Función B definida sobre $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ a partir de la función euleriana $\Gamma$ por la fórmula:

$$\mathrm{B}(u,\ v) = \frac{\Gamma(u)\cdot\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

## Eulerianas

• *Funciones eulerianas.* — Funciones beta y gamma (V. EULERIANA).

• *Integrales eulerianas.* — Sinónimo de funciones eulerianas.

## Euleriano

• *Ciclo (resp. camino, circuito) euleriano de un grafo.* — Ciclo (resp. camino, circuito) que utiliza una vez y sólo una todas las aristas del grafo.

• *Grafo euleriano.* — Grafo conexo que posee una cadena euleriana.
V. EULER (Teoremas de), SIETE puentes de Koenisberg.

## Evaluación

• *Función de evaluación.* — Sea $\mathscr{E}$ un conjunto de funciones todas ellas definidas sobre un conjunto E y con valores en un conjunto F. La aplicación de $\mathscr{E} \times \mathrm{E}$ en F definida por $(f, x) \mapsto f(x)$ se llama función de evaluación relativa a $\mathscr{E}$ y E.

## Eventualidad

Dado un espacio probabilizable $(\Omega, \mathscr{A})$, se llama eventualidad (o resultado posible o también caso posible) a un elemento de $\Omega$.

## Evoluta

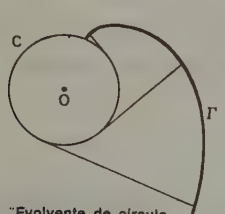
• *Evoluta de una curva plana.* — Evolvente de las normales de esta curva. Es igualmente el lugar de sus centros de curvatura. La evoluta de un círculo está reducida al centro de ese círculo.

## Evolutivos

• *Juegos evolutivos.* — Tras los trabajos de von Neumann sobre los autómatas, Ulam y Conway introdujeron modelos abstractos, llamados juegos evolutivos para tratar de describir la evolución de una población que pasa del instante $t$ al instante $t + 1$. El más popular es el juego de la vida (V. VIDA).

## Evolvente

• *Evolvente de una curva plana* C. — Curva $\Gamma$ cuya C es la evoluta. Si se imagina un hilo enrollado alrededor de un círculo, la extremidad del hilo describe, cuando se desarrolla quedando tenso todo lo demás, una evolvente de círculo.



Evolvente de círculo

## Exa

V. MÚLTIPLE.

## Exacta

• *Forma diferencial exacta.* — Una $p$-forma diferencial $\omega$ es exacta sobre un abierto U de un espacio de Banach E si existe una $(p - 1)$ forma diferencial $\alpha$

cuya diferencial exterior $d\alpha$ sea igual a $\omega$. Una 1-forma diferencial es exacta sobre U si admite una primitiva sobre U.

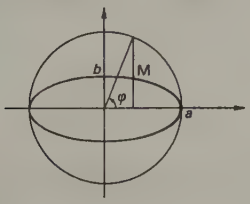
• *Sucesión exacta de* A-*módulos.* — Dados unos A-módulos X, Y, Z y unas aplicaciones lineales $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$, se dice que $X \to Y \to Z$ es una sucesión exacta de Y si $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
V. CADENA.

## Excéntrica

• *Anomalía excéntrica de un punto* M *de una elipse.* — Sea una elipse de ecuación cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Para cada punto $M(x, y)$ de la elipse existe un único número real $\varphi \in [\![0, 2\pi[\![$ tal que $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ y $\frac{y}{b} = \operatorname{sen}\varphi$. El número real $\varphi$ se llama la anomalía excéntrica o ángulo de anomalía de M. Permite la representación paramétrica de la elipse $x = a\cos\varphi$, $y = b\operatorname{sen}\varphi$, donde $\varphi \in [\![0, 2\pi[\![$.




## Excéntricas

Contrario de concéntrica.

## Excentricidad

• *Excentricidad de una cónica propia.* — V. CÓNICA.

## Exceso

• *Aproximación por exceso.* — V. APROXIMACIÓN.

• *Exceso esférico.* — V. ESFÉRICO.

## Excluido

• *Principio del tercio excluido.* — Afirma que para toda proposición P la proposición [P o (no-P)] es verdadera.

## Exclusión

• *Principio de exclusión-inclusión.* — Sean $n$ conjuntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, tenemos:

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} A_i - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Card}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

También se llama así a la igualdad de Poincaré en probabilidad.
V. POINCARÉ.

## Exclusiva

• *Disjunción exclusiva.* — Conector «o exclusivo» también llamado alternativa.
V. EXCLUSIVO.

## Exclusivo

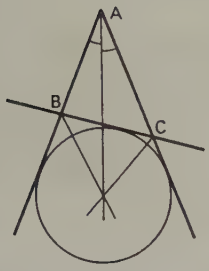
• *O exclusivo.* — Conector notado a veces w. La proposición A w B es verdadera si A o bien B es verdadera, pero no los dos; así A w B es una abreviatura de $\neg(A \Leftrightarrow B)$.

| A | B | AWB |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Un elemento $x$ pertenece a $E \Delta F$ si y solamente si $(x \in E)$ w $(x \in F)$.

## Exinscrito

• *Círculo exinscrito en el sector angular* (AB, AC) *de un triángulo* ABC. — Círculo tangente a las tres rectas AB, BC, AC y cuyo centro es el punto de concurrencia de la bisectriz interior en A y de las bisectrices exteriores en B y C. Un triángulo admite tres círculos exinscritos.
V. FEUERBACH (Teorema de).




## Existencial

• *Símbolo existencial.* — V. PREDICADOS.

• *Cuantificador existencial de una variable* $x$. — El ensamblaje $\exists\, x$. Se lee: «existe $x$ tal que».
V. PREDICADOS (Cálculo de).

## Exociclo

Sinónimo de hiperciclo.

## exp

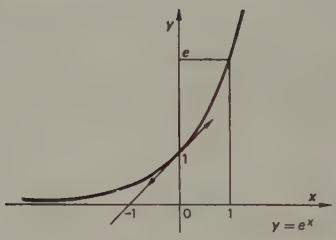
Abreviación utilizada a veces para la exponencial de base $e$.

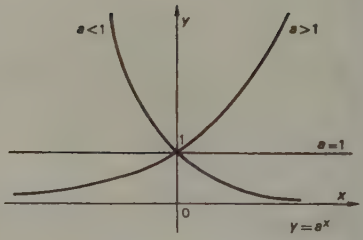
## Exponenciación

Ley de composición interna sobre $\mathbf{R}_+^*$ definida por $(a, b) \mapsto a^b$, donde $a^b$ es la imagen de $b$ por la exponencial de base $a$. Esta expresión se emplea a veces, por analogía, para otras leyes de composición.

## Exponencial

• *Exponencial de base* $a \in \mathbf{R}_+^*$ *(procede de la palabra exponente).* — Se llama así a la única función continua $f$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}_+^*$ que verifica $f(x + x') = f(x)f(x')$ para todo $x$ y $x'$ reales y $f(1) = a$. La restricción de $f$ en $\mathbf{Q}$ es la función potencia $n \mapsto a^n$. Por esta razón, la imagen por $f$ de un número real $x$ es denotada $a^x$ y se lee «$a$ potencia $x$». Las funciones exponenciales de base $a$ y logaritmo de base $a$ son recíprocas una de otra; así, la función $x \mapsto e^x$ es la función recíproca del logaritmo neperiano: $\mathrm{Log}(e^x) = e^{\mathrm{Log}\,x} = x$. Cuando no se precisa la base, la exponencial designa la función $x \mapsto e^x$. Una propiedad característica de la función $x \mapsto e^x$ es ser igual a su derivada. A veces se escribe $\exp(x)$ en lugar de $e^x$.




• *Exponencial complejo.* — V. COMPLEJO.

• *Ley exponencial de parámetro* $\lambda > 0$. — Ley de una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de distribución viene definida por $F(x) = 0$ si $x < 0$ y $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geqslant 0$. La duración de vida de un átomo de un cuerpo radiactivo obedece a una ley semejante. La ley del $\chi^2$ con dos grados de libertad es una ley exponencial.

• *Número exponencial.* — Número de Bell.

## Exponente

En el grafismo $a^b$ se dice que la letra *b* está escrita en exponente con relación a la letra *a* y se lee «*a* exponente *b*» o «*a* potencia *b*». Se utiliza una escritura en exponente principalmente para simbolizar las funciones potencias o cuando hay la presencia de varios índices, así $\alpha_{ij}$ se escribe a veces $\alpha_i^j$ en álgebra lineal.
V. FRACCIONARIO, INDICE, POTENCIA.

## Extensión

• *Extensión de un cuerpo.* — Sinónimo de sobrecuerpo. Si K es un sub-cuerpo de K', se dice que K' es una extensión del cuerpo K.
V. ALGEBRAICO, CICLOTÓMICO, CUADRÁTICA, GALOISIANA, GRADO, TRANSCENDENTE.

• *Extensión de una muestra.* — Los valores tomados por un carácter cuantitativo sobre una muestra varían entre dos valores extremos $\alpha$ y $\beta$ ($\alpha < \beta$). La diferencia $\beta - \alpha$ se denomina la extensión de la muestra.

• *Conjunto definido por extensión.* — V. CONJUNTO.

## Extensiva

• *Aplicación extensiva de un conjunto ordenado* E *en sí mismo.* — Aplicación $f$ de E en E tal que $x \leqslant f(x)$ para todo elemento $x$ de E.

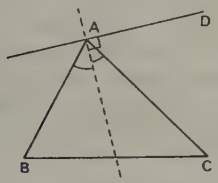
• *Forma extensiva de un juego.* — Por oposición a la forma normal de un juego, se dice que un juego se juega bajo una forma extensiva si cada jugador no aplica una estrategia escogida en el punto de partida, sino que estudia en cada etapa del juego la decisión que va a adoptar. En realidad, la mayor parte de los juegos se juegan de esta forma. En teoría, es más interesante estudiarlos bajo su forma normal.
V. NORMAL.

## Exterior

• *Arco incidente hacia el exterior de un vértice x de un grafo.* — Arco que admite $x$ como extremidad inicial.

• *Arco incidente hacia el exterior de un conjunto* B *de vértices de un grafo* G. — Arco cuya extremidad inicial pertenece a B y cuya extremidad terminal no pertenece a B.

• *Bisectriz exterior de un triángulo* ABC *en* A. — Recta D perpendicular en A a la bisectriz interior en A. La bisectriz interior y la bisectriz exterior en A constituyen las bisectrices de las rectas AB y AC.
V. EXINSCRITO (Círculo).




• *Diferencial exterior de una forma diferencial.* — Sean E y F dos espacios de Banach y $\mathscr{A}_n(E, F)$ el conjunto de las aplicaciones $n$-lineales alternadas continuas de $E^n$ en F. A toda $p$-forma diferencial $\omega$ definida sobre un abierto U de E con valores en $\mathscr{A}_p(E, F)$ se puede hacer corresponder una $(p+1)$-forma diferencial $d\omega$ de U en $\mathscr{A}_{p+1}(E, F)$ de manera que:

1) si $f$ designa una función de E hacia F diferenciable sobre U y $\alpha$ una forma diferencial, $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fda$;

2) si $\alpha$ y $\beta$ son dos formas diferenciales, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, donde $p$ es el grado de $\beta$;

3) para toda forma diferencial $\alpha$ tenemos $d(d\alpha) = 0$.

La forma diferencial $d\omega$ se llama la diferencial exterior de $\omega$.

• *Exterior de una cónica.* — Conjunto de puntos de un plano de donde se pueden trazar dos tangentes distintas a la cónica. Para un círculo de centro O y de radio R, coincide con el conjunto de los puntos de M cuya distancia a O es estrictamente superior a R.

• *Exterior de una curva plana cerrada de Jordan.* — V. JORDAN (Teorema de).

• *Exterior de una parte* P *de un espacio topológico* E. — Conjunto de puntos exteriores de P. Es el interior del complementario de P en E.

• *Punto exterior a una parte* P *de un espacio topológico* E. — Punto de E tal que existe un entorno de este punto que no encuentra a P.

• *Producto exterior de dos aplicaciones multilineales alternadas.* — Sean E, F, G, H cuatro espacios de Banach sobre $K = R$ o $C$, $\Phi$ una aplicación bilineal continua de $F \times G$ en H, $f$ una aplicación $p$-lineal alternada de $E^p$ en F y $g$ una aplicación $q$-lineal alternada de $E^q$ en G. Se llama producto exterior de $f$ y $g$ relativamente a $\Phi$ a la aplicación $(p+q)$-lineal alternada de $E^{p+q}$ en H denotada $f \wedge g$ y definida por:

$$(f \wedge g)(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma)\, \Phi[f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}), g(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)})]$$

donde $\varepsilon(\sigma)$ es la signatura de $\sigma$ y donde la suma está extendida a todas las permutaciones $\sigma$ de $\{1, 2, 3, \ldots, p+q\}$ que verifican las condiciones:

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{y} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

Dos casos se utilizan particularmente: el de $F = K$, $G = H$ y donde $\Phi$ es el producto de un vector de G por un escalar de K, y el de $E = F = G = H$ y donde $\Phi$ es la multiplicación del cuerpo K.

• *Producto exterior de dos formas diferenciales.* — Sean E, F, G, H cuatro espacios de Banach sobre $K = R$ o C. Si $\alpha$ es una $p$-forma diferencial sobre un abierto U de E con valores en $\mathscr{A}_p(E, F)$ y si es una $q$-forma diferencial sobre U con valores en $\mathscr{A}_q(E, G)$ se llama producto exterior de $\alpha$ y $\beta$ la $(p+q)$-forma diferencial, denotada $\alpha \wedge \beta$ de U en $\mathscr{A}_{p+q}(E, H)$ definida por $x \to \alpha(x) \wedge \beta(x)$, donde $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ es el producto exterior de las aplicaciones multilineales alternadas $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ relativamente a una aplicación bilineal $\Phi$ de $F \times G$ en H.

• *Producto exterior o producto vectorial de* $(n-1)$ *vectores* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ *de un espacio vectorial euclidiano orientado* E *de dimensión* $n$. — El único vector $a \in E$ tal que para todo $y \in E$ el producto mixto $(x_1, x_2, x_{n-1}, y)$ sea igual al producto escalar $(y|a)$. Se escribe $a = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$. En el caso en que $E = \mathbf{R}^3$, el producto exterior de dos vectores verifica:

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}; \qquad \vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}$$

$$(\alpha \vec{U}) \wedge \vec{V} = \alpha(\vec{U} \wedge \vec{V});$$

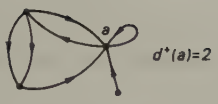
$$\vec{U} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{W}) = (\vec{U} \,.\, \vec{W})\vec{V} - (\vec{U} \,.\, \vec{V})\vec{W}$$

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\| \, |\operatorname{sen} \widehat{(\vec{U}, \vec{V})}|.$$

Los vectores de una base ortonormada directa $B + (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ verifican: $\vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{k}$, $\vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{i}$ y $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$. Si $\vec{U}$ y $\vec{V}$ tienen respectivamente por coordenadas $(x, y, z)$ y $(x', y', z')$ en la base B, el vector $\vec{U} \wedge \vec{B}$ tiene por coordenadas $(yz' - y'z, zx' - xz', xy' = -x'y)$.

V. JACOBI (Identidad de), MIXTO (Producto).

• *Semi-grado exterior de un vértice* $x$ *de un grafo.* — Cardinal $d^+(x)$ del conjunto $\Gamma^+(x)$ de sucesores de $x$; es también el número de arcos incidentes con $x$ hacia el exterior.




## Exteriores

• *Angulos exteriores de un polígono.* — V. ANGULOS (de un polígono).

## Externa

• *Ley de composición externa.* — Acción de un conjunto sobre otro. V. ACCIÓN.

## Externos

• *Angulos alternos externos.* — V. ALTERNOS.

## Extracción

• *Extracción de una raíz cuadrada.* — V. CUADRADA (Raíz).

## Extraída

• *Sucesión extraída de una sucesión* $(x_n)_{n\geq 0}$ — Sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$, donde $k \mapsto n$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros.

## Extraños

• *Elementos extraños.* — Dos elementos de un anillo conmutativo unitario son extraños (o primos entre sí) si sus divisores comunes son las unidades del anillo. En **Z** dos enteros positivos son extraños si su MCD es 1. El entero 30 es el mayor entero tal que todos los enteros que le son inferiores y extraños son primos.
V. BACHET, BÉZOUT, GAUSS (Lema de).

• *Ideales extraños.* — V. COMAXIMALES.

## Extremal

• *Elemento extremal de un anillo conmutativo.* — Se emplea a veces por elemento irreductible.

## Extremidad

- *Extremidad de un arco de un grafo.* — Nombre dado, por oposición a origen, a la extremidad terminal del arco.
- *Extremidad inicial (resp. terminal) de un arco de un grafo.* — V. Arco.
- *Extremidad de un bipunto* (A, B). — El punto B.
- *Extremidad de un camino* $\varphi : [\![0, 1]\!] \to E$. — El punto $\varphi(1)$.

## Extremidades

V. Intervalo, Segmento.

- *Extremidades de un arco de un grafo.* — V. Arco.
- *Extremidades de una arista* $[x, y]$ *de un grafo.* — Los vértices $x$ e $y$.
- *Extremidades de un bipunto* (A, B). — Los puntos A y B.
- *Extremidades de un camino* $\varphi : [\![0, 1]\!] \to E^2$. — Los puntos $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$.

## Extremo

V. Inferior, Superior.

## Extremos

Expresión no matemática empleada para designar los términos $a$ y $d$ en la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. El producto de los extremos $a$ y $d$ es igual al producto de los medios $b$ y $c$.

## Extremum

Maximum o minimum.
V. Absoluto, Relativo.

# F

## F

• *Ley de* F. — Ley de Fisher-Snedecor.
V. FISHER.

## Factor

• *Factor de un producto.* — En un anillo el producto de dos elementos $a$ y $b$ se denota $a \,.\, b$ o $ab$, y los elementos $a$ y $b$ se llaman factores de este producto.

• *Factor directo de un módulo o de un espacio vectorial.* — V. DIRECTO.

• *Factor primo de un número.* — Divisor primo de ese número.

• *Factor primario de un número.* — V. PRIMARIO.

## Factorial

• *Análisis factorial.* — Análisis de los datos partiendo de la hipótesis de que existe un pequeño número de caracteres independientes, no directamente observables, que dan cuenta de las dependencias entre los caracteres estudiados.

• *Anillo factorial.* — Anillo conmutativo unitario íntegro del que todos los elementos no nulos y no inversibles se escriben en forma de producto de elementos irreductibles, siendo ese producto único salvo, tal vez, el orden y las unidades. Todo anillo principal es factorial. Si A es un anillo factorial, el anillo A[X] de los polinomios con coeficientes en A es igualmente factorial. Los anillos Z y K[X, Y, Z], donde K es un cuerpo conmutativo, son factoriales.

• Aplicación $f$ de N en N definida por $f(0) = 1$ y $f(n) = n \,.\, f(n-1)$ para $n \geqslant 1$. La imagen $f(n)$ de $n$ por $f$ se denota $n!$ (se lee «factorial $n$»). Los primeros valores son:

$$0! = 1; \quad 1! = 1; \quad 2! = 2 \,.\, 1 = 2;$$
$$3! = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6; \quad 4! = 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 24.$$

En líneas generales, $n! = n(n-1) \,.\, (n-2) \ldots 2 \,.\, 1$. Esta función que crece rapidísimamente, puesto que:

$$10! = 3.628.800 \quad \text{y} \quad 20! = 2.432.902.008.176.640.000,$$

interviene frecuentemente en los problemas de enumeración porque $n!$ es el número de permutaciones de un conjunto de $n$ objetos (o también el orden del grupo simétrico $S_n$).

## Factorización

Recomponer en factores.

• *Factorización en un anillo.* — La distribución de la multiplicación con relación a la adición permite escribir:

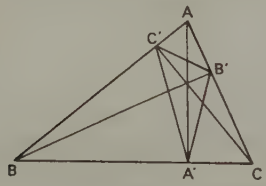
$$ab + ac = a(b + c) \quad \text{y} \quad ba + ca = (b + c) = a.$$

Se dice entonces que, en las sumas $ab + ac$ y $ba + ca$, el término $a$ se saca factor común.

## Fagnano, Giulio Carlo (Conde de) (1682-1766)

• *Fórmula de Fagnano.* — Afirma que $\pi = 2i \operatorname{Log} \frac{1 - i}{1 + i}$.

• *Problema de Fagnano.* — Construir un triángulo A'B'C' de perímetro mínimo inscrito en un triángulo acutángulo ABC dado. La solución de este problema es el triángulo órtico.




## Falsa

• (Usual) *Proposición falsa.* — Proposición para la que se posee un contraejemplo.
• (Lógica) *Proposición o fórmula falsa.* — Proposición o fórmula cuyo valor de verdad (V. VERDAD) es F.

## Falso

(Lógica.) *Valor de verdad del cálculo proposicional.*
V. CONTRADICCIÓN, VERDAD.

## Familia

• *Familia de elementos de un conjunto* E. — Una aplicación $f$ de un conjunto I en un conjunto E se llama a veces familia de elementos de E indizados por

I. La familia $f$ se denota entonces $(x_i)_{i\in I}$ y $x_i \in E$ designa la imagen por $f$ de $i \in I$ (se dice que $i$ es el índice de $x_i$). Una familia de elementos de E indizada por N es una serie de elementos de E.
V. FINITA, GENERATRIZ, LIBRE, LIGADA, ORTOGONAL, ORTONORMADA, ORTONORMAL, SUCESIÓN, SUMABLE, TOTAL.

• *Familia de partes de un conjunto* E. — Familia de elementos de $\mathfrak{P}(E)$. Así, un haz de círculos es una familia de partes de $\mathbf{R}^2$ indizadas por R.

## Farey, John (1766-1826)

• *Sucesión de Farey.* — Sucesión $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{5}, \ldots$ que da todos los racionales del intervalo $[\![0, 1]\!]$.

## Fase

• *Fase de una armónica.* — V. ARMÓNICA.

• *Fase de un movimiento rectilíneo sinusoidal de ecuación horaria* $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ *con* $a > 0$. — El real $\varphi$.

## Fases

• *Espacio de las fases.* — V. HAMILTON (Mecánica de).

## Fastos

• *Números fastos.* — Sinónimos de números afortunados.

## Feit, Walter (1930-2004)

• *Teorema de Feit-Thompson.* — Todo grupo simple finito no conmutativo es de orden par y todo grupo finito de orden impar es resoluble. Este teorema confirma una conjetura de Burnside; su demostración (300 p.) es una de las más largas de todas las matemáticas contemporáneas.

## Féjer, Léopold (1880-1959)

• *Integral de Féjer.* — Sea $f$ una función $2\pi$-periódica y de variación acotada; la suma de Césaro $\sigma_n$ de su serie de Fourier se expresa por la integral llamada de Féjer:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \frac{1 - \cos nt}{\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t\right)^2} dt.$$

Tenemos también:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t)] \left(\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen} t}\right)^2 dt.$$

• *Núcleo de Féjer.* — Función $t \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{2n \operatorname{sen}^2 (t/2)}$ que se encuentra en el cálculo de la integral de Féjer.

• *Sumas de Césaro-Féjer.* — Sumas de Césaro.

• *Teorema de Féjer.* — Sean $f$ una función $2\pi$-periódica y de variación limitada sobre un intervalo compacto I de **R** y $\sigma_n$ la suma de Césaro de índice $n$ de la serie de Fourier de $f$. Para todo número real $t$ de I, la sucesión $(\sigma_n(t))_{n \geqslant 0}$ converge hacia $\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$ y la convergencia es uniforme sobre todo intervalo cerrado contenido en un intervalo sobre el que $f$ es continua.

## Femto

V. MÚLTIPLE.

## Fenómeno

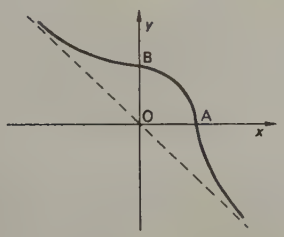
• *Fenómeno de Gibbs.* — V. GIBBS.

## Fermat, Pierre Simon de (1601-1665)

V. INFINITA (Método de la pendiente), PROBABILIDAD.

• *Conjetura de Fermat.* — Para $n \geqslant 3$, no existen enteros $x$, $y$, $z$ no nulos tales que $x^n + y^n = z^n$. Esta conjetura está en el origen de la teoría de los números algebraicos desarrollada en el siglo XIX. En 1978, sigue siendo un problema abierto aunque demostrado en el caso $n = 3$ y $n = 4$ por Fermat, Gauss y Euler para $n = 5$ por Legendre y Dirichlet, en 1825, para $n = 14$ por Dirichlet, en 1832, y para numerosas familias finitas de enteros $n$ (los mayores matemáticos han contribuido a ello: Legendre, Cauchy, Lebesgue, Lamé, Kummer, Kronecker, etc.). En 1908, F. P. Wolfskehl (de Darmstadt) ofrecía un premio de 100.000 marcos para la primera demostración completa de la conjetura. El monto de esa suma sigue existiendo, pero se ha devaluado completamente. Esta conjetura fue verificada en 1976 para todos los enteros $x$, $y$ y $z$ inferiores a 25.000, para todo entero primo $n < 125.000$ y para numerosas

familias infinitas de enteros (V. KUMMER (teorema de)). Señalemos que la conjetura de Fermat, demostrada para $n = 3$, puede expresarse de la manera siguiente: excepto los puntos A(1, 0) y B(0, 1), ningún otro punto de la cúbica de ecuación cartesiana $x^3 + y^3 = 1$ tiene sus coordenadas las dos racionales. La curva «se hilvana» a través del conjunto por todas partes denso de los puntos racionales.
V. PITÁGORAS (Ecuación de).




• *Ecuación de Fermat llamada también ecuación de Pell-Fermat.* — Ecuación diofantiana de incógnitas $x$ e $y$ de la forma $y^2 - ax^2 = \pm 1$, donde $a \in \mathbb{N}$. Fermat estableció que si $a$ no es un cuadrado en N admite una infinidad de soluciones.

• *Ecuación de Pell-Fermat.* — Ecuación de Fermat.

• *Gran teorema o último teorema de Fermat.* — Nombres dados a la conjetura de Fermat.

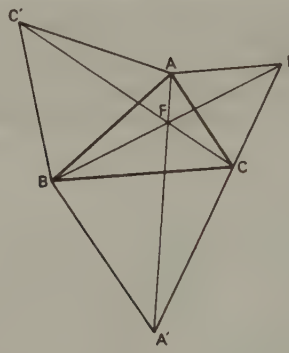
• *Número de Fermat.* — Número $F_n$ de la forma $2^{(2^n)} + 1 = 2^{2^n} + 1$, donde $n \in \mathbb{N}$. Todo número primo de la forma $2^k + 1$ es de hecho un número de Fermat, pero, inversamente, un número de Fermat no es necesariamente primo: $F_5 = 2^{2^5} + 1$ no es primo; es divisible por 641 (Euler). En 1974, los únicos números primos de Fermat conocidos (descubiertos por Fermat) son 3, 5, 17, 257 y 65.537. Corresponden a los valores 0, 1, 2, 3 y 4 de $n$. Para $5 \leqslant n \leqslant 16$, se ha verificado que los números obtenidos no eran primos. Se ignora si $F_{17}$ es primo o compuesto. El mayor número compuesto de Fermat conocido es $F_{1.945}$ (divisible por $5 \times 2^{1.947} + 1$). Es un número formado aproximadamente por $10^{582}$ cifras.
V. GRANDES (Números).

• *Número primo de Fermat.* — V. FERMAT (Número de).

• *Punto de Fermat de un triángulo* ABC. — Sean ABC', ACB' y BCA' los tres triángulos equiláteros construidos exteriormente al triángulo ABC. Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes en un punto F llamado punto de Fermat.

• *Problema de Fermat.* — Dado un triángulo ABC, hallar un punto M del plano que haga mínima la longitud AM + BM + CM. Este problema admite por solución el punto de Fermat.

• *Espiral de Fermat.* — Espiral parabólica.




• *Teoremas de Fermat:*

1) Si $p > 0$ es un número primo, cualquiera que sea el entero $n \in \mathbf{N}$ tenemos $n^p \equiv n \mod p$.

2) Sean $p$ un entero primo y $a$ un entero primo con $p$; entonces, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Este resultado fue generalizado por Euler: $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$ si $a$ y $n$ son extraños.

3) Todo entero $n \equiv 1 \mod 4$ es suma de dos cuadrados.

## **Feuerbach**, Karl Wilhelm (1800-1834)

• *Círculo de Feuerbach de un triángulo.* — Círculo de Euler también llamado círculo de nueve puntos.

• *Puntos de Feuerbach de un triángulo.* — Puntos de contacto del círculo de Euler con el círculo inscrito y los tres círculos exinscritos al triángulo.

• *Teorema de Feuerbach.* — El círculo de Euler de un triángulo es tangente al círculo inscrito y a los tres círculos exinscritos de ese triángulo.

## **Fibonacci** (o Leonardo de Pisa) (1175?-1240?)

Contracción de Filius Bonacci.

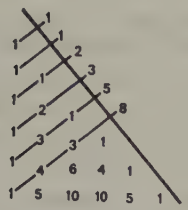
• *Números de Fibonacci.* — V. FIBONACCI (Series de).

• *Sucesiones de Fibonacci.* — Sucesiones de enteros $(u_n)_{n \geq 0}$ tales que para $n \geqslant 2$ el término $u_n$ sea la suma de los dos términos que lo preceden: $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Cuando se habla de la sucesión de Fibonacci se trata de la definida por $u_1 = u_0 = 1$; se verifica que:

$$u_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \text{ (fórmula de Binet).}$$

Los términos de esta sucesión, llamados números de Fibonacci, son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Verifican la igualdad $u_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ j \leq n}} \binom{i}{j}$ que permite hallarlos a partir del triángulo de Pascal.




La sucesión de relaciones de dos términos consecutivos $u_{n+1}/u_n$ converge hacia el número de oro. La sucesión de Fibonacci interviene en la demostración del décimo problema de Hilbert. V. SIMSON (Relación de).

## Fiel

• *Functor fiel.* — Un functor F de una categoría $\mathscr{C}$ en una categoría $\mathscr{D}$ se denomina fiel si para todo par (X, Y) de objetos de $\mathscr{C}$, la aplicación $f \mapsto F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X))$ es inyectiva.
V. CONCRETO, FIEL (Plenamente), PLENO.

• *Functor plenamente fiel.* — Un functor F de una categoría $\mathscr{C}$ en una categoría $\mathscr{D}$ se llama plenamente fiel si es pleno y fiel, es decir, si para todo par (X, Y) de objetos de $\mathscr{C}$, la aplicación $f \mapsto F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$ es biyectiva.

## Fields, J. C. (medallas)

Recompensa equivalente, en matemáticas, al premio Nobel, otorgada durante el Congreso Internacional de Matemáticas (cada cuatro años) y creada en 1936 en Oslo por el Pr J. C. Fields (1863-1932).

1936 L. V.Ahlfors y J. Douglas
1950 L. Schwartz y A. Selberg
1954 K. Kodaira y J-P. Serre
1958 K. F. Roth y R. Thom
1962 L. V. Hörmander y J. W. Milnor
1966 M. F. Atiyah; P. J. Cohen; A. Grothendieck y S. Smale
1970 A. Baker; H. Hironaka; S. P. Novikov y J. G. Thompson
1974 E. Bombieri y D. B. Mumford
1978 P. R. Deligne; C. L. Fefferman; G. A. Margoulis y D. G. Quillen
1982 A. Connes; W. P. Thurston y S-T. Yau
1986 S. Donaldson; G. Faltings y M. Freedman
1990 V. Drinfeld; V. Jones; S. Mori y E. Witten

1994 P-L. Lions; J-C. Yoccoz; J. Bourgain y E. Zelmanov
1998 R. Borcherds; T. Gowers; M. Kontsevich y C. McMullen
2002 L. Lafforgue y V. Voevodsky

## Fielmente

• *Operar fielmente.* — Un grupo G que opera sobre un conjunto E opera fielmente en E si, siendo $\alpha$ y $\beta$ dos elementos de G, la igualdad $\alpha x = \beta x$ para todo elemento $x$ de E implica $\alpha = \beta$.
V. OPERANTE.

## Figura

• *Figura constructible con la regla y el compás.* — V. CONSTRUCCIÓN.

• *Figura en un espacio afín* $\mathscr{E}$. — Parte de $\mathscr{E}$.
V. ASIMÉTRICA, CURVILÍNEA, INVARIANTE, PLANA, SIMÉTRICA.

## Figurado

• *Número figurado.* — Cardinal de un conjunto de puntos dispuestos regularmente sobre una figura geométrica. Según la figura, el número se llama triangular, cuadrado, poligonal, piramidal, etc. El estudio de estos números fue desarrollado por los pitagóricos. Si en la actualidad este capítulo de la aritmética ha dejado de ser una disciplina autónoma y no es ya objeto de investigaciones, condujo al descubrimiento de los números irracionales, así como al estudio de clases de números enteros, como los números triangulares, que intervienen en el análisis combinatorio, las probabilidades, etc.
V. ARITMO-GEOMETRÍA, PIRAMIDALES (Números), POLIGONALES (Números).

## Figuras

• V. CONGRUENTES, HOMOTÉTICAS, INVERSAS, ISOGONAS, ISÓTOPAS, REULEAUX, SEMEJANTES, SIMÉTRICAS, VECTEN.

• *Figuras iguales.* — V. DIRECTAMENTE, IGUALDAD, INVERSAMENTE.

• *Figuras isométricas.* — V. DIRECTAMENTE, IGUALDAD, INVERSAMENTE, ISOMÉTRICAS.

## Fijo

• *Punto fijo por una aplicación f de* E *en* E. — Elemento $x$ de E tal que $f(x) = x$. Se llama igualmente punto doble para $f$ o punto invariante por $f$.

• *Teorema del punto fijo.* — Una aplicación contractiva $f$ de un espacio métrico completo E en el mismo admite un punto fijo único $a$. Además, toda sucesión $(x_n)_{n \geq 0}$ de elementos de E definida por $x_{n+1} = f(x_n)$ es convergente y

admite $a$ como límite. Este teorema es fundamental en análisis numérico, donde proporciona métodos de cálculo por aproximaciones sucesivas.
V. APROXIMACIONES.

• *Teorema del punto fijo de Brouwer.* — V. BROUWER.

## Filtrante

• *Conjunto filtrante.* — Un conjunto ordenado E se denomina filtrante a derecha (resp. a izquierda) si toda parte de E de dos elementos es mayorada (resp. minorada). El conjunto de partes de un conjunto, ordenado por la inclusión es filtrante a derecha y a izquierda. Se dice que es filtrante.

## Filtro

Conjunto no vacío $\mathscr{F}$ de partes de E tal que:
1) toda parte de E que contiene un elemento de $\mathscr{F}$ pertenece a $\mathscr{F}$;
2) la intersección de un número finito de elementos de $\mathscr{F}$ pertenece a $\mathscr{F}$;
3) la parte vacía $\varnothing$ no pertenece a $\mathscr{F}$.
Los dos ejemplos más frecuentes son el filtro de entornos de una parte de un espacio topológico y el filtro de Fréchet.
V. ULTRAFILTRO.
Esta noción, introducida por Henri Cartan para esclarecer y unificar las nociones de convergencia en los diferentes espacios topológicos, es una herramienta eficaz utilizada ahora en dominios distintos a la topología, por ejemplo, en lógica y en álgebra de Boole; los ideales del anillo de Boole que corresponden a un retículo de Boole son filtros de T.
V. BASE, CONVERGENCIA, FIN, FRÉCHET, LÍMITE.

• Conjunto ordenado E tal que toda parte $\{x, y\}$ de E con dos elementos admite un extremo inferior (notado $x \wedge y$) y un extremo superior (notado $x \vee y$). Ordenado por inclusión, el conjunto (X) de las partes de un conjunto X es un filtro por el cual $A \wedge B = A \cap B$. El conjunto $\mathbf{N}^*$ ordenado por la divisibilidad es un filtro para el cual $x \wedge y = \mathrm{MCD}(x, y)$ y $x \vee y = \mathrm{MCM}(x, y)$. Para un filtro E las aplicaciones de $E^2$ en E definidas por $(x, y) \mapsto x \wedge y$ y $(x, y) \mapsto x \vee y$ son dos leyes de composiciones internas sobre E que son conmutativas, asociativas e idempotentes. Además son absorventes una con relación a otra: $x \wedge (x \vee y) = x$ y $x \vee (x \wedge y) = x$, para todo $(x, y) \in E^2$.
V. BOOLE, COMPLEMENTADO, COMPLETO, DISTRIBUTIVO, MODULAR.

• *Semi-filtro.* — V. INFERIOR, SUPERIOR.

## Fina

• *Topología más fina (o menos fina) que otra.* — Sean $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ dos topologías de un conjunto E definidas por los abiertos. Se dice que $\mathcal{O}_1$ es menos fina que $\mathcal{O}_2$ (o que $\mathcal{O}_2$ es más fina que $\mathcal{O}_1$) si todo abierto de $\mathcal{O}_1$ es un abierto de $\mathcal{O}_2$. Se dice también que $\mathcal{O}_1$ es más débil que $\mathcal{O}_2$ o que $\mathcal{O}_2$ es más fuerte que $\mathcal{O}_1$. La topología grosera es la topología menos fina y la topología discreta es la topología más fina que se puede poner sobre un conjunto E.

## Final

• *Sección final de un conjunto ordenado* E. — Sea $a$ un elemento de E. El conjunto $[a, \rightarrow[$ de los elementos de E superiores a $a$ se llama sección final cerrada de origen $a$. El conjunto $]a, \rightarrow[$ de los elementos de E estrictamente superiores a $a$ se denomina sección final abierta de origen $a$.

## Finita

• *Espacio vectorial de dimensión finita.* — V. DIMENSIÓN.

• *Familia finita.* — Familia de la que el conjunto de índices es finito.

• *Familia localmente finita.* — Una familia $(F_i)_{i \in I}$ de partes de un espacio topológico E es localmente finita si, cualquiera que sea el punto $x$ de E, existe un entorno V de $x$ tal que $V \cap F_i$ sea no vacío para un número finito de índices $i \in I$.

• *Sucesión finita.* — Familia indizada por una parte finita de N.

• *Teorema de la base finita.* — Nombre dado al teorema de Hilbert que se enuncia en términos actuales: un anillo de polinomios $A[X]$ de coeficientes en un anillo noetheriano A es él mismo noetheriano. Esta apelación procedía del hecho de que en esa época la palabra «base» designaba lo que en la actualidad se denomina «parte generatriz».

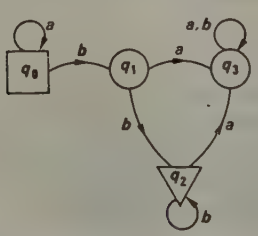
• *Valor finito.* — V. INFINITO.

## Finito

Empleado por oposición a infinito.

• *Anillo finito.* — Anillo cuyo número de elementos es finito; ejemplo: $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ para todo $n \in \mathbf{N}^*$.

• *Autómata finito.* — Quintuplete $(q_0, Q, F, X, \delta)$, donde Q es un conjunto finito llamado conjunto de los estado, $q_0$ un elemento de Q llamado estado inicial, F una parte de Q llamada conjunto de los estados finales, X un conjunto finito llamado alfabeto y $\delta$ una función de $Q \times X$ en Q llamada función de transiciones. Un autómata finito puede representarse mediante un grafo cuyos vértices son los estados y cuyos arcos indican las transiciones. La función $\delta$ se prolonga a $Q \times X^*$, poniendo $\delta(q, fa) = \delta(\delta(q, f), a)$ para $f \in X^*$, $a \in X$ y $q \in Q$. Una palabra $f$ es reconocida por el autómata si y solamente si $\delta(q_0, f) \in F$. El autómata que a continuación exponemos reconoce las palabras de la forma $a^n b^2 b^p$, donde $n \in \mathbf{N}$ y $p \in \mathbf{N}$.




$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$F = \{q_3\}$
$X = \{a, b\}$

• *Cardinal finito.* — Cardinal $\alpha$ tal que $\alpha \neq \alpha + 1$; puede decirse que un cardinal es finito si es un ordinal finito o también que Card(E) es finito si y solamente si el conjunto E es finito. Los cardinales finitos se denominan los enteros naturales; su colección es un conjunto. Cuando E es un conjunto finito, Card(E) es su número de elementos.

• *Conjunto finito.* — Conjunto E tal que no existe inyección no sobreyectiva de E en E. El cardinal de un conjunto finito es el número de elementos de ese conjunto.

• *Cuerpo finito.* — Cuerpos cuyo número de elementos es finito. Sean $p > 0$ un entero primo y $q = p^n$ una potencia de $p$. El único cuerpo finito que tiene $q$ elementos se denota $\mathbf{F}_q$; es de característica $p$, es decir, contiene $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. V. WEDDERBURN.

• *Grafo finito.* — Grafo cuyo conjunto de vértices es finito.

• *Grupo finito.* — Grupo cuyo número de elementos es finito (no hay que confundirlo con grupo de tipo finito).

• *Grupo o módulo de tipo finito.* — Grupo o módulo engendrado por un número finito de elementos.

• *Ordinal finito.* — Ordinal $\alpha$ tal que todo ordinal no vacío e inferior a $\alpha$ posee un predecesor. Todo ordinal finito es un cardinal finito, por tanto, un entero natural. La colección de los ordinales finitos es un conjunto infinito numerable. Un ordinal que no es finito se llama ordinal infinito; ejemplo: los ordinales límites.

• *Recubrimiento localmente finito de un espacio topológico* E. — Recubrimiento $(F_i)_{i \in I}$ de E tal que la familia $(F_i)_{i \in I}$ sea localmente finita (V. FINITA).

## Finitos

• *Juegos finitos.* — Juegos para los que cada jugador no tiene más que un número finito de alternativas en cada jugada y que concluyen en un número finito de jugadas. En la práctica, los números de alternativas y de jugadas pueden ser grandísimos: el juego de ajedrez es un juego finito.
V. ESTRICTA (Juegos con determinación).

• *Teorema de los incrementos finitos.* — Consecuencia importante del teorema de Rolle: sea $g$ una función real definida y continua sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}$. Si $g$ es derivable sobre el intervalo abierto $]\!]a, b[\![$, entonces existe $c \in ]\!]a, b[\![$ tal que: $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$. Basta observar que la función $f$ definida por: $f(x) = g(x) - g(a) - (x - a)\dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

## Finitud

• (Lógica.) *Teorema de finitud.* — Teorema de compacidad.

## Fino

Sean $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ dos conjuntos cuyos elementos son partes de un conjunto E. Se dice que $\mathscr{E}_1$ es menos fino que $\mathscr{E}_2$ o que $\mathscr{E}_2$ es más fino que $\mathscr{E}_1$ si $\mathscr{E}_1$ está incluido en $\mathscr{E}_2$, es decir, si todo elemento de $\mathscr{E}_1$ es el elemento del $\mathscr{E}_2$. Por ejemplo, un filtro $\mathscr{F}_1$ se dice menos fino que un filtro $\mathscr{F}_2$ si $\mathscr{F}_1$ está incluido en $\mathscr{F}_2$.

## Fischer, B.

• *Bebé monstruo y monstruo de Fischer.* — Son los dos mayores grupos cíclicos conocidos en 1978; son, respectivamente, de orden:

$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47 \simeq 4{,}15\ 10^{33}$

y

$25^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \simeq$
$\simeq 8{,}08 \cdot 10^{53}$.

V. CÍCLICOS.

## Fischer, Ernst S. (1875-1959)

• *Teorema de Fischer-Riesz.* — Sobre $\mathscr{L}_2$ la relación $\mathscr{R}$ definida por $f \mathscr{R} g$, si $f - g$ es despreciable, es una relación de equivalencia. La semi-norma de la convergencia en media cuadrática es compatible con $\mathscr{R}$ en el sentido de que $\|f - g\|_2 = 0$ si y solamente si $f \mathscr{R} g$. Al plantear $\|f\|_2 = \|f\|_2$ para todo elemento $f$ de $L_2 = \mathscr{L}_2/\mathscr{R}$ se define una norma sobre $L_2$. El teorema de Fischer-Riesz afirma que el espacio $L_2$ provisto de esta norma es completo.

## Fisher, Sir Ronald Aylmer (1890-1962)

• *Coeficientes de Fisher.* — Coeficientes utilizados en estadística. El primero, $\gamma_1$, informa sobre la disimetría de la distribución de un carácter cuantitativo X, mientras que el segundo, $\gamma_2$, caracteriza el aplastamiento o la acuidad de la distribución de X con relación a una distribución de Laplace-Gauss que tiene igual media e igual varianza que la distribución estudiada. Son definidos por:

$\gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ y $\gamma_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ donde $\sigma$ es la desviación típica, $\mu_2$ y $\mu_4$ los momentos centrados de orden 3 y 4 de X.

• *Ley de Fisher-Snedecor.* — Sean X e Y dos variables aleatorias indepen-

dientes que obedecen a una ley de $\chi^2$ con $p$ grados de libertad para X y $q$ grados de libertad para Y. La ley de probabilidad de la variable $F = \frac{X}{Y} \times \frac{q}{p}$ se llama ley de Fisher-Snedecor (o ley de F). Su función de densidad es definida por $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ y por:

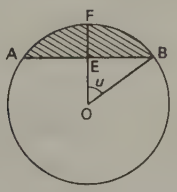
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \times p^{\frac{q}{2}} \times q^{\frac{p}{2}} \times \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(px+q)^{\frac{p+q}{2}}} \quad \text{si } x > 0.$$

• *Ley de Student-Fisher.* — V. STUDENT.

## Flecha

• V. ZENÓN DE ELEA (Paradojas de).

• *Flecha de un arco* $\overset{\frown}{AB}$ *sobre un círculo de centro* O *y de radio* R. — Segmento EF donde E es el punto medio de la cuerda AB y F el punto medio del arco $\overset{\frown}{AB}$. Tiene por soporte un diámetro perpendicular a la cuerda AB. Su longitud es $R(1 - \cos u)$, donde $u = \overset{\frown}{FOB}$.




## Flexaedros

Nombre recientemente dado a los poliedros flexibles de caras rígidas; el de Connelly posee 24 vértices, 66 aristas y 44 caras. Se ha demostrado que los flexaedros de 6 ó 7 vértices son imposibles. No se ha demostrado que el flexaedro de 8 vértices sea imposible. El récord actual es el flexaedro realizado por Klaus Steffen; tiene 9 vértices, 21 aristas y 14 caras.
V. BRICARD, CAUCHY, CONNELLY, FLEXIBLE.

## Flexágono

Estructuras de papel plegado que varían cuando se las hace flexionarse. «Parecen» simétricas. Feynmann introdujo sus modelos en teoría de física fundamental.

## Flexible

• *Poliedro o superficie flexible.* — Poliedro o superficie cuya forma se puede modificar sin modificar la longitud de ninguna de las curvas trazadas sobre él o sobre ella. El estudio de los poliedros y de las superficies flexibles es actualmente una fuente de investigaciones activas, principalmente después del descubrimiento, por Connelly, en 1977, de un poliedro flexible de caras rígidas (V. FLEXAEDRO) que de este modo refuta una conjetura de Cauchy (1831).
V. BRICARD, CAUCHY, CONNELLY, INFLEXIBLE, RÍGIDA.

## Flou

• *Sub-conjunto flou.* — Noción introducida recientemente con vistas a proporcionar a los utilizadores de las matemáticas una herramienta más ágil que la noción habitual de subconjunto. La idea de base consiste en observar que el dato de un subconjunto F de un conjunto E equivale al dato de su función característica que, por definición, no toma más que los valores 0 y 1.
Dar un subconjunto *flou* de un conjunto E es dar simultáneamente una parte F de E y una probabilidad, llamada grado de pertenencia, para que los elementos de E pertenezcan a F. Se observará que la noción de sub-conjunto *flou* no tiene sentido salvo cuando se ha fijado un conjunto al sentido habitual en el que se trabaja y que la noción de subconjunto es entonces un caso particular de la de subconjunto borroso, difuso.

## Fluctuación

Término ambiguo y en vías de desaparición, empleado en estadística tanto por desviación típica como por varianza.

## Fluente

Utilizado por Newton por «función».

## Flujo

• *Flujo de un campo de vectores a través de una superficie.* — V. OSTROGRADSKI (Teorema de).

• *Teorema de flujo-divergencia.* — Teorema de Ostrogradski.

## Fluxión

Utilizado por Newton para «derivada».

## Focal

- *Cuerda focal de una cónica.* — Cuerda que pasa por un foco.
- *Distancia focal de una cónica con centro.* — Distancia $c$ del centro de la cónica a uno de los dos focos que son simétricos en relación al centro.
- *Eje focal de una cónica propia.* — Eje de simetría de la cónica que pasa por el (o los) foco(s) de la cónica.
- *Eje no focal de una cónica de centro.* — Eje de simetría de la cónica perpendicular al eje focal.
- *Semi-eje focal de una cónica de centro.* — Número real denotado $a$, igual a la mitad de la distancia entre los vértices A y A′ de la cónica.
- *Semi-eje no focal de una elipse.* — Número real denotado $b$, igual a la semilongitud de la cuerda BB′ que tiene por soporte el eje no focal de la elipse. Si $c$ es la distancia focal y $a$ el semi-eje focal, el número real $b$ verifica $b^2 + c^2 = a^2$.
- *Semi-eje no focal de una hipérbola.* — Número real positivo $b$ tal que $b^2 = c^2 - a^2$, donde $c$ es la distancia focal y $a$ el semi-eje focal de la hipérbola.

## Focos

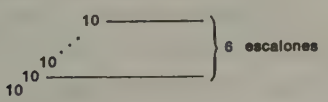
- *Focos de una cónica propia.* — V. CÓNICA.
- *Focos de una lemniscata.* — V. LEMNISCATA.
- *Focos de un óvalo.* — V. CASSINI, DESCARTES.

## Folium

- *Folium de Descartes.* — V. DESCARTES.

## Folkman, Jon H.

- *Número de Folkman.* — V. FOLKMAN (Teorema de).
- *Teorema de Folkman.* — Si un grafo no tiene 4-clique como sub-grafo y si, cualquiera que sea la coloración de sus aristas con la ayuda de dos colores, existe un triángulo monocromático, entonces el número de sus vértices es superior o igual a $10^{\overline{7!}}$. La notación $10^{\overline{7!}}$ representa el número:




llamado número de Folkman. Las ciencias experimentales no han producido jamás, hasta la fecha, números iguales o superiores al número de Folkman, pero la investigación teórica los ha encontrado mucho mayores.
V. GRANDES NÚMEROS.

## Fondo

• *Fondo de una superficie de ecuación cartesiana* $z = f(x, y)$. — Si la función $f$ admite un minimum relativo $z_0$ en $(x_0, y_0)$, el punto M de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ se llama un fondo de la superficie. Una condición suficiente para que $M(x_0, y_0, z_0)$ sea un fondo es que $f$ admita derivadas parciales segundas continuas en un entorno de $(x_0, y_0)$ y que se la tenga en $(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geqslant 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geqslant 0;$$

bajo estas hipótesis, el fondo M es un punto elíptico de la superficie.
V. MONTAÑOSO, PUERTO, VÉRTICE.

## Fontené, G. (1848-1923)

• *Teorema de Rouché-Fontené.* — V. ROUCHÉ.

## Forcing

Poderoso método de demostración utilizado en lógica formal. Fue inventado por P. Cohen (1963) para construir un modelo de la teoría de los conjuntos que verifican los axiomas de Zermelo-Fraenkel, en el que todo conjunto está bien ordenado y la hipótesis del continuo es falsa. Esto acababa la demostración de la independencia de la hipótesis del continuo con los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el axioma de la elección (V. GÖDEL). Después, este método ha sido desarrollado, especialmente por Robinson, para construir modelos de teoría que satisfacen a axiomas dados.

## Forma

Nombre dado a ciertas aplicaciones de un espacio vectorial sobre un cuerpo K y con valores en ese cuerpo.
V. BILINEAL, LINEAL, LORENTZ, MULTILINEAL, POLAR, CUADRÁTICA, SEMILINEAL, SESQUILINEAL.

• *Ecuación en forma normal de Euler de una recta.* — V. EULER.

• *Forma algebraica de un número complejo.* — V. ALGEBRAICA.

• *Forma cartesiana de un número complejo.* — Sinónimo de forma algebraica.

• *Forma diferencial de grado p o p-forma diferencial.* — V. DIFERENCIAL.

• *Forma extensiva (resp. normal) de un juego.* — V. EXTENSIVA, NORMAL.

• *Forma indeterminada de un límite.* — V. INDETERMINADA.

• *Forma n-lineal.* — Forma multilineal.

• *Forma reducida de una ecuación de tercer grado.* — V. REDUCIDA.

• *Forma trigonométrica de un número complejo.* — V. TRIGONOMÉTRICA.

• *Parámetros de forma de una serie estadística de carácter cuantitativo.* — Números que caracterizan la disimetría o el aplastamiento de la distribución del carácter. Ejemplos: coeficientes de Yule, de Fisher, de Pearson.

## Formal

• *Aritmética formal.* — Teoría lógica nacida de los trabajos de Frege que trata de dar una construcción formalizada de la aritmética. Se puede desarrollar dando los axiomas de predicados, una constante O, un predicado (la igualdad), tres funciones (adición, multiplicación, sucesor) y axiomas propios (puede limitarse a 9 axiomas suplementarios).

• *Demostración formal del cálculo de predicados.* — Se llama demostración formal de un enunciado $\mathscr{A}_n$ a una sucesión finita $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ de enunciados tal que cada $\mathscr{A}_i$ verifique por lo menos una de las condiciones siguientes:
1) $\mathscr{A}_i$ es un axioma;
2) existe $j < i$ y $h < i$ tales que $\mathscr{A}_h = \mathscr{A}_j \Leftrightarrow \mathscr{A}_i$;
3) $\mathscr{A}_i = \exists x(f^x) \Rightarrow \mathscr{A}$ y existe $j < i$ tal que $\mathscr{A}_j = (a/x)f^x \Rightarrow \mathscr{A}$, donde $\mathscr{A}$ es un enunciado y $f^x$ una fórmula cuantificable tales que $a$ no posee ocurrencia ni en $\mathscr{A}$ ni en $f^x$;
4) $\mathscr{A}_i = \mathscr{A} \Rightarrow \forall x(f^x)$ y existe $j < i$ tal que $\mathscr{A}_j = \mathscr{A} \Rightarrow (a/x)f^x$, donde $\mathscr{A}$ es un enunciado y $f^x$ una fórmula cuantificable tales que $a$ no posee ocurrencia ni en $\mathscr{A}$ ni en $f^x$.

• *Demostración formal del cálculo proposicional.* — Se llama demostración formal de un enunciado $\mathscr{A}_n$ a una sucesión finita $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ de enunciados tal que cada $\mathscr{A}_i$ verifica por lo menos una de las condiciones siguientes:
1) $\mathscr{A}_i$ es un axioma;
2) existe $j < i$, un enunciado $\mathscr{B}$ y una variable proposicional $u$ tales que $\mathscr{A}_i \; \mathscr{A}_i = (\mathscr{B} \mid u) \; \mathscr{A}_j$;
3) existe $j < i$ y $h < i$ tales que $\mathscr{A}_h = \mathscr{A}_j \Rightarrow \mathscr{A}_i$.

• *Gramática formal sobre un alfabeto.* — Una gramática formal sobre un alfabeto X viene dada por:
1) un alfabeto auxiliar Σ llamado no terminal (por oposición, el alfabeto X se llama terminal);
2) un conjunto finito de pares $(f_i, g_i)_{i \in I}$, donde $f_i$ y $g_i$ pertenecen al monoide libre $(X \cup \Sigma)^*$;
3) un elemento S de Σ llamado símbolo inicial o axioma.
Las parejas $(f_i, g_i)$, denotadas también $f_i \to g_i$, se llaman las reglas de la gramática. Las producciones de la gramática son las palabras de $(X \cup \Sigma)^*$ obtenidas según el procedimiento recursivo siguiente: S es una producción; si $xf_iy$, donde $x$ e $y$ pertenecen a $(X \cup \Sigma)^*$ es una producción, y si $(f_i, g_i)$ es una regla, entonces $xg_iy$ es una producción.
V. CHOMSKY.

• *Lenguaje engendrado por una gramática formal* G *sobre un alfabeto* X. — Conjunto L(G) de las producciones de la gramática que pertenecen a $X^*$.
V. CHOMSKY, KLEENE.

• *Polinomio formal.* — Sinónimo de polinomio, utilizado por oposición a función polinomio.
C. FORMAL (Serie).

• *Serie entera formal de coeficientes en un anillo conmutativo unitario* A.— sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ de elementos de A. Provisto de la adición definida por:

$$(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} = (a_n + b_n)_{n\geq 0}$$

y de la multiplicación definida por:

$$(a_n)_{n\geq 0} \cdot (b_n)_{n\geq 0} = (c_n)_{n\geq 0}$$

donde $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, el conjunto denotado A[[X]] de las series enteras formales es un anillo conmutativo unitario. Se denota $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ la serie entera $S = (a_n)_{n\geq 0}$. El anillo A[X] de los polinomios de coeficientes en A es isomorfo a un sub-anillo de A[[X]], al que se le identifica. Para que S sea inversible en A[[X]] es necesario y suficiente que $a_0$ sea inversible en A. Si A es íntegro, A[[X]] lo es también y su cuerpo de fracciones es denotado A((X)). Por definición, $A[[X_1, ..., X_n]] = A[[X_1, ..., X_{n-1}]][[X_n]]$ para $n \geq 2$.

## Fórmula

(Usual.) Nombre dado a ciertas igualdades o desigualdades notables.
V. BAYES, BERNSTEIN, BINET, BRAHMAGUPTA, BROUNKER, CARDAN, CARNOT, COMPLEMENTOS, CRAMER, DUPLICACIÓN, FAGNANO, GAUSS, GREEN, HADAMARD, HAUSDORFF, HÉRON, LEGENDRE, LEIBNIZ, MAC LAURIN, MOIVRE, NEWTON, NIVELES (de tres), OSTROGRADSKI, STIRLING, STOKES, TAYLOR, WALLIS, WEIERSTRASS.
V. también: IDENTIDAD, RELACIÓN.

• *Fórmula del cálculo de predicados.* — Ensamblaje que posee una formulación por lo menos.
V. FORMULACIÓN.

• *Fórmula de Green-Riemann.* — V. GREEN.

• *Fórmula integral de Cauchy.* — V. CAUCHY.

• *Fórmula de las probabilidades de las causas.* — Fórmula de Bayes.

• *Fórmula de las probabilidades compuestas.* — V. COMPUESTAS.

• *Fórmula de las probabilidades totales.* — V. TOTALES.

• *Fórmula cuantificable.* — V. CUANTIFICABLE.

• *Fórmula válida.* — V. VÁLIDA.

• *Fórmula de Viete.* — V. PI.

## Formulación

• *Formulación en cálculo de predicados.* — Se llama formulación de $f_n$ a una

sucesión finita $f_1, f_2, ..., f_n$ de ensamblajes tal que para cada ensamblaje $f_i$ una por lo menos de las condiciones siguientes se verifique:

1) $f_i$ es una fórmula cuantificable por una variable;
2) existe $j < i$ tal que $x$ no tiene ocurrencia en $f_j$ y tal que $f_i$ se obtenga sustituyendo $x$ por un individuo $a$ en $f_j$.

## Fórmulas

V. BINET, DELAMBRE, EULER, FRENET, MEDIA, MORGAN, NÉPER, PLÜCKER.

- *Fórmulas de Euler-Fourier.* — V. FOURIER (Coeficientes de).
- *Fórmulas de Euler-Mac Laurin.* — V. EULER.
- *Fórmulas de trigonometría.* — V. CIRCULAR, HIPERBÓLICA, ESFÉRICA.

## Fortran

Uno de los principales lenguajes algorítmicos de programación cuyo nombre es la contracción de «FORmulación TRANspuesta». De alto nivel, y muchas veces reformada de 1957 a 1964, va muy bien para los problemas científicos y técnicos. Considerado a menudo como más práctico que ALGOL, se adapta peor que este último al tratamiento de problemas específicamente matemáticos.

## Fortuitos

- *Números fortuitos.* — Sinónimos de números de azar.

## Fourier, Baron Jean Baptiste Joseph (1768-1830)

- *Coeficientes de Fourier de una función real $2\pi$-periódica, acotada e integrable sobre el intervalo $[\![-\pi, \pi]\!]$ de* **R**. — Números reales $a_n(f)$ y $b_n(f)$ definidos por las fórmulas llamadas de Euler-Fourier:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

y:

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\operatorname{sen} nx\,dx \quad \text{para} \quad n \geqslant 1.$$

- *Fórmulas de Euler-Fourier.* — V. FOURIER (Coeficientes de).

- *Serie de Fourier asociada a una función real $2\pi$-periódica $f$, acotada e integrable sobre el intervalo $[\![-\pi, +\pi]\!]$ de* **R**. — Serie trigonométrica:

$$a_0(f) + \sum_{n\geqslant 1} a_n(f)\cos nx + b_n(f)\operatorname{sen} nx$$

donde $a_n(f)$ y $b_n(f)$ son los coeficientes de Fourier de $f$. La serie de Fourier no es necesariamente convergente y, en el caso en que converja, su suma no

es necesariamente igual a $f$. Según las fórmulas de Euler, se puede escribir la serie de Fourier de $f$ bajo la forma: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n e^{inx}$ con $\lambda_n \in \mathbf{C}$.

V. ARMÓNICA, DIRICHLET (Teorema de), FÉJER (Teorema de), JORDAN (Teorema de).

• *Transformada y transformación de Fourier.* — Sea $f$ una función de valores reales o complejos definida e integrable sobre $\mathbf{R}$. La función $\hat{f}$ definida sobre $\mathbf{R}$ por:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

se llama transformada de Fourier de $f$ y la función $h$ definida sobre $\mathbf{R}$ por:

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+itx} dx$$

se llama transformada inversa de Fourier de $f$. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ se llama transformación de Fourier; transforma el producto de convolución en producto ordinario: $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

• *Transformada y transformación de Fourier-Plancherel.* — V. PLANCHEREL.

## $F_n$

Designa el $n$-ésimo número de Fermat $2^{2^n} + 1$.
V. FERMAT.

## $F_q$

Designa el único cuerpo finito de cardinal $q$. Su característica es un entero primo $p > 0$ y $q$ es una potencia de $p$. En particular, $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ y $\mathbf{F}_q$ es el cuerpo de dislocación del polinomio $X^q - X \in \mathbf{F}_p[X]$, donde $q = p^n$.

## Fracción

(Usual.) Sinónimo de número racional, es decir, de elemento del cuerpo $\mathbf{Q}$ de las fracciones del anillo $\mathbf{Z}$. Por razones pedagógicas se llama a veces fracción al par $(p, q)$ de enteros que representan el racional $p/q$. El entero $p$ se llama entonces el numerador y $q$ el denominador de la fracción $p/q$. Matemáticamente, una fracción es un elemento de un anillo de fracciones.
V. FRACCIONES, IRREDUCTIBLE, REDUCTIBLE.

• *Fracción continua.* — V. CONTINUA.

• *Fracción continuada.* — Sinónimo de fracción continua.

• *Fracción racional.* — V. RACIONAL.

## Fraccionaria/o

• *Escritura fraccionaria.* — Escritura de la forma $\frac{n}{d}$ o $n/d$ que sirve para representar ciertas nociones (números racionales, fracciones, cocientes de reales o de funciones, etc.). Comporta un rasgo paralelo a la escritura (o a veces oblicuo), por encima de ese rasgo un numerador $n$, debajo de ese rasgo un denominador $d$. Por ejemplo, el cociente $14/(7\sqrt{2})$ es una escritura fraccionaria del número real $\sqrt{2}$.

• *Exponente fraccionario.* — Si $q$ es un entero positivo, $p$ un entero cualquiera y $a$ un real estrictamente positivo, se define $a^{p/q}$ por la fórmula:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Los exponentes fraccionarios verifican las mismas fórmulas que los exponentes enteros:

$$a^{p/q} \times a^{r/s} = a^{p/q+r/s}; \quad (a^{p/q})^{r/s} = a^{pr/qs} \quad \text{y} \quad (ab)^{p/q} = a^{p/q}b^{p/q}.$$

El real $a^{p/q}$ es también la imagen de $p/q$ por el exponencial de base $a$.

• *Ideal fraccionario de un anillo íntegro* A. — Sub-A-módulo del cuerpo de las fracciones de A. Por ejemplo, $\frac{1}{3}\mathbf{Z}$ es un ideal fraccionario (principal) de Z.

• *Parte fraccionaria de un real* $x$. — Diferencia $x - [x]$, donde $[x]$ es la parte entera de $x$.

## Fraccionarios

• *Números fraccionarios.* — Expresión abandonada en provecho de números racionales, aunque la equivalencia no sea perfecta. Los enteros no son números fraccionarios, aunque sí números racionales.

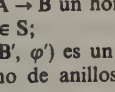
## Fracciones

• *Anillo de fracciones de un anillo conmutativo unitario* A *con relación a una parte* S *de* A. — Par $(B, \varphi)$ que verifica:

1) B es un anillo;

2) $\varphi: A \to B$ un homomorfismo de anillos tal que $\varphi(s)$ es inversible en B para todo $s \in S$;

3) si $(B', \varphi')$ es un par que verifica 1) y 2), entonces existe un único homomorfismo de anillos $\sigma: B \to B'$ tal que $\varphi' = \sigma \circ \varphi$.



Ejemplos fundamentales: si A es entero y si $S = A^*$, entonces B es el cuerpo de las fracciones de A. Si $A = \mathbf{Z}$ y si $S = \{2\}, \{3\}$ o $\{10\}$, entonces $B = \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ o $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{3}\right]$ o $\mathbf{D} = \mathbf{Z}\left[\frac{1}{10}\right]$ es el anillo de números racionales diádicos, triádicos o decimales. Si S es el complementario de $(p) = p\mathbf{Z}$ con $p > 0$ entero primo, entonces $B = \mathbf{Z}_{(p)}$ es el localizado de $\mathbf{Z}$ en $p$.
V. TOTAL.

• *Cuerpo de fracciones de un anillo íntegro* A. — El anillo de las fracciones de A por relación a $A^*$ es un cuerpo K y A es isomorfo de un sub-anillo de K al que se le identifica. Todo elemento de K se escribe entonces $ab^{-1}$ con $a \in A$ y $b \in A^*$. Los cuerpos $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_p$, $\mathbf{Q}(X)$, $\mathbf{Q}((X))$ son respectivamente los cuerpos de fracciones de los anillos $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Z}[[X]]$. A continuación tenemos el diagrama conmutativo en que todos los homomorfismos son inyectivos.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[[X]] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Q}(X) & \longrightarrow & \mathbf{Q}((X)) \end{array}$$

## Fractal

• *Dimensión fractal.* — V. FRACTAL.

• *Objeto fractal.* — Concepto introducido por Benoiît Mandelbrot en 1975 con el fin de estudiar los procesos y las formas irregulares o/y fragmentos que se encuentran en la naturaleza (esponjas, nubes, agujeros del queso de gruyere, etc.) o en matemática (curvas de Peano, conjunto de Cantor, etc.). Si se mide la longitud de un contorno (por ejemplo, una cota) sobre un mapa de escala dada, y sobre el mismo mapa de escalas cada vez más finas se encuentran longitudes diferentes. Llevando hasta el límite este procedimiento uno se ve obligado a cuestionar las nociones clásicas de longitud, de área, de volumen y de dimensión. Este estudio conduce sobre todo a introducir una noción de conjunto fractal y de dimensión fractal de ciertos objetos que no es necesariamente un número entero (la de una curva de Peano es 1,1291).

## Frattini, G. (1852-1925)

• *Sub-grupo de Frattini de un grupo* G. — Intersección de los sub-grupos maximales de G.

## Frecuencia

(Estad.) Dado un carácter cuantitativo discreto que toma los valores $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ sobre una muestra dada de N individuos, se llama frecuencia (o a veces

frecuencia relativa) del valor tomado $x_i$ a la relación $n_i/N$, donde $n_i$ es el número de individuos para los que el valor del carácter es $x_i$. Si el carácter es continuo, se llama frecuencia de una clase $C_i$ la relación $n_i/N$, donde $n_i$ es el número de individuos para los que el valor del carácter pertenece a $C_i$. A veces, la palabra frecuencia se emplea como sinónimo de efectivo.

(Probab.) Dado una prueba cuyo resultado puede ser la realización de un suceso A, si, después de haber repetido N veces la prueba, el suceso A se realiza $n$ veces, se llama frecuencia (a veces frecuencia relativa) del suceso A a la relación $f = \frac{n}{N}$.

• (Mecánica.) *Frecuencia de un movimiento periódico de período* T. — Inversa $N = \frac{1}{T}$ del período. La frecuencia del movimiento sinusoidal definido por:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

es igual a $\omega/2\pi$.

• *Frecuencia de una armónica.* — V. ARMÓNICA.

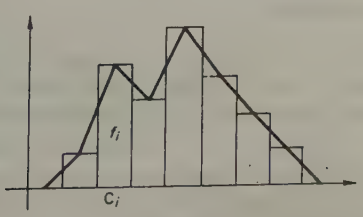
## Frecuencia (absoluta)

Sea un carácter cuantitativo que toma los valores distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ sobre una muestra dada de N individuos ($n \leqslant N$). Si el carácter es discreto se llama frecuencia (absoluta) del valor $x_i$ al número $n_i$ de individuos para los que el valor del carácter es $x_i$. Si el carácter es continuo, se llama frecuencia (absoluta) de una clase $C_i$ el número $n_i$ de individuos para los que el valor del carácter pertenece a $C_i$.
V. ACUMULADOS, ESTADÍSTICA (Serie).

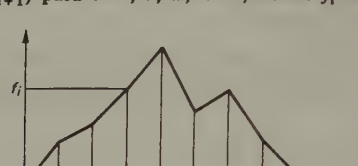
## Frecuencias

• *Frecuencias acumuladas.* — V. ACUMULADAS.

• *Polígono de frecuencias para un carácter cuantitativo continuo.* — Línea poligonal obtenida uniendo los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos de un histograma que representa las frecuencias de cada clase.



• *Polígono de frecuencias para un carácter cuantitativo discreto que toma los valores* $x_1, x_2, ..., x_n$. — Línea poligonal obtenida en un sistema de referencias cartesiano uniendo cada vez más los puntos de coordenadas $(x_i, f_i)$ y $(x_{i+1}, f_{i+1})$ para $i=1, 2, ..., n-1$, donde $f_i$ designa la frecuencia de $x_i$.




## Fréchet, René Maurice (1878-1973)

• *Axioma de separación* $[T_1]$ *de Fréchet.* — V. ACCESIBLE (Espacio).

• *Espacio de Fréchet:*

Primer sentido: un espacio topológico que verifica el axioma de separación $[T_1]$ se llama espacio de Fréchet o también espacio accesible. (V. ACCESIBLE). Segundo sentido: se llama espacio de Fréchet a un espacio localmente convexo metrizable y completo.

• *Filtro de Fréchet.* — Filtro sobre el conjunto N de los enteros naturales cuyos elementos son complementarios en N de las partes finitas de N. En otros términos, es el filtro inducido por el filtro de entorno de $+\infty$.

## Fredholm, Erik Ivar (1866-1927)

• *Ecuación integral de Fredholm.* — Sean $K:(s, t) \mapsto K(s, t)$ un núcleo integrable y de cuadrado integrable sobre un dominio $[\![a, b]\!] \times [\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}^2$ y $f$ una función integrable y de cuadrado integrable sobre $[\![a, b]\!]$. Las ecuaciones integrales:

$$\int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s) \text{ y } \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

se llaman, respectivamente, ecuaciones de Fredholm de primera y segunda especies.
V. VOLTERRA.

## Frenet, Frederic Jean (1816-1900)

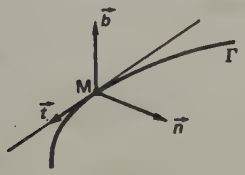
• *Fórmulas de Frenet.* — Sea $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ la base del triedro de Frenet en un punto M de un arco geométrico; sea $s$ la abscisa curvilínea de M y sean T el radio de torsión y R el radio de curvatura en M. Las fórmulas de Frenet se escriben:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T}; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T}.$$

Al plantear $\vec{\Omega} = \frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R}$, tenemos:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{\Omega} \wedge \vec{t}; \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\Omega} \wedge \vec{n}; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\Omega} \wedge \vec{b}.$$

• *Triedro de Frenet o de Serret-Frenet en un punto* M *de un arco geométrico de clase* $C^k$ $(k \geqslant 2)$ *sin puntos estacionarios.* — Sea $s$ la abscisa curvilínea de M, sea $\vec{t}$ el vector unitario tangente $d\vec{M}/ds$ orientado en el sentido de las abscisas crecientes, y sea $\vec{n}$ un vector unitario director de la normal principal en M. Siendo el espacio $\mathbf{R}^3$ orientado, se plantea $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$; de este modo, la base $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ es ortonormada directa. El triedro de vértice M determinado por sus tres vectores se llama triedro de Frenet o de Serret-Frenet.




## Fresnel, Agustin (1788-1827)

• *Integrales de Fresnel.* — Integrales generalizadas $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$ y $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx$. Las dos son convergentes y tenemos:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

## Frobenius, Georg Ferdinand (1849-1917)

• *Automorfismo de Frobenius de un cuerpo finito* $\mathbf{F}_{p^n}$ *de característica* $p > 0$. — El automorfismo $\sigma : x \mapsto x^p$. El grupo de Galois Gal $(\mathbf{F}_{p^n}/\mathbf{F}_p)$ es cíclico de orden $n$ y admite por generador $\sigma$.

• *Teorema de Frobenius.* — Todo cuerpo K conteniendo en su centro el cuerpo **R** y de dimensión finita sobre **R** es isomorfo, bien a **R**, bien a **C**, bien a **H**. V. ALTERNATIVA (Algebra).

## Frontal

• *Plano frontal en geometría descriptiva.* — Plano paralelo al plano frontal de referencia.

• *Plano frontal de referencia.* — V. DESCRIPTIVA (Geometría).

• *Recta frontal en geometría descriptiva.* — Recta paralela al plano frontal de referencia.

• *Traza frontal de un plano en geometría descriptiva.* — Intersección de ese plano con el plano frontal de referencia.

## Frontera

• *Frontera de una parte* A *de un espacio topológico* E. — Conjunto de puntos fronteras de A. La frontera de A es igual a $\overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$, donde $\overline{A}$ y $\overline{\complement_E A}$ designan respectivamente las adherencias de A y de su complementario en E. En R provisto de la distancia usual, la frontera de los intervalos $]a, b[$ y $[a, b]$ es el conjunto $\{a, b\}$.
V. ADUANAS.

• *Punto frontero de una parte* A *de un espacio topológico* E. — Punto adherente a la vez a A y a su complementario en E.

## Fuente

• *Fuente de una aplicación* $f$: $E \to F$. — El conjunto E.

• *Fuente de información.* — V. INFORMACIÓN.

• *Fuente de un morfismo* $f$: $E \to F$. — El objeto E.

## Fuerte

• *Ley fuerte de los grandes números.* — V. GRANDES.

• *Topología fuerte sobre el dual topológico de un espacio vectorial topológico* E *localmente convexo y separado.* — Topología de la convergencia uniforme sobre las partes acotadas de E. Viene definida por una familia de semi-normas. Si E es normado, se define por la norma de la convergencia uniforme sobre la bola unidad de E.

• *Topología más fuerte que otra.* — Topología más fina que otra. V. FINA.

## Fuertemente

• *Cardinal fuertemente inaccesible.* — V. INACCESIBLE.

• *Grafo fuertemente conexo.* — V. CONEXO.

## Fuerza

Noción física cuyas causas y efectos son muy variados: desplazamientos de objetos, deformaciones, cambio de direcciones de objetos en movimiento, choques, etc. Diferentes modelos matemáticos permiten, según su tipo, representar las fuerzas. Una fuerza aplicada en un punto material M se representa en $\mathbf{R}^3$ por un bipunto (M, A). El punto M es el punto de aplicación de la fuerza, la dirección de la recta (MA) es la de la fuerza, la longitud MA es proporcional a la intensidad de la fuerza. La posición del punto A por relación al punto M indica el sentido de la fuerza. El vector $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{MA}$ se llama el vector-fuerza. Una fuerza en un punto material está enteramente determinada por el dato

del punto material M en que se aplica y por el vector fuerza $\vec{F}$. El interés de esta representación deriva del resultado siguiente: dos fuerzas aplicadas en M de vector-fuerza $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tienen igual efecto que la fuerza aplicada en M de vector fuerza $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, donde + designa la adición de los vectores de $\mathbf{R}^3$. La atracción terrestre es un ejemplo de un tipo distinto de fuerza que se representa por un campo de vectores.

• *Campo de fuerzas o fuerza que deriva de una función de fuerza.* — V. FUERZA (Función de).

• *Campo de fuerzas o fuerza que deriva de un potencial.* — V. POTENCIAL.

• *Fuerza de inercia.* — V. ALEMBERT (Principio de d').

• *Función de fuerza.* — Sea $\vec{F}$ un campo de fuerzas de componentes X, Y y Z definido sobre un abierto U de $\mathbf{R}^3$. Si existe una función numérica $\Phi$ definida sobre U tal que $\vec{F} = \text{grad}\,\Phi$, se dice que $\vec{F}$ deriva de la función de fuerza $\Phi$. Tenemos las igualdades:

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

• *Trabajo de una fuerza.* — V. TRABAJO.

## Función

Sinónimo de aplicación. A veces se hacen matices de orden pedagógico entre los dos términos en la enseñanza secundaria (V. DEFINICIÓN) (Dominio de). Según ciertos usos, se emplea más fácilmente un término que otro; por ejemplo, se habla más bien de función trigonométrica y de aplicación inyectiva. V. ALGEBRAICA, ANALÍTICA, APLICACIÓN, ARITMÉTICA, ARMÓNICA, BAIRE, BEI, BER, BICONTINUA, BIPERIÓDICA, BOOLE, CARACTERÍSTICA, CERO, CÓNCAVA, CONJUGADA, CONSTANTE, COORDENADA, COSENO, COTANGENTE, DERIVABLE, DERIVADA, DESARROLLABLE, DESPRECIABLE, DIRICHLET, DISCONTINUA, DISTRIBUCIÓN, DOMINADA, ELÍPTICA, ENTERA, ERROR, EULERIANA, EVALUACIÓN, EXPONENCIAL, GENERATRIZ, HIPERGEOMÉTRICA, HOLOMORFA, HOMOGÉNEA, HOMOGRAFÍA, IMPLÍCITA, INDICATRIZ, INTEGRABLE, INTERPOLACIÓN, INVERSA, LAGRANGE, LAGRANGIANA, LAPLACIANO, LÍMITE, LOGARITMO, MAXIMORUM, MAXIMUM, MAYORADA, MEROMORFO, MINIMORUM, MINIMUM, MINORADA, MINORANTE, MÖBIUS, MONÓGENO, MONÓTONO, MULTIFORME, MULTIPLICATIVA, NO CRECIENTE, NUMÉRICA, PERIÓDICA, PERÍODO, POLINOMIAL, POLINOMIO, POLO, POTENCIA, PREPONDERANTE, RACIONAL, REAL, REGULADA, RESIDUO, SECANTE, SELECCIÓN, SENO, TANGENTE, TCHEBICHEV, TRASCENDENTE, UNIFORME, UTILIDAD, VECTORIAL, VERDAD, VEROSIMILITUD, WEIERSTRASS, WRONSKIANO.

• *Curva representativa de una función numérica.* — Representación gráfica cartesiana de la función.
V. GRÁFICA.

• *Función de fuerza.* — V. FUERZA.

• *Función monótona por trozos.* — V. TROZOS.

• *Función singular de Lebesgue.* — V. LEBESGUE.

• *Función beta y función gamma.* — Funciones eulerianas.

• *Función de soporte compacto.* — V. COMPACTO.

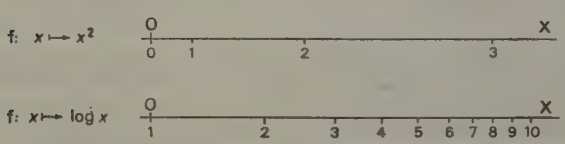
• *Función de variación acotada.* — V. LIMITADA.

• *Función zeta de Riemann.* — V. RIEMANN.

## Funcional

• *Análisis funcional.* — Estudio de espacios vectoriales topológicos cuyos elementos son funciones. En mecánica se encuentran numerosas cuestiones de análisis funcional: pequeñas oscilaciones, problemas de cuerdas vibrantes...

• *Escala funcional.* — Procedimiento de dibujo que consiste en asociar a todo punto de una semirrecta OX un real de la manera siguiente: dada una función biyectiva definida sobre un intervalo I de $\mathbf{R}$ con valores en $\mathbf{R}_+$, se asocia al punto M de OX el real $x \in \mathbf{I}$ tal que $f(x)$ sea proporcional a la distancia OM usual (es decir, medida con un «doble decímetro»). Si $f$ es una función logaritmo, la escala se llama logarítmica.
V. ANAMORFOSIS.




• *Ecuación funcional.* — Ecuación cuya incógnita es una función. Por ejemplo, las soluciones continuas $f$ de $\mathbf{R}_+^*$ sobre $\mathbf{R}$ de la ecuación funcional $f(xy) = f(x) + f(y)$ son las funciones logaritmos.

• *Espacio funcional.* — Espacio vectorial cuyos elementos son funciones.

• *Funcional.* — Palabra caída en desuso que designaba una aplicación lineal de un espacio funcional en otro.

• *Grafo funcional.* — Grafo de una relación funcional.

• *Potencia del funcional.* — Potencia del conjunto $\mathfrak{P}(\mathbf{R})$ de las partes de $\mathbf{R}$; es, por tanto, $2^{\mathrm{Card}\,\mathbf{R}}$.

• *Propiedad funcional.* — Teorema del análisis funcional.

• *Relación funcional.* — Una relación $\mathscr{R}$ de un conjunto E en un conjunto F se llama funcional si para todo $x \in E$ existe como máximo un $y \in F$ tal que $x \mathscr{R} y$. Semejante relación también se llama una función.
V. APLICACIÓN, DEFINICIÓN (Dominio de), FUNCIÓN.

## Funciones

V. BESSEL, CONJUGADAS, EQUIVALENTES, ESPECIALES, EULERIANAS, HANKEL, HERMITE, HIPERBÓLICAS, INCOMPLETAS, INTEGRABLE, INVERSAS, JACOBIANAS, KELVIN, LAGUERRE, MATHIEU, NEUMANN, TRIGONOMÉTRICAS.

## Functor

Un functor F de una categoría $\mathscr{C}$ en una categoría $\mathscr{D}$ (se escribe $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$) es el dato:

1) de una aplicación $X \mapsto F(X)$ del conjunto de objetos de $\mathscr{C}$ en el conjunto de objetos de $\mathscr{D}$;
2) de una aplicación $u \mapsto F(u)$ del conjunto de los morfismos de $\mathscr{C}$ en el conjunto de los morfismos de $\mathscr{D}$ tal que si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ entonces $F(u) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}\big(F(X), F(Y)\big)$, y:

*a*) $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$;
*b*) $F(u \circ v) = F(u) \circ (F(v)$; F se llama entonces covariante.
o *b'*) $F(u \circ v) = F(v) \circ F(u)$; F se llama entonces contravariante.

Por ejemplo, se define el functor Spec: **Ann** → **Ens** de la categoría de los anillos conmutativos en la categoría de los conjuntos como el functor, que asocia a un anillo A su espectro notado Spec(A) y que asocia a un homomorfismo de anillo $\varphi: A \to B$ la aplicación $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ definida por $\mathrm{Spec}(\varphi): \mathfrak{P} \to \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$. Este functor es contravariante. De hecho, si se le provee de los espectros de la topología de Zariski, se verifica que $\mathrm{Spec}(\varphi)$ es continua, por tanto, que Spec es un functor contravariante de **Ann** en **Top**, categoría de los espacios topológicos. Empleada sola, la palabra functor quiere decir, en general, functor covariante.
En la práctica, y por abuso de lenguaje, cuando se define un functor F, se dice a veces «el functor $X \mapsto F(X)$», entendiéndose que $u \mapsto F(u)$ es definido entonces de forma «natural». Por ejemplo:

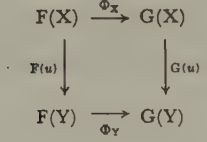
«el functor $\mathrm{Hom}(X, -): Y \to \mathrm{Hom}(X, Y)$»;

en este caso, si $u: Y \to Y'$, entonces $\mathrm{Hom}(X, u)$ es el morfismo $f \mapsto u \circ f$ de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ hacia $\mathrm{Hom}(X, Y')$.
V. ADJUNTOS, FIEL, HOM, OLVIDO, PLENO, REPRESENTABLE, TENSORIAL (Producto).

## Functorial

Se dice de un procedimiento o de una propiedad que permite definir un functor.

• *Morfismo functorial.* — Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías, F y G dos functores covariantes de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$. Un morfismo functorial $\Phi$ de F en G o una transformación natural es el dato, para todo objeto X de $\mathscr{C}$, de un morfismo $\Phi_X \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), G(X))$ tal que para todo $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ el diagrama que mostramos a continuación sea conmutativo. Se dice entonces que el morfismo $\Phi_X : F(X) \to G(X)$ es natural en X.




• *Isomorfismo functorial de un functor* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *en un functor* $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. — Morfismo functorial $\Phi$ de F en G tal que $\Phi_X$ sea un isomorfismo de $\mathscr{D}$ para todo objeto X de $\mathscr{C}$.

## Functorialidad

Propiedad de ser functorial.

## Fundamental

• *Grupo fundamental de un espacio topológico* E *en un punto x de* E. — El conjunto $\pi_1(E, x)$ de las clases de homotopía de lazos de origen y extremidad $x$, provisto de la ley inducida por la composición de los caminos, es un grupo llamado fundamental o grupo de Poincaré de E al punto $x$. Esta idea de asociar a un espacio topológico un grupo es uno de los métodos más antiguos y más eficaces de la topología algebraica. Permite expresar algebraicamente cuestiones de naturaleza topológica.

• *Período fundamental de una función periódica.* — V. PERIÓDICA.

• *Primera forma cuadrática fundamental.* — V. FUNDAMENTALES.

• *Segunda forma cuadrática fundamental.* — V. FUNDAMENTALES.

• *Serie fundamental de Cantor.* — V. CANTOR.

• *Sistema fundamental de entornos de un punto x de un espacio topológico.* — Parte $\mathscr{B}$ del conjunto $V(x)$ de entornos de $x$ tal que para todo entorno V de $x$ exista un elemento $\mathscr{B}$ contenido en V.

• *Teorema fundamental del álgebra.* — Nombre dado a veces al teorema de d'Alembert-Gauss.

## Fundamentales

• *Formas cuadráticas fundamentales de una superficie.* — Sea $\Sigma$ una superficie de $\mathbf{R}^3$ y sean $x_1$, $x_2$ las coordenadas curvilíneas de un punto $M(x, y, z)$ de $\Sigma$. Se plantea:

$$g_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 = \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1}\right\|^2$$

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2}$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 = \left\|\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2}\right\|^2$$

La forma cuadrática $ds^2$ definida por $ds^2 = g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2$ se llama la primera forma cuadrática fundamental de la superficie. Estando orientada la superficie $\Sigma$ se considera el vector unitario $\vec{\nu}$ normal en M a $\Sigma$ que indica la orientación de $\Sigma$ y se plantea:

$$d_{11} = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x_1}$$

$$d_{12} = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x_2} = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x_1}$$

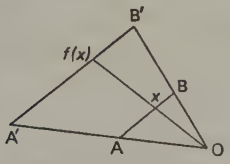
$$d_{22} = -\frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \vec{\nu}}{\partial x_2}.$$

La forma cuadrática $d_{11}\,dx_1^2 + 2d_{12}\,dx_1\,dx_2 + d_{22}\,dx_2^2$ se llama la segunda forma cuadrática fundamental de la superficie.

# G

## **Galileo** Galilei (1564-1642)

• *Paradojas de Galileo.* — No hay «más» puntos en un gran segmento de recta que en uno pequeño. Galileo lo mostraba con la figura que va a continuación, que no requiere explicación. Esta paradoja fue esclarecida por la teoría de los conjuntos de Dedekind, en 1872. Debe relacionarse con esa otra observación de Galileo de que hay tantos cuadrados perfectos como enteros.




## **Galois,** Evariste (1811-1832)

• *Cuerpos de Galois.* — Sinónimo de cuerpo finito. Un cuerpo de ese tipo es necesariamente conmutativo (teorema de Wedderburn).

• *Grupo de Galois de una extensión* E *de un cuerpo* K *(o de* E *sobre* K*).* — Grupo de automorfismos $\sigma$ de E tales que $\sigma(x) = x$ para todo $x \in K$, llamados también K-automorfismos de E. Se denota Gal(E/K) el grupo de Galois de E sobre K. Por ejemplo: $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ y $\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_p n/\mathbf{F}_p) \simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

• *Grupos de Galois de una ecuación polinomial* $P(x) = 0$. — Grupo de Galois del cuerpo de las raíces del polinomio P.

• *Teorema de Galois o de Abel.* — La ecuación general de quinto grado no es resoluble mediante radicales (V. ABEL).

• *Teoría de Galois.* — Rama de la teoría de los cuerpos nacida del estudio de las ecuaciones polinomiales de grado $n \geqslant 5$. La idea de base de esta teoría es relacionar el estudio de ecuaciones (o de sus cuerpos de raíces) con la de grupos (grupo de Galois de la ecuación) que están naturalmente asociados a ella, para dar una condición necesaria y suficiente de resolubilidad. V. RESOLUBLE.

## **Galoisiana**

• *Extensión galoisiana.* — Una extensión E de grado finito de un cuerpo K se

llama extensión galoisiana de K si el cuerpo de los invariantes del grupo de Galois Gal(E/K) es igual a K. El grado de E sobre K es igual entonces a la orden del grupo de Galois de E sobre K. Por ejemplo, $\mathbf{Q}(i)$ y $\mathbf{Q}_n$ son extensiones galoisianas de Q (V. CICLOTÓMICO) y $\mathbf{F}_{p^n}$ es una extensión galoisiana de $\mathbf{F}_p$.

## Galton, Sir Francis (1822-1911)

• *Curva galtoniana.* — Curva que muestra la desviación de una característica cualquiera de la ley normal.

## Gamma (Γ)

• *Función gamma.* — Función euleriana de primera especie.
V. EULERIANA, ESPECIALES.

• *Ley gamma de orden* $n \in \mathbf{R}_+^*$ *y de parámetro* $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. — Ley de una variable aleatoria absolutamente continua X definida sobre $[0, +\infty[$ cuya función de distribución es:

$$F(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(n)} \int_0^x (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} dt$$

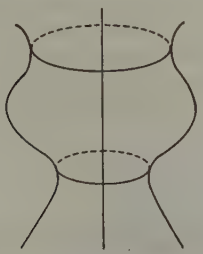
donde Γ es la función gamma. Tenemos $E[X] = n/\lambda$ y $V[X] = n/\lambda^2$.

## Ganadora

• *Estrategia ganadora.* — En teoría de los juegos, se dice de una estrategia que lleva al jugador a un éxito hagan lo que hagan sus adversarios.

## Garganta

• *Círculo de garganta de una superficie de revolución.* — Círculo paralelo de radio minimal. Una superficie de revolución puede no tener ningún círculo de garganta o puede tener varios.

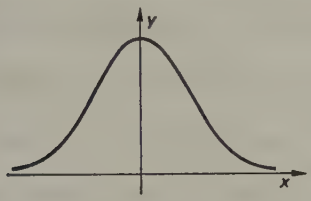


• *Elipse de garganta de un hiperboloide de una hoja.* — Entre los tres planos de simetría del hiperboloide, uno sólo lo corta siguiendo una elipse llamada elipse de garganta del hiperboloide. Si el hiperboloide es de revolución, esa elipse es un círculo de garganta.

## **Gauss,** Karl Friedrich (1777-1855)

• *«Hermoso teorema» (el).* — Nombre dado por Gauss a su teorema que consideraba como fundamental en la teoría de la curvatura total de las superficies curvas: sean dos superficies $\Sigma$ y $\Sigma'$ sin punto singular. Si existe un homeomorfismo $\varphi$ de $\Sigma$ sobre $\Sigma'$ que conserva la longitud de los arcos trazados sobre $\Sigma$ entonces, para todo punto M de $\Sigma$, las curvaturas totales de $\Sigma'$ en $\varphi(M')$ son iguales.

• *Curva de Gauss.* — Curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$, donde:




$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

representa la función de densidad de una variable aleatoria normal reducida.

• *Curvatura de Gauss de una superficie.* — Curvatura total de la superficie.

• *Descomposición de Gauss de un polinomio* P *de* $\mathbf{R}[X]$ de grado $n \geqslant 1$. — Factorización de P en forma de productos de polinomios irreducibles de $\mathbf{R}[X]$.

• *Entero de Gauss.* — Número complejo de la forma $a + ib$, donde $a$ y $b$ son enteros racionales. Su conjunto notado $\mathbf{Z}[i]$ es un sub-anillo euclídeo de $\mathbf{C}$.

• *Fórmula de Gauss.* — La función euleriana $\Gamma$ verifica la fórmula de Gauss:

$$\Gamma(x) \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \ldots (x+n)}.$$

Permite escribir el desarrollo:

$$-\operatorname{Log}\Gamma(x) = \operatorname{Log} x + Cx + \operatorname{Log}(1+x)e^{-x} + \cdots + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right)e^{-x/n} + \cdots$$

donde C es la constante de Euler.

• *Fórmula de Legendre-Gauss.* — V. LEGENDRE.

• *Geometría de Gauss-Lobatchevski-Bolyai.* — Nombre que a veces se da a la geometría de Lobatchevski-Bolyai (V. LOBATCHEVSKI).

• *Integral de Gauss.* — Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Es convergente y:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

• *Lema (o teorema) de Gauss.* — En un anillo factorial A, si $a$ es extraño con $b$ y divide el producto $bc$, entonces $a$ divide $c$.

• *Ley de Laplace-Gauss.* — Ley normal.

• *Ley de reciprocidad cuadrática de Legendre-Gauss.* — V. LEGENDRE.

• *Método de Gauss de descomposición de una forma cuadrática en cuadrados.* — Sean E un espacio vectorial de dimensión finita $n$ sobre un cuerpo K de característica diferente de 2 y $q$ una forma cuadrática sobre E definida por:

$$q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij}x_ix_j, \text{ donde } (x_k)_{k=1, \ldots, n} \text{ son las componentes de } x$$

en una base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. El método de Gauss permite descomponer $q$ en suma de cuadrados por utilizaciones sucesivas de los resultados siguientes:
— si $a_{11} \neq 0$, entonces $q(x) = a_{11}[l(x)]^2 + q_1(x)$, donde $l$ es una forma lineal sobre E y donde $q_1$ es una forma cuadrática sobre el espacio vectorial engendrado por $(e_2, e_3, \ldots, e_n)$;
— si todos los $a_{ii}$ son nulos y si, por ejemplo, $a_{12} \neq 0$, entonces:

$$q(x) = a_{12}l_1(x)l_2(x) + q_1(x)$$

donde $l_1$ y $l_2$ son formas lineales sobre E y donde $q_1$ es una forma cuadrática sobre el espacio vectorial engendrado por $(e_3, e_4, \ldots, e_n)$.
Este método permite también determinar una base ortogonal para la forma polar de $q$; por eso se llama también método de ortogonalización de Gauss.

• *Ortogonalización de Gauss.* — V. GAUSS (Método de).

• *Plano de Argand-Gaus.* — Plano complejo.

• *Recta de Gauss de un cuadrilátero completo.* — Sinónimo de recta de Newton.

• *Serie hipergeométrica de Gauss.* — Serie:

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma}z + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n+1)\ \beta(\beta-1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}z^n + \cdots$$

donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son tres números complejos.
Converge para $|z| < 1$ y diverge para $|z| > 1$.
Su nombre le viene de que la progresión geométrica es un caso particular de la serie hipergeométrica, aquél en que $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$. Una serie entera $\Sigma a_n z^n$ es una serie hipergeométrica cada vez que la relación $a_{n+1}/a_n$ es de la forma $(\alpha + n)\ (\beta + n)/(\gamma + n)\ (n + 1)$.

• *Teorema de D'Alembert-Gauss.* — V. ALEMBERT (d').

• *Teoremas de Gauss:*

1) Un entero $n$ es suma de tres cuadrados si y solamente si $n$ no es de la forma $4^a(8b - 1)$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ (teorema de los tres cuadrados).

2) Todo entero positivo es suma de tres números triangulares.
3) V. GAUSS (Lema de).
4) El polígono regular de $n$ lados es constructible con la regla y el compás si y solamente si $n$ es de la forma $2^r p_1 p_2 \dots p_s$ con $r, s \in \mathbf{N}$ y donde los $p_i$ son números primos de Fermat distintos. En particular los polígonos de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17 ó 20 lados son constructibles.
5) *Teorema Egregium* (V. «Hermoso teorema» de Gauss).

## **Gelfand,** Israël Moïsievitch (1913- )

• *Teorema de Gelfand-Mazur.* — Un álgebra de Banach sobre **R** que es un cuerpo conmutativo es isomorfo bien a **R** bien a **C**.

## **Gelfond,** Alexander Ossipovitch (1906-1968)

• *Teorema de Gelfond-Schneider.* — Si $a$ es un número real algebraico distinto de 0 y 1 y $b$ un número algebraico irracional, el número $a^b$ es trascendente. Este teorema, que facilita un medio cómodo para fabricar números trascendentes, resuelve el séptimo problema de Hilbert. Así, $2^{\sqrt{2}}$ es trascendente. Su demostración se apoya en el principio de los cajones.
Este resultado ha sido generalizado por los teoremas de Baker.

## Gemelos

• *Par o doblete de números primos gemelos.* — Par $(p, q)$ de números primos tal que $q = p + 2$; por ejemplo (5, 7); (17, 19) ó (311, 313). Se ignora si su conjunto es finito (octavo problema de Hilbert) se sabe, sin embargo, (teorema de V. Brun) que la serie $\Sigma 1/p$ donde $p$ describe el conjunto de los números primos gemelos es convergente. Existen 6.497.407 en los cien primeros millones de números primos. Los dos más grandes hasta 1979 son $76 \times 3^{139} + 0 - 1$ descubiertos en 1972 por H. C. Williams y C. R. Zarncke.

## Generadores

• *Sistema de generadores.* — Sinónimo de familia generatriz.

## General

• *Resultante general de un torsor.* — V. RESULTANTE.

• *Solución general de una ecuación diferencial.* — V. SOLUCIONES.

• *Término general de una serie o de una sucesión.* — V. SERIE, SUCESIÓN.

• *Topología general.* — Sinónimo de topología.

## Generalizada

• *Hipótesis del continuo generalizada.* — V. CONTÍNUO.

• *Integral generalizada sobre un intervalo cerrado no acotado de* **R**. — Sea $f$ una función integrable sobre el segmento $[a, x]$ de **R** para todo real $x > a$. Si la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

admite un límite finito cuando $x$ tiende hacia $+\infty$, ese límite se denota:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

y se le llama integral generalizada de $f$ sobre $[a, +\infty[$. También se dice que la integral:

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

tiene un sentido, o que es convergente. Se definen igual, cuando existen, las integrales generalizadas de la forma $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$.

• *Integral generalizada sobre* **R**. — Si las integrales generalizadas $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ y $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt$ existen, el número real $\int_{-\infty}^a f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ es denotado $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ y se llama integral generalizada de $f$ sobre **R**. También se dice que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ tiene un sentido, o que es convergente.

• *Integral generalizada sobre un intervalo* $[a, b[$ de **R**. — Sea $f$ una función no acotada en un entorno de $b$ e integrable sobre el segmento $[a, x]$ para todo real $x$ tal que $a < x < b$. Si la función definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ admite un límite finito cuando $x$ tiende hacia $b$, ese límite se denota $\int_a^b f(t)\,dt$ y se llama integral generalizada de $f$ sobre $[a, b[$. También se dice que la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ tiene un sentido, o es convergente. Se definen igual las integrales generalizadas sobre un intervalo $]a, b]$ de **R**.

## Generalizado

• *Teorema de Pitágoras generalizado.* — V. PITÁGORAS.

## Generatrices

• *Familia de generatrices de una superficie reglada* Σ. — Familia de rectas $\mathscr{F}$ que engendran esta superficie. En otros términos, toda recta de $\mathscr{F}$ está contenida en Σ y por todo punto de Σ pasa una recta de $\mathscr{F}$; el hiperboloide de una hoja admite dos familias de generatrices.

## Generatriz

• *Familia generatriz de un espacio vectorial o de un grupo* E. — Familia de elementos de E cuyo conjunto de elementos es una parte generatriz de E.

• *Familia topológicamente generatriz de un espacio vectorial normado.* — Sinónimo de familia total.

• *Función generatriz de las funciones de Bessel de índice entero.* — Se llama así a la función:

$$e^{z\left(u-\frac{1}{u}\right)/2} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u^n J_n(z).$$

• *Generatriz de una superficie de revolución.* — Término empleado a veces para directriz.

• *Parte generatriz de un espacio vectorial* E. — Parte A de E tal que el subespacio vectorial engendrado por A sea igual a E. Una parte finita A de E es generatriz si y solamente si todo vector de E se escribe como combinación lineal de vectores de A.

• *Parte generatriz de un grupo* G. — Parte X de G tal que el sub-grupo engendrado por X sea igual a G.

## Género

• *Género de un grafo.* — El género de un grafo G es el entero más pequeño $p$ tal que G sea representable sobre una superficie orientable de género $p$. Los grafos planarios son de género 0. El grafo de los tres pozos y de las tres casas es de género 1.

• *Género de un nudo.* — Se llama género de un nudo a la mitad del número mínimo de asas, enlazadas o no, que es necesario añadir a la esfera para poder trazar sobre la superficie obtenida el nudo, de manera que esa superficie se separe en dos partes cuando se la corta siguiendo el nudo. Un nudo de trébol es de género 1; un nudo trivial es de género 0.

• *Género de una superficie cerrada.* — Se llama género de una superficie cerrada el número máximo de curvas simples cerradas sin puntos comunes que se pueden trazar sobre esa superficie sin trocearla. Una superficie cerrada orientable de género $p$ es homeomorfa a una esfera provista de $p$ asas. Su característica de Euler-Poincaré es $c = 2 - 2p$. Una superficie cerrada no orientable de género $q$ es homeomorfa a una esfera provista de $q$ gorros cruzados. Su característica de Euler-Poincaré es $c = 2 - q$. Una esfera es orienta-

ble de género 0; un toro de $p$ agujeros es orientable de género $p$; una botella de Klein o un toro de Klein es no orientable de género 2.

Superficies de género 2

## Genocchi, Angelo (1817-1889)

• *Números de Genocchi.* — Puede mostrarse que si $B_n$ designa el $n$-ésimo número de Bernoulli, para todo entero $a$, el número $a(a^{2n} - 1)B_n$ es, para todo $n \geqslant 1$, un número entero. Para $a = 2$, estos enteros denotados $G_n$ se llaman números de Genocchi. Tenemos, por tanto, $G_n = 2(2^{2n} - 1)B_n$ para $n \geqslant 1$. Los primeros valores de $G_n$ y $B_n$ son los siguientes:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_n$ | 1 | 1 | 3 | 17 | 155 | 2 073 | 38 227 |
| $B_n$ | 1/6 | 1/30 | 1/42 | 1/30 | 5/66 | 691/2 730 | 7/6 |

Los $G_n$ son enteros «próximos» a los $B_n$ en el sentido de que:

$$\frac{2u}{e^u + 1} = u + \sum_{n \geqslant 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} (-1)^n G_n,$$

mientras que:

$$\frac{u}{e^u - 1} = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{u^{2n}}{(2n)!} (-1)^{n+1} B_n.$$

V. BERNOULLI.

## Geodésica

• *Geodésica de una superficie.* — Curva C de esa superficie tal que, para todo par (A, B) de puntos de C, el arco de la curva C que une A y B es el arco de la superficie de longitud mínima que une A y B. Las geodésicas del plano euclídeo son las rectas; las de la esfera son las circunferencias máximas.

• *Curvatura (resp. torsión) geodésica.* — Sean $(\vec{t}, \vec{\gamma}, \vec{\nu})$ los tres vectores del

triedro de Darboux en un punto M de una curva $\Gamma$ trazada sobre una superficie $\Sigma$ del espacio orientado $\mathbf{R}^3$. El número real:

$$c_g = \vec{\gamma} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = -\vec{t} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{ds}$$

(donde $s$ es la abscisa curvilínea sobre $\Gamma$) se llama curvatura geodésica de $\Gamma$ en M. El número real:

$$\tau_g = \vec{\nu} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{ds} = - \rightarrow \cdot \frac{d\vec{\nu}}{ds}$$

se llama torsión geodésica de $\Gamma$ en M.

## Geometría

La geometría es una de las ramas más antiguas de las matemáticas. Ciencia de las figuras del espacio, se ha dedicado durante mucho tiempo al estudio de las relaciones entre puntos, rectas, curvas, superficies y volúmenes del espacio usual (matematizado en la actualidad por $\mathbf{R}^3$) y recubría diversos dominios de las matemáticas como la aritmética y el álgebra. Así, para los griegos un número era un segmento; la aritmética de los pitagóricos era el estudio de los números figurados. Hasta el siglo XVIII, la geometría fue la geometría de Euclides, llamada «clásica», que se apoyaba sobre definiciones, los postulados de Euclides y muchos otros axiomas que se apoyan en gran parte sobre la observación y la intuición. Los trabajos de los árabes, de Saccheri, Lambert, Gauss, mostraron la existencia de geometrías no euclídeas. A finales del siglo XIX, Hilbert dio los fundamentos sólidos para la geometría euclídea enunciando un sistema de axiomas, uno de los cuales es el quinto postulado de Euclides. Al retirar este axioma se obtiene la geometría proyectiva; reemplazándolo por otro, se define bien la geometría no euclídea de Lobatchevski-Bolyai, también llamada geometría hiperbólica, bien la geometría de Riemann, también llamada geometría elíptica. Un progreso decisivo en geometría fue marcado por Laguerre, Cayley y Klein, que descubrieron el papel esencial jugado por las transformaciones; de este modo, el programa de Erlangen de F. Klein (1872) mostró la geometría como el estudio de los invariantes de grupos que operan sobre conjuntos muy diversos llamados, en tal caso, conjuntos de puntos. En la actualidad, siguiendo el aspecto particular considerado, los conceptos introducidos, las aplicaciones a las que se apunta y las herramientas utilizadas, se habla de geometría afín, vectorial, métrica, algebraica, diferencial, etc.

F. LL.

V. ABSTRACTA, AFÍN, ALGEBRAICA, ANALAGMÁTICA, ANALÍTICA, AXIOMAS, DESCRIPTIVA, DIFERENCIAL, ELÍPTICA, ENUMERATIVA, EUCLÍDEA, EUCLIDES, HIPERBÓLICA, IMAGINARIA, LOBATCHEVSKI-BOLYAI, MÉTRICA, MINI-GEOMETRÍA, NO EUCLÍDEA, PLANA, POSICIÓN, PROYECTIVA, PURA, RIEMANN, SUBORDINADA, SINTÉTICA, VECTORIAL.

● *Geometría del ángulo recto (resp. agudo, resp. obtuso).* — En geometría pla-

na de Euclides (resp. de Lobatchevski, de Riemann), consideremos un trapecio (A, B, C, D) construido de la forma siguiente: se traza perpendicularmente a las extremidades de un segmento AB y del mismo lado de ese segmento dos segmentos de igual longitud AD y BC. Los ángulos interiores en C y D son rectos en el caso de la geometría de Euclides, agudos en el caso de la geometría de Lobatchevski, y obtusos en el caso de la geometría de Riemann. Es la razón por la que las geometrías de Euclides, de Lobatchevski y de Riemann se denominan a veces, respectivamente, geometrías del ángulo recto, del ángulo agudo y del ángulo obtuso.

• *Geometría combinatoria.* — V. MATROIDE.

• *Geometría derivada de otra.* — Geometría subordinada a otra.

• *Geometría de una forma bilineal simétrica no degenerada f* sobre *un* R*-espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Estudio del grupo ortogonal de E relativamente a *f*.

## Geometrías

V. CAYLEY, EQUIVALENTES.

• *Geometrías cayleyanas.* — Geometrías de Cayley.

## Geométrico/a

• *Angulo geométrico de un plano afín euclídeo.* — Sinónimo poco utilizado de ángulo no orientado.
V. ORIENTADO (no).

• *Arco geométrico.* — Se dice que dos arcos parametrados (I, $f$) y (J, $g$) son $C^k$-equivalentes si existe una biyección $\varphi : J \to I$ tal que $\varphi^{-1}$ sea de clase $C^k$ y $g = f \circ \varphi$. Una clase de equivalencia módulo, esta relación es un arco geométrico de tipo o de clase $C^k$.
V. JORDAN, ORIENTACIÓN.

• *Lugar geométrico.* — El conjunto de puntos de un espacio afín que posee una propiedad P se denomina a veces el lugar geométrico de los puntos que poseen la propiedad P. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de dos puntos distintos A y B es la mediatriz del segmento AB.

• *Ley geométrica.* — Sean $p$ un número real comprendido estrictamente entre 0 y 1, y X una variable aleatoria discreta cuyo conjunto de valores tomados es N. Se dice que X obedece a una ley geométrica de parámetro $p$ si su función de distribución es definida por $P(X = n) = pq^n$, donde $q = 1 - p$. Tenemos $E[X] = q/p$ y $V[X] = q/p^2$.

• *Media geométrica de n reales positivos* $a_1, ..., a_n$. — Raíz $n$-ésima positiva de su producto. Por ejemplo, la media geométrica de 2 y 4, 8672 es 3,12.

• *Napa geométrica de clase* $C^k$. — Dos napas parametradas $(D, f)$ y $(\Delta, g)$ de clase $C^k$ se denominan equivalentes si existe una biyección $\varphi$ de $\Delta$ sobre D que verifica $g = f \circ \varphi$ y tal que $\varphi$ y $\varphi^{-1}$ sean de clase $C^k$. Una clase de equivalencia para esta relación de equivalencia se denomina una napa geométrica de clase $C^k$. Todo representante $(D, f)$ se denomina una representación paramétrica de la napa geométrica.

• *Progresión geométrica.* — Sinónimo de sucesión geométrica.

• *Serie geométrica.* — Serie de término general $a^n$ con $a \in \mathbf{C}$. Converge si y solamente si $|a| < 1$; su suma vale entonces $1/(1 - a)$. En la serie $\Sigma(1/2)^n$, cada término es igual a la suma de todos los siguientes. Sin haberlo demostrado, se supone que es la única serie que goza de esa propiedad.

• *Simplice geométrico.* — V. SIMPLICE.

• *Sucesión geométrica de razón* $a \in \mathbf{C}$. — Sucesión de término general $k \cdot a^n$. Puede ser definida por recurrencia por $u_0 = k$ y $u_n = a \cdot u_{n-1}$ para $n \geqslant 1$.

• *Suma geométrica.* — Utilizada antiguamente en mecánica como sinónimo de resultante general.
V. RESULTANTE.

• *Transformación geométrica en un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Aplicación de $\mathcal{E}$ en sí mismo. En $\mathbf{R}^2$, las aplicaciones afines y las inversiones son transformaciones geométricas.

• *Vector geométrico.* — Elemento del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.
V. VECTOR.

## Geometrografía

Ciencia de las construcciones con regla y compás.
V. CONSTRUCCIÓN.

## Gergonne, Joseph Diaz (1771-1859)

• *Punto de Gergonne de un triángulo* ABC. — Sean M, N y P los puntos de contacto del círculo inscrito en el triángulo con los lados BC, CA y AB. Las rectas AM, BN y CP concurren en un punto llamado punto de Gergonne del triángulo ABC.

## Germen

• *Germen de una función numérica continua en un punto x de un espacio topológico* X. — Sobre el conjunto $\Phi$ de las funciones numéricas continuas sobre un entorno de $x$ se define una relación de equivalencia $\sim$ por $f \sim g$ si y solamente si existe un entorno de $x$ sobre la que $f$ y $g$ coinciden. Se llama germen de una función $f \in \Phi$ a la clase de equivalencia de $f$ para la relación $\sim$.

## Gibbs, Josiah Willard (1839-1903)

• *Fenómeno de Gibbs.* — En el entorno de un punto de discontinuidad de primera especie de una función $f$ periódica y continua por trozos sobre un intervalo cerrado de **R**, una suma parcial de orden $n$ de la serie de Fourier de $f$ no siempre da una buena aproximación de $f$; incluso escogiendo $n$ muy grande, puede haber una desviación de cerca de 10%. Este fenómeno se conoce bajo el nombre de fenómeno de Gibbs.

## Giga

V. MÚLTIPLE.

## Girard, Albert (1595-1632)

• *Teorema de Girard.* — El área de un triángulo esférico sobre una esfera de radio R es igual a $R^2(A + B + C - \pi)$, donde A, B, C son las medidas en radianes de los ángulos del triángulo.

## Gleason, Andrew Mattei (1921- )

• *Teorema de Gleason y Montgomery.* — Todo grupo topológico finito y continuo es un grupo de Lie. Es la solución del quinto problema de Hilbert que trataba de «librar la teoría de Lie de sus hipótesis de diferenciabilidad».

## Global

• *Cuerpo global.* — Extensión algebraica finita de **Q** o de $F_p(X)$ ($p$ primo). V. LOCAL.

• *Propiedad global.* — Expresión utilizada en análisis y, por analogía en otros dominios, por oposición a propiedad local. Por ejemplo, la propiedad de una función numérica de estar acotada sobre un intervalo de **R** es una propiedad global porque hace intervenir todos los números reales del intervalo. Por el contrario, el límite de una función en un punto $x_0$ es una propiedad local porque hace intervenir los números reales situados en un entorno de $x_0$. V. LOCAL.

## Globalmente

• *Figura globalmente invariante.* — V. INVARIANTE.

## Gödel, Kurt (1906-1978)

• *Número de Gödel.* — Dada una teoría cuyo conjunto de constantes es finito, a cada símbolo $s$ de su lenguaje L se asocia uno, y uno sólo, entero positivo denotado $ng(s)$ llamado número de Gödel de $s$. Sea $A = s_0 s_1 \dots s_n$ un ensamblaje, el número de Gödel de A es, por definición, el entero $ng(A) = 2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_1} \pm \dots + 2^{\alpha_n}$, donde:

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{j} ng(s_i).$$

Por este procedimiento puede definirse un número de Gödel para todo término, toda fórmula, toda demostración de la teoría. Estos números intervienen en el estudio de fórmulas compatibles.

• *Teorema de completitud de Gödel.* — Si una fórmula se realiza en todos los modelos de una teoría de primer orden, entonces es demostrable en esa teoría. También se puede enunciar: para toda teoría de primer orden, una fórmula es demostrable si y solamente si es válida (en esta teoría, los términos y las fórmulas válidas coinciden). Este resultado mixto une el estudio de las interpretaciones (semántica) al aspecto formal (sintaxis). De ello se desprende que toda teoría dada a partir del cálculo de los predicados mediante axiomas enunciados en términos constantes, de funciones y de relaciones, es formalizable (en particular, el cálculo mismo de los predicados).

• *Teoremas de Gödel:*

1) Si la teoría de los conjuntos es no contradictoria, puede añadirse a sus axiomas la hipótesis del continuo.
V. COHEN.
2) La hipótesis generalizada del continuo es verdadera para los conjuntos constructibles.

• *Teoremas de completitud de Gödel:*

1) Si la aritmética formal es no contradictoria, existe una fórmula F de la aritmética formal tal que ni F ni no-F sean demostrables en esa teoría. En otros términos, si la aritmética formal no es contradictoria, no es una teoría completa.

2) Si la aritmética formal es no contradictoria, su no-contradicción no es demostrable por métodos formalizables en la aritmética formal. Este resultado asestó un golpe fatal al programa formalista de Hilbert.

## Goldbach, Christian (1690-1764)

• *Conjeturas de Goldbach.* — Se denomina así a dos problemas planteados por Goldbach a Euler en 1742. — Estas conjeturas afirman que todo entero par $n \geqslant 4$ es suma de dos números primos (citado en el octavo problema de Hilbert) y que todo entero par $n \geqslant 9$ es suma de tres números primos. Estas conjeturas siguen abiertas, a pesar de los importantes progresos debidos especialmente a Vinogradov (1937), a Chen (1973) y a Vaugham (1975).
V. CHEN, VAUGHAM, VINOGRADOV.

## Goniometría

Ciencia y técnica de la medida de los ángulos. Este término designó también un acercamiento algebraico de la trigonometría.

## Goniómetro

Instrumento que sirve para medir los ángulos.

## Googol

La manipulación de números gigantescos, sin comparación con los de la vida corriente, ha llevado a algunos matemáticos a introducir una terminología particular para algunos de ellos. Bautizado (mediante deformación del nombre del escritor Gogol), el googol, el número $10^{100}$, formado de 1 seguido de 100 ceros, fue imaginado por Kastner con destino a un joven pariente para habituarle a los grandes números.
V. GOOGOLPLEX, GRANDES (Números).

## Googolplex

Expresión propuesta por Kastner para $10^{\text{googol}}$; se trata, por tanto, de un número que se escribe con un 1 seguido de un googol de ceros, es decir, de $10^{100}$ ceros.
V. GOOGOL, GRANDES (Números).

## Gorro

• *Gorro cruzado.* — V. CRUZADO.

## Gosset, William S. (1876-1937)

Verdadero nombre del estadístico más conocido bajo el seudónimo de Student.
V. STUDENT.

## Gould, I. J.

• *Número de Gould.* — Es el número:

$$\left[\frac{\text{Log}(640.320^3 + 744)}{\pi}\right]^2 = 163,$$

seguido de treinta ceros, luego de 2, etc.
Inventado por I. J. Gould, en 1972, a partir de un estudio de Ramanujan (1913) sobre $e^{\pi}\sqrt{163}$, es trascendente y constituye la mejor aproximación conocida de un entero por un número trascendente.

## Goursat, Edouard Jean-Baptiste (1858-1936)

• *Núcleo de Goursat.* — Núcleo $G : (s, t) \mapsto G(s, t)$ definido sobre el dominio $[\![a, b]\!] \times [\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}^2$ y con valores reales que puede escribirse:

$G(s, t) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(s)\beta_i(t)$, donde los $\alpha_i$ y $\beta_i$ son funciones reales definidas sobre $[\![a, b]\!]$.

## grad

V. GRADIENTE.

## Gradiente

• *Gradiente de una función f de* $\mathbf{R}^n$ *en* $\mathbf{R}$, *diferenciable sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^n$. — Campo de vectores denotado $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ y definido por:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i,$$

donde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ es la base canónica ortonormada de $\mathbf{R}^n$. El gradiente es un operador diferencial.

## Grado

• *Grado o grado sexagesimal.* — V. SEXAGESIMAL.

• *Grado de ambigüedad de un teorema.* — V. AMBIGÜEDAD.

• *Grado de pertenencia.* — V. FLOU. (BORROSO.)

• *Grado de una curva algebraica de ecuación cartesiana* $f(x, y) = 0$. — Grado del polinomio $f$. También se denomina el orden de la curva.

• *Grado de una ecuación algebraica* $P(x) = 0$. — Grado del polinomio P. V. CUARTO, *n*-ÉSIMO, PRIMERO, QUINTO, SEGUNDO, TERCERO.

• *Grado de una extensión* E *de un cuerpo* K. — Dimensión del K-espacio vectorial E. Se lo denota [E : K]. Por ejemplo:

$$[\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q}] = 2 \text{ y } [\mathbf{Q}_n:\mathbf{Q}] = \varphi(n).$$

• *Grado de una función homogénea.* — V. HOMOGÉNEA.

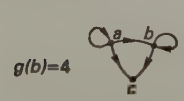
• *Grado de una forma diferencial.* — V. DIFERENCIAL.

• *Grado de un polinomio no nulo en una indeterminada* $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *con* $a \neq 0$. — El entero $n \geqslant 0$. Los polinomios 1, $X^2$, $1 + X^3$ son, respectivamente, de grado 0, 2 y 3.

• *Grado de un polinomio en varias indeterminadas.* — Grado total del polinomio.
V. POLINOMIO.

• *Grado parcial y grado total de un polinomio en varias indeterminadas.* — V. POLINOMIO.

• *Grado de un vértice x de un grafo.* — El entero $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$, donde $d^+(x)$ y $d^-(x)$ son los semi-grados exterior e interior de $x$. Es el número de arcos que admiten uno de sus extremos en $x$, contándose dos veces cada rizo.




• *Grado de una superficie algebraica de ecuación cartesiana* $f(x, y, z) = 0$. — Grado del polinomio $f$. También se le llama el orden de la superficie.

## Grado centesimal

Unidad de medida de los ángulos y de los arcos de círculos tal que un ángulo llano o un semi-círculo mide 200 grados (se nota 200 gr.).
V. MEDIDA.

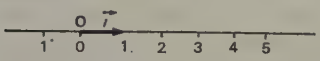
## Graduación

• *Graduación de una recta afín.* — Sea $(O, \vec{i})$ un sistema de referencias cartesiano de una recta afín D. En el primer ciclo de la enseñanza secundaria se

llama graduación de D a la biyección de D sobre R que, a todo punto de M de D, asocia su abscisa.
V. GRADUADA.

## Graduada

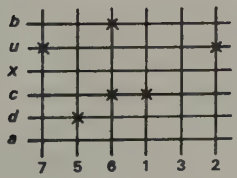
• *Recta graduada.* — Par (D, $f$), donde D es una recta afín y $f$ una graduación de D.

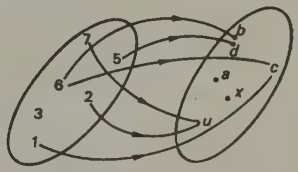



Una regla graduada «en centímetros» esquematiza una recta graduada.

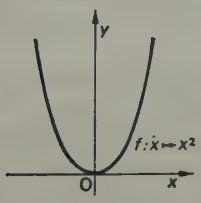
## Gráfica

• *Representación gráfica de una relación o de una función.* — Representación esquemática de su grafo. Para una relación R de un conjunto finito A hacia un conjunto finito B, citemos la representación cartesiana (dibujo de la izquierda) y la representación sagital (a la derecha).




En el caso de una función real de variable real, la representación gráfica utilizada es a menudo la representación cartesiana, que no es otra cosa que el dibujo de la curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$.




V. BARRAS (Diagrama de), HISTOGRAMA, SAGITAL (Diagrama).

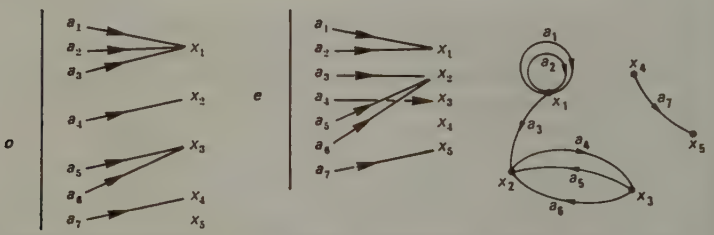
## Grafo

En teoría de los grafos, un grafo viene intuitivamente dado por un conjunto de «puntos» (vértices) y un conjunto de «lazos», estando establecido cada lazo entre dos puntos distintos o no. Según sus naturalezas, los lazos se esquematizan por una flecha (arco) o por un trazo (arista) que une un par de vértices; de ahí las nociones de grafo orientado y de grafo no orientado. Para los autores de lengua francesa, la palabra grafo es generalmente sinónimo de grafo orientado; para los de lengua inglesa, grafo es generalmente sinónimo de grafo no orientado. Es el primer punto de vista el que ha sido adoptado en este diccionario. En el sentido tradicional —que tiende a abandonarse— y en la terminología de las ciencias experimentales y de las técnicas, la palabra «grafo» se toma en el sentido de representación gráfica de una función, es decir, de: curva o superficie que representa esa función. Es fácil remitir esta significación a un caso particular del sentido general.

• *Grafo o grafo orientado.* — Cuadrúpleto (S, U, *o*, *e*), donde:

— S es un conjunto finito o numerable cuyos elementos se llaman vértices;
— U es un conjunto finito o numerable cuyos elementos se denominan arcos;
— *o* es una aplicación de U en S llamada aplicación-origen (o aplicación inicial);
— *e* es una aplicación de U en S llamada aplicación-extremidad (o aplicación terminal).

Ejemplo:




$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$
$$U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}.$$

A menudo un arco es identificado con el par de sus extremidades; U es entonces una familia finita o numerable de elementos de S × S y el grafo es denotado (S, U).

V. Adjunto, Antinudo, Arbol, Arco, Arista, Bicromático, Bipartido, Bipartido-completo, Bosque, Cadena, Camino, Ciclo, Ciclomático (Número), Circuito, Clique, Cociclo, Cociclomático (Número), Cocircuito, Complementario, Completo, Conexo, Contractado, Cromático (Número), Dual, Euler-Poincaré (Característica de), Euleriano, Finito, Funcional, Género, Grundy (Función de), Hamiltoniano, Kuratowski, Matriz, Multigrafo, Nudo, Orden, Parcial, Planario, Raíz, Representable, Rizo, Simple, Sub-grafo, Topológico.

• *Grafo de un conjunto* E *hacia un conjunto* F. — Subconjunto del producto cartesiano E × F.
V. FUNCIONAL (Grafo).

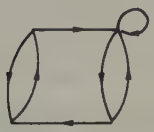
• *Grafo de una relación.* — V. RELACIÓN.

• *Grafo k-cromático.* — V. CROMÁTICO.

• *Grafo no orientado.* — V. ORIENTADO.

• *Grafo no orientado (resp. orientado) asociado a un grafo orientado (resp. no orientado).* — V. ORIENTADO.

• *n-grafo.* — Un grafo orientado se llama un *n*-grafo si para todo par $(x, y)$ de vértices, el número de arcos de extremidad inicial $x$ y de extremidad inicial $y$ es inferior a $n$, siendo $n$ el número alcanzado para un par de vértices por lo menos.



1-grafo

3-grafo

Al identificar un arco con el par de sus extremidades, los 1-grafos son los grafos de las relaciones binarias sobre un conjunto finito o numerable.
V. ANTISIMÉTRICO, REFLEXIVO, SIMÉTRICO, TRANSITIVO.

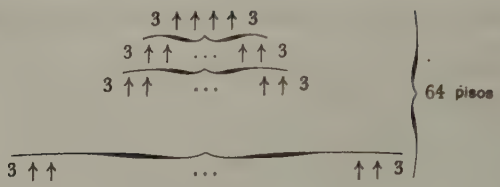
• *Teorema del grafo cerrado.* — V. CERRADO.

• *Teoría de los grafos.* — Sin constituir realmente una teoría, los grafos han aparecido en el estudio de los problemas aislados, como los de los siete puentes de Könisberg, de la coloración de mapas, de los tres pozos y de las tres casas, geometría de los poliedros, etc., así como en varias ramas de las ciencias: química, electricidad, sociología, etc. Estos treinta últimos años, tras los desarrollos de la investigación operacional y de teorías nuevas (teoría de los juegos estratégicos, teoría de las redes, etc.), diversos trabajos, en particular los de Claude Berge y de su escuela en Francia, han permitido a la teoría de los grafos tomar forma y mantener relaciones fecundas con el Algebra, la Combinatoria, la Topología combinatoria, la Topología algebraica y la Lógica matemática.

F. LL.

## Graham, Ronald (1936- )

• *Número de Graham.* — Número que interviene como extremo superior en un problema de combinatoria. Es el mayor número jamás utilizado en una demostración matemática. Con la notación de Knuth, se escribe:




V. GRANDES (Números), KNUTH.

## **Gram,** Jorgen Pedersen (1850-1916)

• *Determinante de Gram de los vectores* $x_1, ..., x_n$ *de un espacio vectorial* E *de dimensión n con relación a una forma bilineal* $\Phi$. — Determinante de la matriz de Gram de esos vectores. Tenemos:

$$\det(\text{gram}_\Phi(x_1, ..., x_n)) = [\det_B(x_1, ..., x_n)]^2 \cdot \Delta_B(\Phi),$$

donde $\Delta_B(\Phi)$ es el discriminante de $\Phi$ con relación a una base B de E. Cuando $\Phi$ es no degenerada, $\det(\text{gram}_\Phi(x_1, ..., x_n))$ es no nulo si y solamente si los vectores $x_1, ..., x_n$ son independientes.

• *Matriz de Gram de los vectores* $x_1, ..., x_n$ *de un espacio vectorial de dimensión n con relación a una forma bilineal* $\Phi$. — Matriz cuadrada:

$$\text{gram}\,\Phi(x_1, ..., x_n) = (\Phi(x_i, x_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$$

• *Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.* — Sean $\Phi$ una forma bilineal simétrica definida sobre un K-espacio vectorial E de dimensión finita $n$ y $B = (e_1, ..., e_n)$ una base de E.
Existe por lo menos una base $B' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de E ortogonal para $\Phi$ tal que la matriz de paso de la base B a la base B' sea triangular inferior. La base B' se llama deducida de la base B por el método de ortogonalización de Gram-Schmidt. En la práctica, se toma $\varepsilon_1$ colineal con $e_1$ y para $i \geqslant 2$ se escoge un vector $\varepsilon_i$ ortogonal al sub-espacio vectorial engendrado por:

$$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{i-1}, e_i).$$

En el caso en que E sea un espacio vectorial euclídeo o hermitiano, un método análogo llamado ortonormalización de Gram-Schmidt permite obtener a partir de una base de E una base B' ortonormada.

## Gramática

• *Gramática formal sobre un alfabeto.* — V. FORMAL.

• *Lenguaje engendrado por una gramática formal.* — V. FORMAL.

## Grande

• *Círculo máximo de una esfera de centro* O. — Intersección de un plano que pasa por O con la esfera.

• *Eje mayor de una elipse.* — Segmento AA' sobre el eje focal, donde A y A' son los vértices de la elipse.

• *Elemento máximo de una parte* A *de un conjunto ordenado* E. — Elemento de A superior a todos los elementos de A. Toda parte acotada de N admite un elemento máximo. Por el contrario, un intervalo abierto $]x, y[$ de **R**, aunque posee un extremo superior, no admite un elemento máximo.

• *Infinitamente grande.* — Se llama infinitamente grande en un entorno de $x_0 \in \mathbf{R}$ a una función numérica de variable real, definida en el entorno de $x_0$, tal que el valor absoluto de $f(x)$ tiende hacia infinito cuando $x$ tiende hacia $x_0$. Se define de manera análoga un infinitamente grande en un entorno de $+\infty$ ó de $-\infty$.

• *Líneas de máxima pendiente de una superficie.* — Líneas de thalweg.

• *Semi-eje de una elipse.* — Sinónimo de semi-eje focal.
V. FOCAL.

## Grandes

• *Enteros o números reales infinitamente grandes.* — Se llama así, en análisis no estándar, a elementos de $^*\mathbf{Z}$[resp. de $^*\mathbf{R}$] superiores a todo elemento de **Z** [resp. de **R**].

• *Leyes de los grandes números.* — Nombre dado a dos teoremas de probabilidades. Se distingue la ley fuerte de los grandes números debida a E. Borel (1900) y la ley de los grandes números propiamente dicha, calificada a veces de débil por oposición a la primera.

• *Ley débil de los grandes números.* — Sea $(X_n)_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias sobre un mismo espacio de probabilidad, independientes dos a dos, todas las cuales tienen la misma distribución y admiten una esperanza matemática M y una desviación típica $\sigma$. La ley débil de los grandes números afirma que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mathrm{M}\right| \geqslant \varepsilon\right)\right] = 0.$$

En el caso particular importante en que para todo $n \geqslant 1$ la variable $X_n$ sea de Bernoulli, esta ley lleva el nombre de teorema de Bernoulli.
V. BERNOULLI.
Numerosos fenómenos físicos ilustran la ley de los grandes números. Por ejemplo, las moléculas de un gas, que tienen velocidades y trayectorias aleatorias, provocan, cuando su número es muy grande, una presión sobre las paredes de un recipiente que es prácticamente constante.

• *Ley fuerte de los grandes números.* — Sea $(X_n)_{n\geqslant 1}$ una serie de variables aleatorias sobre un mismo espacio de probabilidad, mutuamente independien-

tes, todas las cuales tienen la misma distribución y admiten una esperanza matemática M y una desviación típica $\sigma$. La ley fuerte de los grandes números afirma que:

$$P\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=M\right)=1.$$

Un caso particular importante es aquél en que las variables $X_n$ son de Bernoulli; dado un suceso A de probabilidad $p$ cuya realización es el resultado aleatorio de una prueba, si se repite la prueba indefinidamente en las mismas condiciones, la probabilidad de que la frecuencia $f_n$ de realización de A tras $n$ pruebas tiende hacia $p$ cuando $n$ tiende hacia el infinito es igual a 1. Por ejemplo, en el juego de cara o cruz, con una probabilidad igual a 1, la frecuencia de los lados «cara» tiende hacia 1/2 cuando el número de jugadas tiende al infinito.

• *Grandes números.* — A continuación damos algunos de los grandes números finitos presentados en este diccionario:

| N | *Número de cifras de* N |
|---|---|
| $F_7 = 2^{2^7} - 1$ | 39 |
| $141 \times 2^{141} + 1$ | 43 (N es el número más pequeño primo de Cullen) |
| Googol | $100 = 10^2$ |
| 1.000! | 2.568 |
| $2^{21.701} - 1$(Número de Michel Laura y Moll Curt) | 6.533 (N es el 25.° número de Mersenne) |
| $(\text{Googol})^{100}$ | $10.000 = 10^4$ |
| $F_{36}$ | $\simeq 2 \cdot 10^{13}$ |
| Googolplex | $10^{100}$ |
| $F_{1.945}$ | $\simeq 10^{600}$ |
| Número de Skewes | $\simeq 10^{10^{34}} = 10^{10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000}$ |
| Número de Folkman | $10^6$ |
| Número de Graham | V. Graham |

Las ciencias experimentales jamás han producido hasta la fecha números superiores al número de Folkman. Otros números (de Ramsey, de Graham, etc.), que se encuentran sobre todo en combinatoria o en teoría de los grafos, son fantásticamente más grandes que los precedentes.
V. GRAHAM, KNUTH.

## **Grassmann,** Herman Günther (1809-1877)

• *Relación de Grassmann.* — Para dos sub-espacios vectoriales V y W de un espacio vectorial E, tenemos:

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

## Gravedad

• *Centro de gravedad de un dominio cubicable* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbf{R}^3$ *de volumen* V. — Punto G cuyas coordenadas cartesianas son:

$$x_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy\,dz,$$

$$y_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy\,dz$$

y

$$z_G = \frac{1}{V}\iiint_{\mathcal{D}} z\,dx\,dy\,dz.$$

El centro de gravedad de un poliedro es el centro de gravedad del sistema de sus vértices. Para el tetraedro es el punto de concurrencia de las cuatro rectas que pasan por un vértice y el centro de gravedad de la cara opuesta a ese vértice.

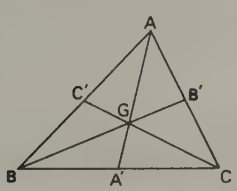
• *Centro de gravedad de un dominio cuadrable* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbf{R}^2$ *de área* A. — Punto G cuyas coordenadas cartesianas son:

$$x_G = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} x\,dx\,dy$$

e

$$y_G = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} y\,dx\,dy.$$

El centro de gravedad de un polígono plano es el centro de gravedad del sistema de sus vértices. Para un triángulo, es el punto de concurrencia G de las tres medianas AA', BB' y CC'. Verifica: GA = 2GA', GB = 2GB' y GC = 2GC'.




• *Centro de gravedad de un sistema de puntos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *de un espacio afín* E. — Baricentro de los puntos $A_i$ afectados de coeficientes no nulos todos iguales.

• *Centro de gravedad de un sistema material.* — En mecánica, se llama así al centro de inercia del sistema. El centro de gravedad de un sólido S no homogéneo no coincide necesariamente con el centro de gravedad (matemático) del dominio de $\mathbf{R}^3$ cuyos puntos son los de S. En el caso de un sólido S homogéneo, los dos centros coinciden.

V. INERCIA.

## Grèbe, Ernst Wilhelm (1804-1874)

• *Punto de Grèbe.* — Nombre dado por los autores alemanes al punto de Lemoine.

## Greco-latino

• *Cuadrado greco-latino de orden n.* — Cuadro o tablero cuadrado de pares obtenido superponiendo dos cuadrados latinos de orden $n$ de forma que los $n^2$-pares obtenidos sean distintos dos a dos; su nombre procede del uso simultáneo de letras griegas y latinas, que permite no confundir los dos términos de cada par. Se dice también cuadrados bilatinos o cuadrados latinos ortogonales. La teoría de los cuadrados grecolatinos se apoya en la teoría de los cuerpos finitos. Interviene en geometría proyectiva, en geometrías finitas y en combinatoria.

La novela de Georges Perec *La vie Mode d'emploi* está construida teniendo en cuenta las restricciones de un cuadrado greco-latino de orden 10.

V. EULER (Conjetura de), OFICIALES (Problema de los 36).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha a$ | $\beta b$ | $\gamma c$ | $\delta d$ |
| $\gamma b$ | $\delta a$ | $\alpha d$ | $\beta c$ |
| $\delta c$ | $\gamma d$ | $\beta a$ | $\alpha b$ |
| $\beta d$ | $\alpha c$ | $\delta b$ | $\gamma a$ |

## Green, George (1793-1841)

• *Fórmula de Green.* — Sea D un dominio limitado de $\mathbf{R}^3$ cuya frontera S es una superficie cerrada y cuadrable y sean P y Q funciones continuas que admiten derivadas parciales segundas continuas en $D \cup S$. La fórmula de Green afirma que:

$$\iiint_D (P\Delta Q - Q\Delta P)\,dx\,dy\,dz = \iint_S \left\{ P\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\alpha + \frac{\partial Q}{\partial y}\beta + \frac{\partial Q}{\partial z}\gamma\right] - Q\left[\frac{\partial P}{\partial x}\alpha + \frac{\partial P}{\partial y}\beta + \frac{\partial P}{\partial z}\gamma\right]\right\} d\sigma$$

donde $\Delta$ designa al laplaciano y $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, los componentes del vector unitario normal a S dirigido «hacia el exterior» de S.

V. OSTROGRADSKI.

• *Fórmula de Green-Riemann.* — Sea D un dominio de $\mathbf{R}^2$ cuya frontera es una curva $\Gamma$ de representación paramétrica $y = y(t)$ y $x = x(t)$, donde $x$ e $y$ son funciones continuas, y sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ funciones continuas cuyas derivadas parciales de orden uno existen y son continuas sobre $D \cup \Gamma$. La fórmula de Green-Riemann afirma que:

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

## Greenspan, Donald (1928- )

• *Problema de Greenspan.* — ¿Existe en un espacio euclídeo de tres dimensiones una curva cerrada tal que tres puntos cualesquiera de la curva no estén alineados y cuatro puntos cualesquiera no estén sobre una circunferencia?

## Grosera

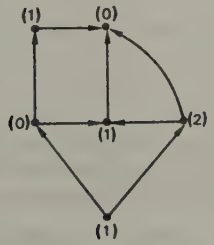
• *Topología grosera sobre un conjunto* E. — Topología sobre E cuyos abiertos únicos son $\phi$ y E. Es la topología menos fina definida sobre E. Es no separada, por tanto, no metrizable.

## Grundy, P. M. (1917-1959)

• *Función de Grundy.* — Sea G = (S, U) un 1-grafo antisimétrico finito. Una aplicación $g$ de S en N es una función de Grundy si, para todo vértice $x$, $g(x)$ es el entero natural más pequeño que no pertenece al conjunto de los valores $g(y)$ retenidos por los sucesores $y$ de $x$. En otros términos:

$$g(x) = \text{Inf}\{N - \{g(y)/y \in \Gamma^+(x)\}\}.$$

Una tal función puede no existir. Si existe, no es necesariamente única. Las funciones de Grundy se utilizan en la aplicación de los grafos a la teoría de los juegos (por ejemplo, de Nim), en el estudio del número cromático, etc.




## Grupo

Par (G, *) en el que * (estrella) es una ley de composición interna sobre G, asociativa, que posee un elemento neutro y tal que todo elemento de G admite un simétrico para esta ley. Así, $(\mathbf{R}, +)$ $(\mathbf{R}^*, \cdot)$, $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$, $(S_n, \cdot)$ y $(GL(E), \circ)$ son grupos. Si no hay ambigüedad sobre la ley, se habla del grupo G. Este término apareció por primera vez en los trabajos de Galois sobre la resolución de las ecuaciones algebraicas para designar sub-grupos de $S_n$. Pero hubo que esperar a Cayley para que fuera dada una definición formal y a Frobenius para que apareciese la definición que se utiliza en la actualidad. Restringida en sus inicios a grupos que operaban sobre conjuntos, esta noción ocupó desde entonces un lugar central en el edificio matemático.

V. Abeliano, Aditivo, Afín, Alternado, Angulos, Arquimediano, Base, Carácter, Cíclicos, Clases, Clásicas, Cociente, Conmutadores, Conmutativo, Conway, Cuaternios, Derivado, Discreto, Especial, Finito (Tipo), Fischer, Fundamental, Galois, Indice, Isotropía, Klein, Libre, Ligado, Lineal, Lorentz, Mathieu, Modular, Monógeno, Multiplicativo, Nudo, Operadores, Operante, Orden, Ordenado, Ortogonal, Perfecto, Poincaré, Proyectivo, Realización, Rectángulo, Representación, Resoluble, Rotaciones, Simétrico, Simple, Simpléctico, Sub-grupo, Sylow, Topológico, Transformaciones (de), Trayectoria, Unidades, Unimodular, Unitarios.

- *Semi-grupo.* — Sinónimo de monoide.
- *Ecuación del primer grado en un grupo.* — V. Primer.

## Grupoide

Sinónimo de magma.

## Gudermaniano (Gudermann, Christophe, 1798-1851)

Sea $x$ un número real. El gudermaniano de $x$ es el real del intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ denotado $\mathrm{Gd}\,x$ tal que $\mathrm{tg}\,(\mathrm{Gd}\,x) = \mathrm{sh}\,x$. También verifica:

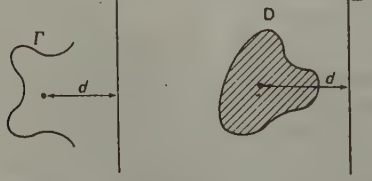
$$\cos(\mathrm{Gd}\,x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,x}.$$

## Guldin, Paul (1577-1643)

- *Teoremas de Guldin:*

1) Sea $\Gamma$ un arco de curva plana rectificable de longitud L sin puntos comunes con una recta $\Delta$ de su plano. El área de la superficie de revolución engendrada por $\Gamma$ girando alrededor de $\Delta$ es igual a $2\pi d$L, donde $d$ es la distancia del centro de gravedad de $\Gamma$ al eje $\Delta$.

2) Sea D un dominio plano cuadrable de área A sin puntos comunes con una recta $\Delta$ de su plano. El volumen del sólido engendrado por D girando alrededor de $\Delta$ es igual a $2\pi d$A, donde $d$ es la distancia del centro de gravedad de D al eje $\Delta$.



# H

## H

Cuerpo de cuaternios o cuaterniones de Hamilton.
V. CUATERNIOS.

## Haces

• *Haces de círculos conjugados.* — V. CONJUGADO (Haz).

## Hadamard, Jacques S. (1865-1963)

V. PRIMO (Número).

• *Desigualdad de Hadamard.* — Afirma que si D es el determinante de una matriz cuadrada $(a_{ij})$ de orden $n$, entonces: $D^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}^2\right)\cdots\left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}^2\right)$

• *Fórmula de Hadamard.* — Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ una serie entera de coeficientes complejos; si: $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$

existe, el radio de convergencia $\rho \in \overline{\mathbf{R}}$ de esa serie es dado por:

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}.$$

## Hadwiger, Hugo

• *Conjetura de Hadwiger.* — Sea $\zeta(G)$ el mayor número posible de $n$ vértices y de una $n$-banda contraída de un grado G. La conjetura de Hadwiger afirma que $\zeta(G)$ es superior o igual al número cromático de G.
La reciente resolución del problema de los cuatro colores permite probar que la conjetura de Hadwiger es verdadera para un grafo que no admite por contraído una 5-banda. En el caso general, esta conjetura todavía no estaba resuelta en 1979.

## Hahn, Hans (1879-1934)

• *Teorema de Hahn-Banach.* — Bajo una forma analítica, el teorema de Hahn-Banach se enuncia: sean E un espacio vectorial sobre **R** o **C**, $p$ una seminorma sobre E y F un sub-espacio vectorial de E. Dada una forma lineal $f$ sobre F tal que $|f(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in F$, existe por lo menos una forma lineal $\tilde{f}$ sobre E, que prolonga $f$ y que verifica $|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x)$ para todo $x \in E$. Bajo una forma geométrica se enuncia: sea X un abierto convexo no vacío de un espacio vectorial topológico E. Dada una variedad lineal afín Y de E que no encuentra X, existe un hiperplano afín cerrado H que contiene Y y que no encuentra X.

## Hamel, Georg (1877-1954)

• *Base de Hamel.* — El cuerpo **R** de los números reales admite una base (infinita) en tanto que **Q**-espacio vectorial; tal base se llama una base de Hamel.

## Hamilton, William Rowan (1805-1865)

• *Acción de Hamilton.* — Sea un sistema de puntos materiales cuyas relaciones eventuales son holónomas y perfectas y tal que las fuerzas que le son aplicadas deriven de un mismo potencial U (que puede depender del tiempo). Se llama acción de Hamilton o acción hamiltoniana entre los instantes $t_1$ y $t_2$ a la integral $\mathscr{A} = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,dt$, donde $L(q, \dot{q}, t)$ es la lagrangiana. El principio de menor acción de Hamilton afirma que la función $q$ que define el movimiento hace extremal la integral $\mathscr{A}$.

• *Cuaternios de Hamilton.* — V. CUATERNIOS.

• *Cuerpo de cuaternios de Hamilton.* — V. CUATERNIOS.

• *Función de Hamilton.* — Sinónimo de hamiltoniano.

• *Mecánica de Hamilton.* — La mecánica de Hamilton o mecánica hamiltoniana consiste en remitir el estudio de los movimientos de ciertos sistemas de puntos materiales al estudio geométrico del espacio de las fases que es el conjunto de las $2n$-uplas $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$, donde $q_1, ..., q_n$ son $n$ parámetros independientes que definen el movimiento, donde $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, y donde L es la lagrangiana. Esta mecánica permite estudiar movimientos que escapan a la mecánica lagrangiana e interviene en óptica, en mecánica cuántica, en mecánica estadística, etc.

• *Números de Hamilton.* — Sinónimo de cuaternios.

• *Sistema de ecuaciones de Hamilton o de Poisson-Hamilton de un movimiento.* — V. HAMILTONIANO.

• *Teorema de Hamilton.* — Los tres triángulos que se obtienen uniendo el

ortocentro con los tres vértices de un triángulo ABC tienen igual círculo de Euler que el triángulo ABC.

• *Teorema de Cayley-Hamilton.* — V. CAYLEY.

## Hamiltoniana

• *Acción hamiltoniana.* — Acción de Hamilton.

• *Cadena hamiltoniana de un grafo.* — Cadena que pasa una vez, y una sola, por cada vértice del grafo.

• *Función hamiltoniana.* — Sinónimo de hamiltoniano.

• *Mecánica hamiltoniana.* — Mecánica de Hamilton.

## Hamiltoniano

Sinónimo de nabla.

• *Hamiltoniano de un movimiento.* — Sea un sistema de puntos materiales sometidos eventualmente a relaciones holónomas y perfectas y tal que las fuerzas que le son aplicadas deriven de un potencial U (que puede depender del tiempo). Dado un sistema de parámetros independientes $(q_1, q_2, ..., q_n)$ que define la posición del sistema, se denomina hamiltoniano o función hamiltoniana a la transformada de Legendre del lagrangiano L considerado como una función de $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n)$. El hamiltoniano se denota H o $H(p, q, t)$ y tenemos:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \text{ donde } p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Se muestra que H es la energía total del sistema, es decir, la suma C + U de las energías cinética y potencial. El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, ..., n$$

se denomina sistema de ecuaciones canónicas o sistema de ecuaciones de Hamilton, o también sistema de ecuaciones de Poisson-Hamilton del movimiento.

• *Ciclo (resp. circuito, camino) hamiltoniano de un grafo.* — Ciclo (resp. circuito, camino) que pasa una vez y una sola por cada vértice del grafo.

• *Grafo hamiltoniano.* — Grafo que posee un ciclo hamiltoniano.

## Hamming, Richard W. (1915-1998)

• *Distancia de Hamming entre dos n-uplas* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$. — Número de pares $(a_i, b_i)$ tales que $a_i$ sea diferente de $b_i$.

## **Hankel,** Hermann (1837-1873)

• *Funciones de Hankel.* — Soluciones particulares de la ecuación diferencial de Bessel, denotadas $H_\lambda^1$ y $H_\lambda^2$, definidas por:

$$H_\lambda^1 = J_\lambda + iN_\lambda,$$
$$H_\lambda^2 = J_\lambda - iN_\lambda,$$

donde $J_\lambda$[resp. $N_\lambda$] es la función de Bessel [resp. de Neumann] de índice $\lambda$.
V. BESSEL, NEUMANN.

## **Hankel,** H. (1814-1899)

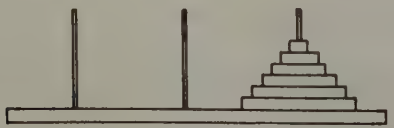
Saliendo del marco de las operaciones sobre los conjuntos de números, este lógico desarrolló la noción general de ley de composición sobre un conjunto.

## **Hanoi**

• *Torres de Hanoi.* — Juego construido por tres barras sobre una de las cuales se apilan discos de diámetros decrecientes de abajo a arriba. Una de las metas de este juego es reconstituir la «torre» sobre otra barra utilizando las reglas siguientes:

1) no se debe desplazar más que un solo disco a la vez de una barra a otra;
2) no se puede poner un disco sobre otro de diámetro inferior.

El número de golpes mínimo para desplazar una torre de $n$ discos según estas reglas es de $2^n - 1$.



## **Hardy,** Godefroy Harold (1877-1947)

• *Notaciones de Hardy.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones numéricas definidas sobre una parte D de **R**. La notación de Hardy $f \preccurlyeq g$ significa que $f$ es dominada por $g$ en el entorno de un punto adherente a D. La notación de Hardy $f \prec\prec g$ significa que $f$ es despreciable ante $g$ en un entorno de un punto adherente a D.
V. DESPRECIABLE, DOMINADA, LANDAU, WARING.

• *Teorema de Hardy.* — La función $\zeta$ de Riemann admite una infinidad de ceros cuya parte real es igual a $\frac{1}{2}$.
V. RIEMANN (Hipótesis de).

## Hart, Andrew Scarle (1811-1890)

• *Inversor de Hart.* — V. INVERSORES.

## Hasse, Helmut (1898-1979)

• *Diagrama de Hasse de una relación de orden sobre un conjunto finito.* — Diagrama obtenido simplificando el esquema sagital de la relación según el principio siguiente: los rizos son suprimidos; cuando una flecha va de $x$ a $y$ y otra va de $y$ a $z$, se suprime la flecha de $x$ a $z$; las flechas restantes se reemplazan por un simple trazo y los elementos se disponen de forma que un elemento preceda (en el sentido de la relación) a todo elemento situado más alto al que está ligado.

## Hausdorff, Felix (1868-1942)

• *Espacio de Hausdorff o espacio separado.* — Espacio topológico E que verifica el axioma $[T_2]$ de separación (o axioma de Hausdorff): cualesquiera que sean los puntos distintos $x$, $y$ de E, existe un entorno de $x$ y un entorno de $y$ sin punto común.
V. ACCESIBLE, FRÉCHET, KOLMOGOROV, NORMAL, REGULAR, SEPARACIÓN, URYSOHN.

• *Fórmula de Hausdorff.* — Sean $\alpha$, $\beta$ dos ordinales y $n \in \mathbf{N}^*$; tenemos:

$$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n}.$$

V. BERNSTEIN (Fórmula de).

• *Distancia de Hausdorff.* — Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de cerrados de un espacio métrico (E, $d$) cuya distancia $d$ es acotada. Para dos elementos cualesquiera A y B de $\mathscr{F}$, planteando: $h(A, B) = \text{Máx}\left(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\right)$ se define una distancia sobre $\mathscr{F}$ llamada distancia de Hausdorff.

• *Paradoja de la esfera de Hausdorff.* — V. ESFERA.

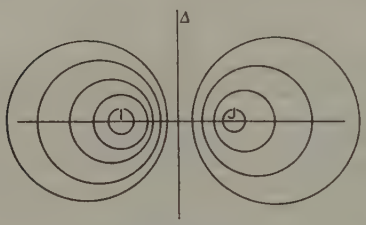
## Haz

• *Haz armónico.* — V. ARMÓNICO.

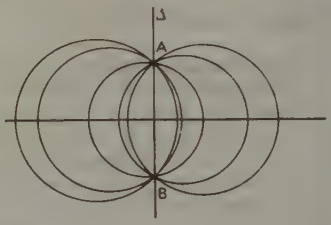
• *Haz de círculos.* — Haz lineal puntual $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^2$ engendrado por dos circunferencias no concéntricas o por una circunferencia y una recta. Todas las curvas de $\mathscr{C}$ son circunferencias, salvo una que es una recta $\Delta$ llamada eje radical del haz y que es tal que dos circunferencias cualesquiera de $\mathscr{C}$ admiten $\Delta$ como eje radical. Los centros de las circunferencias de $\mathscr{C}$ están alineados sobre una recta perpendicular a $\Delta$. Se distinguen tres tipos de haces de circunferencias.

* si $\Delta$ encuentra una circunferencia de haces en dos puntos distintos A y B, entonces todas las circunferencias del haz pasan por A y B. El haz se denomina de puntos de base A y B;

* si Δ no encuentra ninguna circunferencia del haz, existe en cada semi-plano limitado por Δ un único punto interior a todas las circunferencias del haz situadas en ese semi-plano. Los dos puntos I y J así definidos se denominan los puntos límites o puntos de Poncelet del haz;

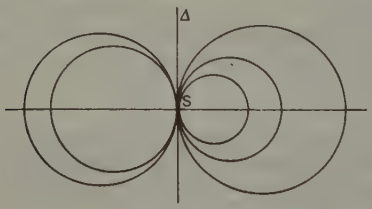



de puntos de Poncelet
(puntos límite)




de puntos de base

* si Δ es tangente en S a una de las circunferencias, entonces todas las circunferencias del haz son tangentes a Δ en S. El haz es denominado de punto singular S.
V.. CONJUGADO (Haz de circunferencias);



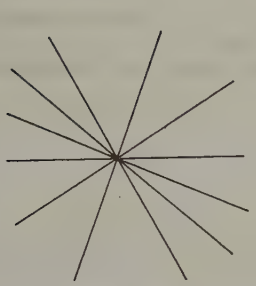

de punto singular

• *Haz de cónicas.* — Haz lineal puntual de $\mathbf{R}^2$ engendrado por dos cónicas $C_1$ y $C_2$. Es el conjunto de las cónicas que pasan por los cuatro puntos de intersección (eventualmente en el infinito) de las cónicas $C_1$ y $C_2$.

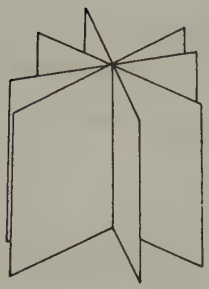
• *Haz de esferas.* — Haz lineal puntual $\mathcal{F}$ de $\mathbf{R}^3$ engendrado por dos esferas no concéntricas o por una esfera y un plano. Todas las superficies de $\mathcal{F}$ son esferas, salvo una que es un plano P. Dos esferas cualesquiera de $\mathcal{F}$ admiten P como plano radical. Los centros de las esferas están alineados sobre una recta perpendicular a P.

• *Haz lineal puntual.* — V. LINEAL.

• *Haz de planos.* — Haz lineal puntual $\mathcal{F}$ de $\mathbf{R}^3$ engendrado por dos planos distintos $P_1$ y $P_2$. Si $P_1$ y $P_2$ son paralelos, $\mathcal{F}$ es el conjunto de planos paralelos a $P_1$ y $P_2$, y si $P_1$ y $P_2$ se cortan según la recta D, es el conjunto de planos que contienen D.



haz de rectas



haz de planos

• *Haz de rectas.* — Haz lineal puntual $\mathcal{D}$ de $\mathbf{R}^2$ engendrado por dos rectas distintas $D_1$ y $D_2$. Si $D_1$ y $D_2$ son paralelas, $\mathcal{D}$ es el conjunto de las rectas paralelas a $D_1$ y $D_2$ y si $D_1$ y $D_2$ son secantes en O, es el conjunto de las rectas que pasan por O.

## Heawood, Percy John (1861-1955)

• *Conjetura de Heawood.* — Heawood (1890) había demostrado que una superficie $\Sigma$ diferente del plano o de la esfera y de característica de Euler-Poincaré $c$ tiene un número cromático inferior o igual a $H(c) = \left[\frac{7 + \sqrt{49 - 24c}}{2}\right]$, donde [ ] designa la función parte entera; a este resultado se le llama desigualdad de Heawood. Conjeturó entonces que el número cromático de $\Sigma$ es igual a $H(c)$. Esta conjetura fue completamente resuelta en 1968 por Ringel y Youngs, que mostraron que era falsa para la botella de Klein y verdadera para las demás superficies consideradas por Heawood. La resolución en 1976 del problema de los cuatro colores aportó una respuesta al caso del plano y de la esfera.
V. COLORACIÓN.

• *Desigualdad de Heawood.* — V. HEAWOOD (Conjetura de).

• *Teorema de Heawood.* — En el plano, cinco colores son suficientes para colorear todo mapa de geografía.
V. COLORACIÓN.

## Hecto

V. MÚLTIPLE.

## Heine, Heinrich Eduard (1821-1881)

• *Teorema de Heine.* — Una función continua de un espacio métrico compac-

to E con valores en un espacio métrico F es uniformemente continua. En particular, una función numérica definida y continua sobre un intervalo compacto $[\![a, b]\!]$ de **R** es uniformemente continua sobre ese intervalo.

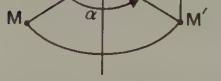
• *Teorema de Heine-Borel.* — Nombre dado en ciertos países al teorema de Borel-Lebesgue.

## Hélice

Curva izquierda cuya tangente en cada punto forma un ángulo constante con una dirección fija. Los radios de curvatura y de torsión de una hélice son proporcionales.
V. CIRCULAR.

## Helicoidal

• *Desplazamiento helicoidal o atornillamiento.* — Desplazamiento del espacio afín euclídeo $\mathbf{R}^3$ cuyo automorfismo ortogonal asociado es una rotación vectorial. Puede ser descompuesto en producto de una rotación afín de eje $\Delta$ (llamado eje del desplazamiento helicoidal) y de una translación de vector $\overline{V}$ paralelo a $\Delta$. Todo desplazamiento de $\mathbf{R}^3$ sin punto doble es un desplazamiento helicoidal tal que $\overline{V} \neq \overline{0}$. Es igualmente el producto de cuatro simetrías con relación a unos planos. El ángulo $\alpha$ de la rotación se llama ángulo del desplazamiento helicoidal.




• *Movimiento helicoidal de un sólido* S. — Un sólido S está animado de un movimiento helicoidal si se realizan las condiciones siguientes:

1) existe una recta $\Delta$ ligada al espacio móvil que se desliza sobre una recta fija $\Delta_1$;

2) la velocidad $g$ de deslizamiento a lo largo de $\Delta_1$ y la velocidad $w$ alrededor de $\Delta_1$ están ligadas por la relación $g = hw$, donde $h$ es una constante.

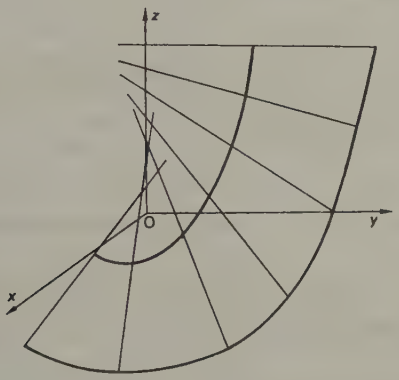
La trayectoria de cada punto del sólido es una hélice circular. El estudio del movimiento helicoidal es fundamental: un movimiento cualquiera de un sólido es tangente en cada instante a un movimiento helicoidal.

## Helicoide recto

Superficie reglada de $\mathbf{R}^3$ definida paramétricamente por:

$$x = t \cos \alpha$$
$$y = t \operatorname{sen} \alpha$$
$$z = \alpha$$

donde $(t, \alpha)$ describe $\mathbf{R}^2$.
Es engendrada por una recta variable $\Delta$ que encuentra el eje $Oz$ y una hélice circular de eje $Oz$, que queda paralela al plano $xOy$




## Helmholtz, Hermann von (1821-1894)

● *Ecuación de Helmholtz.* — Ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$$

donde $k$ es un escalar. Interviene en la búsqueda de soluciones de la ecuación de ondas.

## Hensel, Kurt (1861-1941)

● *Desarrollo de Hensel.* — V. *p*-ÁDICO.

## Hermite, Charles (1822-1901)

● *Funciones de Hermite.* — Funciones definidas por $\mathscr{H}_n(x) = e^{-x^2/2} \mathrm{H}_n(x)$, donde $\mathrm{H}_n$ es un polinomio de Hermite.

• *Polinomios de Hermite.* — Polinomios ortogonales sobre **R** por relación al peso $p(x) = e^{-x^2}$. Denotados $H_n$, verifican:

$$\frac{1}{2^p p! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p(x) H_q(x) e^{-x^2} dx = \delta_{p,q} \text{ (símbolo de Kronecker).}$$

Son dados por $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$, verifican la fórmula de recurrencia $H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_n(x) = 0$, son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, y son coeficientes del desarrollo en serie $e^{-t^2+2tx} = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$. Encontramos:

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \text{ etc.}$$

• *Teorema de Hermite.* — El número real *e* (número de Néper) es un número trascendente (1873). Este resultado proporciona la primera demostración de la trascendencia de una constante del análisis.
V. LINDEMANN, LIOUVILLE, TRASCENDENTE.

## Hermitiana

• *Aplicación semi-lineal asociada a una forma sesquilineal hermitiana.* — V. SEMI-LINEALES.

• *Forma cuadrática asociada a una forma sesquilineal hermitiana $\varphi$ sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Aplicación $q$ de E en K definida por $q(x) = \varphi(x, x)$. Si $\varphi$ es complejo, entonces $q(x)$ es un número real y $q(\alpha x) = \alpha \bar{\alpha} q(x)$ para todo $\alpha \in \mathbf{C}$.

• *Forma sesquilineal hermitiana sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Una forma sesquilineal $\varphi$ sobre E relativa a un automorfismo involutivo $\sigma$ de K se llama hermitiana si $\varphi(x, y) = \sigma[\varphi(y, x)]$ para todo par $(x, y) \in E \times E$. En caso en que $K = R$ y en que la aplicación $\sigma$ sea la identidad sobre **R**, la forma hermitiana es una forma bilineal simétrica sobre E. Si $K = \mathbf{C}$ y si $\sigma$ es la involución de **C** en **C** definida por $z \mapsto \bar{z}$, la forma hermitiana se denomina compleja.
V. DEFINIDA, INDEFINIDA, NEGATIVA, NÚCLEO, POSITIVA, RANGO.

• *Matriz hermitiana.* — Matriz A, de elementos complejos, igual a su adjunta: $A = {}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}$, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & j^2 \\ -i & 1 & j \\ j & j^2 & 2 \end{pmatrix}$$

• *Norma hermitiana.* — Norma definida sobre un espacio hermitiano E por:

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$$

donde $\varphi$ es la forma sesquilineal hermitiana sobre E.

## Hermitiano

• *Espacio hermitiano.* — Espacio prehilbertiano complejo cuya forma sesquili-

neal hermitiana es definida positiva. $\mathbf{C}^n$ provisto del producto hermitiano es un espacio hermitiano.

• *Producto hermitiano sobre* $\mathbf{C}^n$. — Forma sesquilineal hermitiana definida sobre $\mathbf{C}^n$ por $U \cdot V = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$ para toda $n$-upla $U = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{C}^n$ y toda $n$-upla $V = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{C}^n$.

## Hermítico

Sinónimo desusado de hermitiano.

## Herón de Alejandría (siglo I d. C.)

• *Fórmula de Herón de Alejandría.* — El área S de un triángulo cuyos lados tienen por longitud $a$, $b$ y $c$ es $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semi-perímetro del triángulo.

V. BRAHMAGUPTA.

## Heterogéneos

• *Números heterogéneos.* — Dos enteros naturales se llaman heterogéneos si sus factores primos son diferentes.
Ejemplo: $15 = 3 \times 5$ y $21 = 3 \times 7$.
V. HOMOGÉNEOS.

## Heterómeco

• *Número heterómeco o número oblongo.* — Entero de la forma $n(n+1)$, donde $n \in \mathbf{N}$.

## Hexaedro

Poliedro de seis caras. Existe un hexaedro regular: es el cubo.

## Hexagonales

• *Números hexagonales.* — V. POLIGONALES (Números).

## Hexágono

Polígono plano de seis lados.

V. BRIANCHON (Teorema de), CATALÁN (Hexágono de), LEMOINE (Hexágono de), PASCAL (Teorema de).

Hexágono convexo regular

## Hexagrama

• *Hexagrama místico.* — V. MÍSTICO.

## Hilbert, David (1862-1943)

Los trabajos de Hilbert modificaron profundamente las principales ramas de las matemáticas de la primera mitad del siglo XX: lógica, fundamentos de las matemáticas, teoría de números, álgebra, geometría algebraica, análisis, etcétera. Es, por tanto, imposible citar aquí todos los teoremas u objetos que llevan su nombre. Nos limitamos a los que se encuentran con mayor frecuencia.

• *Cubo de Hilbert.* — Conjunto de sucesiones $(x_n)_{n\geq 0}$ de elementos de intervalo $\mathbf{I} = [\![0, 1]\!]$ de $\mathbf{R}$ tales que $|x_n| \leqslant (1/2)^n$ para todo $n$. Es un espacio metrizable; generaliza en un espacio vectorial de dimensión infinita un cuadrado de $\mathbf{R}^2$ o un cubo de $\mathbf{R}^3$.

• *Espacio de Hilbert.* — Espacio prehilbertiano separado completo. Es una generalización en dimensión infinita de la noción de espacio euclídeo. Tal espacio es un espacio de Banach.

• *Problemas de Hilbert.* — En el II Congreso Internacional de Matemáticas (París, 1900), Hilbert enunció una lista de 23 problemas abiertos que guiaron y guían todavía numerosas investigaciones. Aunque relativos a dominios variados (teoría de conjuntos, lógica, física, teoría de investigaciones números, cálculo de variaciones, etc.), ninguno de estos problemas abordaba el cálculo de probabilidades. Cierto número de ellos están hoy resueltos, por ejemplo: la indecidibilidad de la hipótesis del continuo.
La lista siguiente no da más que una idea imprecisa: resume un texto de 34 páginas, las siete primeras de las cuales sitúan el entorno matemático y las cuestiones abiertas en 1900. Cada uno de los 23 problemas que Hilbert sacó a la luz está situado en su contexto (origen, resultados ya conseguidos) y reagrupa en realidad una o varias familias de cuestiones.
Un enunciado más preciso de algunos tendría que recurrir a conceptos especializados no definidos en esta obra.

1) Demostrar la hipótesis del continuo.

2) Estudiar la independencia y la no-contradicción de los axiomas de la aritmética.

3) Problema sobre los tetraedros.

4) Estudiar las geometrías en las que el segmento de recta entre dos puntos dados es el camino más corto entre esos dos puntos.
5) Bajo qué condiciones un grupo topológico puede ser dotado de una estructura del grupo de Lie.
6) Axiomatizar la física.
7) Establecer la trascendencia de ciertos números (por ejemplo: $2^{\sqrt{2}}$ o $e^{\pi} = i^{-2i}$).
8) Estudiar la distribución de los números primos; en particular, demostrar la hipótesis de Riemann.
9) Establecer una ley de reciprocidad en los cuerpos de números algebraicos.
10) Establecer métodos efectivos de resolución de las ecuaciones diofantianas.
11) Estudiar las formas cuadráticas sobre los cuerpos de números algebraicos.
12) Construcción de cuerpos de clases de los cuerpos de números algebraicos.
13) Mostrar la imposibilidad de la resolución de la ecuación general de grado 7 por la composición de funciones continuas de dos variables.
14) Determinación de ciertos anillos de invariantes.
15) Establecer los fundamentos de la geometría algebraica.
16) Problema sobre la topología de las curvas algebraicas y de las superficies.
17) Determinar las funciones racionales de coeficientes reales, que no toman más que valores positivos y sumas de cuadrados de funciones racionales.
18) Hallar una partición del espacio euclídeo en poliedros congruentes todos ellos con un poliedro dado.
19) Estudiar la analicidad de las soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales que provienen del cálculo de variaciones.
20) Estudiar el problema de Dirichlet en el marco más general.
21) Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales de un tipo dado.
22) Uniformizar las funciones analíticas complejas mediante la utilización de funciones automorfas.
23) Desarrollar el cálculo de variaciones.

● *Teorema fundamental de Hilbert (o de la base finita).* — Si A es un anillo noetheriano, también lo es de $A[X_1, ..., X_n]$. En particular, si K es un cuerpo, todo ideal de $K[X_1, ..., X_n]$ es de tipo finito, es decir, engendrado por un número finito de polinomios. De ello resulta que toda variedad algebraica es una reunión finita de variedades irreductibles, por ser única esa representación. Este resultado (conjeturado por P. Gordan) juega en geometría algebraica el mismo papel que el teorema fundamental de la aritmética (todo entero es, de forma única, producto de enteros primos) en teoría de números.
V. FINITA (Teorema de la base).

● *Teorema de los ceros de Hilbert o «Nullstellensatz».* — Clave de bóveda de la geometría algebraica, admite numerosos enunciados, de los que los dos más corrientes son los siguientes:

1) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado; todo ideal maximal I de $K[X_1, ..., X_n]$ es de la forma $(X_1 - a_1, X_2 - a_2, ..., X_n - a_n)$, donde $a_i \in K$. En otros términos, todo polinomio P de I puede escribirse:

$$P(X_1, ..., X_n) = \sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)\, G_k(X_1, ..., X_n).$$

V. MAXIMAL.

2) Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado e I un ideal de $K[X_1, ..., X_n]$.

Si $P \in K[X_1, ..., X_n]$ admite por raíz los ceros comunes a todos los polinomios de I, entonces existe un entero $r > 0$ tal que $P^r \in I$.

• *Teorema de las sicigias de Hilbert.* — V. SICIGIAS.

• *Teorema de Hilbert.* — Una superficie de curvatura negativa constante en el espacio real de tres dimensiones posee unas singularidades; ése es el caso, por ejemplo, de la pseudo-esfera; observemos que una superficie, como la esfera, de curvatura positiva constante no tiene singularidad.

## Hilbertiana

• *Base hilbertiana de un espacio prehilbertiano* E. — Familia de vectores de E ortonormal y total. El espacio vectorial engendrado por una base hilbertiana es denso en E. Un espacio de Hilbert admite necesariamente bases hilbertianas; son equipotentes.

• *Dimensión hilbertiana de un espacio de Hilbert* H. — Las bases hilbertianas de H son equipotentes; su cardinal se denomina la dimensión hilbertiana de H.

## Hilbertiano

• *Espacio hilbertiano.* — V. Espacio de Hilbert.

## Hill, George William (1838-1914)

• *Ecuación de Hill.* — Ecuación diferencial de la forma $y'' + \Phi(t)y = 0$, donde $\Phi$ es una función real de período $\pi$; proviene de un problema de astronomía. Si $\Phi(t) = \lambda - 2h^2 \cos 2t$, encontramos la ecuación de Mathieu.

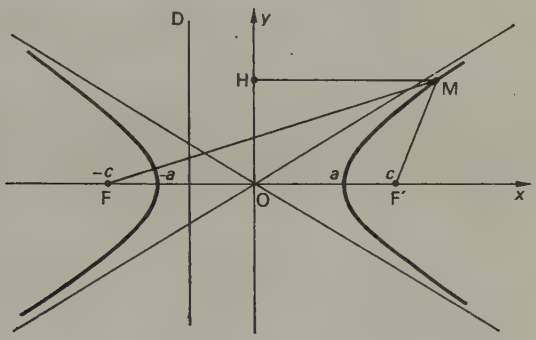
## Hipérbola

Cónica con centro cuya ecuación cartesiana con relación a un sistema de referencias ortonormado dado por sus dos ejes de simetría es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$. Admite dos asíntotas de ecuaciones $x = \frac{a}{b}y$ y $x = -\frac{a}{b}y$. Es la sección de un cono de revolución por un plano que encuentra las dos hojas del cono y que no pasa por su vértice. La hipérbola admite dos focos F y F'. La diferencia de las distancias de un punto de la hipérbola a los focos es constante en valor absoluto $|MF - MF'| = 2a$. Una hipérbola es asimismo el lugar de los puntos cuya relación MF/MH de las distancias a un punto fijo F y una recta fija D es constante y superior a 1. La ecuación polar de la hipérbola por relación al sistema de referencias (F, FF') es $\rho = \frac{p}{1 + e \cos\theta}$, donde

$e$ es la excentricidad y $p = a(e^2 - 1)$. Es definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \\ y = b \operatorname{sh} u \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t} \\ y = b \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

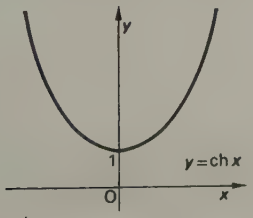
V. APOLONIO, CÓNICA, CONJUGADA, EQUILÁTERA, ESPECIE, FOCAL (Eje, eje no, semi-eje, semi-eje no) PARÁMETRO, VÉRTICES.




## Hiperbólica/o

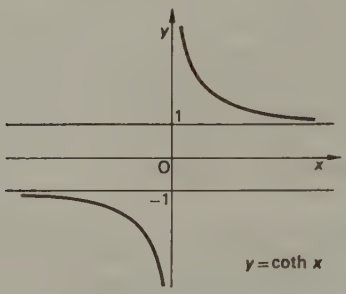
- *Amplitud hiperbólica.* — Sinónimo de gudermaniano.
- *Coseno hiperbólico.* — Función de **R** en **R**, representada ch y definida por $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Su representación gráfica es una catenaria.

V. DESARROLLO (en serie entera).



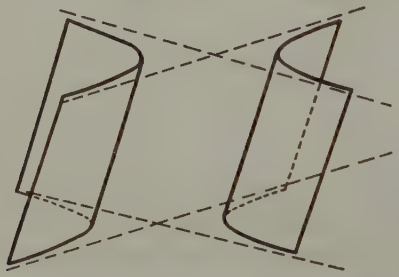

- *Coseno hiperbólico complejo.* — V. COMPLEJAS (Funciones hiperbólicas).

• *Cotangente hiperbólica.* — Función de $\mathbf{R}^*$ en $\mathbf{R}$, representada coth y definida por $\coth x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$.

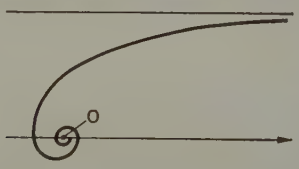



• *Cotangente hiperbólica compleja.* — V. COMPLEJAS (Funciones hiperbólicas).

• *Cilindro hiperbólico.* — Cilindro cuyas secciones por planos no paralelos a las generatrices son hipérbolas. Es una cuádrica impropia que no admite un punto doble en el infinito.



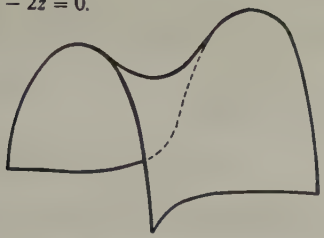
• *Espiral hiperbólica.* — Curva plana de ecuación polar $\rho\theta = a$ ($a$ real no nulo). Admite un punto asintótico y una recta asíntota.




• *Geometría hiperbólica.* — Geometría de Lobatchevski-Bolyai.
V. CAYLEY, LOBATCHEVSKI.

• *Paraboloide hiperbólico.* — Cuádrica propia cuya ecuación cartesiana en un sistema de referencias ortonormado convenientemente escogido se escribe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0.$$



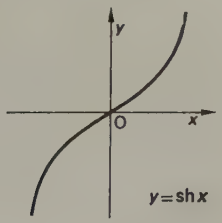
donde $a$ y $b$ son dos números reales. Una sección plana de un paraboloide hiperbólico es una hipérbola, una parábola o un par de rectas. Su forma es en parte la de una silla de caballo.

• *Punto hiperbólico de una superficie.* — Un punto M de una superficie es hiperbólico si la indicatriz de Dupin en M es una hipérbola. Intuitivamente, en un entorno de M, la superficie tiene la forma de un paraboloide hiperbólico.

• *Seno hiperbólico.* — Función de **R** en **R** representada sh y definida por:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

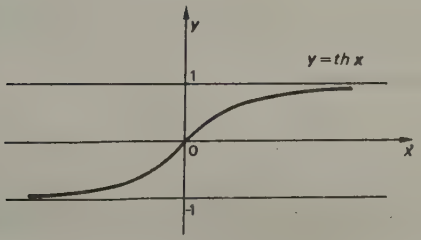
V. DESARROLLO (en serie entera).




• *Seno hiperbólico complejo.* — V. COMPLEJAS (Funciones hiperbólicas).

• *Tangente hiperbólica.* — Función de **R** en **R** representada th y definida por:

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}.$$



• *Tangente hiperbólica compleja.* — V. COMPLEJAS (Funciones hiperbólicas).

• *Trigonometría hiperbólica.* — Parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las funciones hiperbólicas. Las principales fórmulas de trigonometría hiperbólica son:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;\ \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x};$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x};\ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\coth x}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b;\ \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a;\ \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b};\ \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2};$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2};$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q};\ \operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

$$\operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{sh}^2 a + 1 = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 = \frac{1 + \operatorname{th}^2 a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 - \operatorname{th}^2 a}$$

$$\operatorname{th} 2a = \frac{2 \operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}.$$

## Hiperbólicas

• *Funciones hiperbólicas.* — Funciones de **R** en **R** definidas a partir de la función exponencial. Se distinguen las funciones coseno, seno, tangente y cotangente hiperbólica, representadas respectivamente ch, sh, th y coth.

• *Funciones hiperbólicas complejas.* — V. COMPLEJAS.

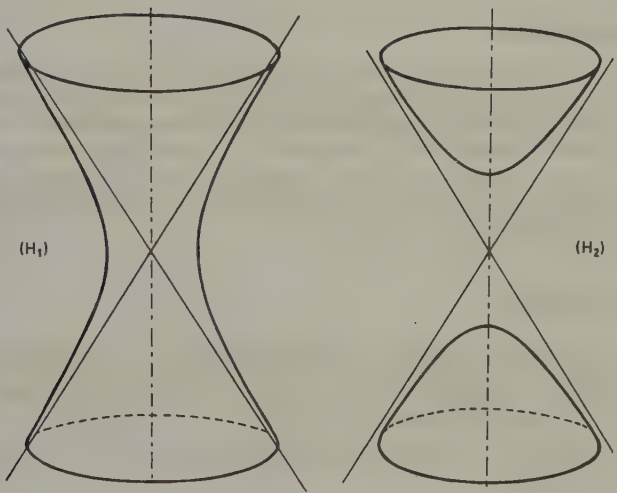
• *Funciones hiperbólicas inversas.* — V. INVERSAS.

## Hiperboloide

Cuádrica que admite un centro de simetría y algunas de cuyas secciones pla-

nas son hipérbolas. Se distingue la hiperboloide de una hoja (representada $H_1$), que es una superficie regulada, y la hiperboloide de dos hojas (representada $H_2$), que no es reglada. Todo hiperboloide admite tres ejes de simetría. En relación a un sistema de referencias ortonormado dado por esos tres ejes, la ecuación de un $H_1$ es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ y la de un $H_2$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$.

V. Revolución.




## Hiperciclo

Sean A, B, C tres puntos de un plano de Lobatchevski-Bolyai y $d_1$, $d_2$, $d_3$ las perpendiculares a las rectas (BC), (CA) y (AB), trazados por el centro de los segmentos BC, CA, AB. Si las rectas $d_1$, $d_2$ y $d_3$ son perpendiculares a una misma recta $\Delta$ los puntos A, B, C están situados a igual distancia de $\Delta$ y pertenecen a una curva llamada hiperciclo o exociclo, que es el lugar de los puntos situados a una distancia constante de la recta $\Delta$ (V. Endociclo, Horiciclo).

## Hipercomplejo

• *Sistema hipercomplejo.* — Nombre dado por Frobenius a lo que en la actualidad se denomina álgebra asociativa sobre $\mathbf{R}^n$. Dada la base canónica $e_1$, ..., $e_n$ de $\mathbf{R}^n$, definir un sistema hipercomplejo equivale a dar la tabla de multiplicación de los $e_i$, es decir, $n^3$ escalares $\alpha_{ijk}$ de $\mathbf{R}$ tales que $e_j e_k =$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ijk} e_i$ cualesquiera que sean los índices $i$, $j$, $k$ y sometidos a condiciones que traduzcan la asociatividad.

Los números complejos, los cuaternios de Hamilton y las álgebras de Clifford son ejemplos de sistemas hipercomplejos.

Se estudian, más generalmente, los sistemas hipercomplejos sobre $K^n$, donde K es un sub-cuerpo de C (V. BICUATERNIOS).

V. FROBENIUS.

## Hipercuádrica

• *Hipercuádrica de* $K^n$ *donde* K *es un cuerpo conmutativo.* — Hipersuperficie de $K^n$ de ecuación $F(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0$, donde F es un polinomio de grado 2. Las hipersuperficies de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$) son las cónicas (resp. las cuádricas) del espacio afín $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$).

• *Hipercuádrica del espacio proyectivo* $P_n(\mathbf{R})$. — Conjunto de puntos de $P_n(\mathbf{R})$ cuyas coordenadas homogéneas $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ anulan una forma cuadrática no nula sobre $\mathbf{R}^{n+1}$.

## Hipercubo

• *Hipercubo de* $\mathbf{R}^n$. — Un cubo de $\mathbf{R}^n$, para $n > 3$, también se denomina un hipercubo de $\mathbf{R}^n$ para indicar que se trata de una generalización de la noción usual de cubo en $\mathbf{R}^3$. Para $n = 4$, el hipercubo se llama tesseract.

V. CUBO, TESSERACT.

• *Hipercubo de Hilbert.* — Cubo de Hilbert.

V. HILBERT.

## Hiperesfera

Palabra empleada por los relativistas para designar una bola de $\mathbf{R}^4$ o su frontera.

Se emplea a veces para designar las esferas en $K^n$ (para $n \geqslant 4$), por ejemplo, la hiperesfera de $K^n$ de centro O y de radio 1 está formada por ceros en $K^n$ del polinomio:

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 - 1 \in K[X_1, ..., X_n]$$

## Hipergeométrica

• *Función hipergeométrica.* — La función compleja $F(\alpha, \beta, \gamma)$ que a todo $z$ tal que $|z| < 1$ asocia la suma $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ de la serie hipergeométrica, se denomina función hipergeométrica. Es la solución de la ecuación diferencial:

$$(z^2 - z)y'' + [(1 + \alpha + \beta)z - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0.$$

• *Ley hipergeométrica.* — Sean tres enteros positivos $n$, M, N tales que $n \leqslant N$ y $M < N$. Se llama ley hipergeométrica a la ley de una variable aleatoria discreta X cuyos valores tomados son los enteros $k$ que verifican:

$$\sup\{0,\ n - (N - M)\} \leqslant k \leqslant \mathrm{Inf}(n,\ M)$$

y cuya función de distribución es definida por:

$$P(X = k) = \binom{M}{k}\binom{N - M}{n - k}\Big/\binom{N}{n}.$$

Planteando $p = \dfrac{M}{N}$ y $q = 1 - p$ tenemos $E[X] = np$ y $V[X] = npq\left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right)$

Dada una urna conteniendo N bolas de las que M son blancas y N − M son negras, la ley hipergeométrica es la ley de la variable aleatoria X que en una tirada de $n$ bolas (sin volver a meter bolas en la urna) asocia el número $k$ al de bolas blancas que figuran en la tirada.

• *Serie hipergeométrica o serie hipergeométrica de Gauss.* — Este nombre procede del parecido de la serie hipergeométrica con la progresión geométrica. V. GAUSS.

## Hipergrafo

Generalización de la noción de multigrafo; un hipergrafo es un par $(S, \mathcal{E})$, donde S es un conjunto finito de elementos llamados vértices del hipergrafo y donde $\mathcal{E} = (E_i)_{i \in I}$ es una familia de partes no vacías de S tales que $\bigcup_{i \in I} E_i = S$. Las partes $E_i$ se llaman las aristas del hipergrafo.
V. ORDEN.

## Hiperplano

• *Hiperplano afín.* — V. AFÍN.

• *Hiperplano del infinito.* — V. INFINITO.

• *Hiperplano proyectivo.* — V. PROYECTIVO.

• *Hiperplano tangente.* — V. TANGENTE.

• *Hiperplano vectorial.* — V. VECTORIAL.

• *Hiperplano de* $K^n$, *donde* K *es un cuerpo conmutativo.* — V. HIPERSUPERFICIE.

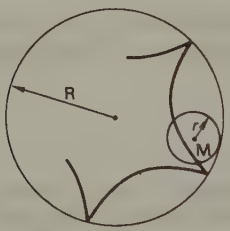
## Hipersuperficie

• *Hipersuperficie de* $K^n$, *donde* K *es un cuerpo conmutativo.* — Conjunto de los ceros de un polinomio F no constante de $K[X_1, ..., X_n]$. Es una variedad

algebraica afín de dimensión $n - 1$. Si F es un polinomio de primer grado, es una variedad lineal afín llamada un hiperplano.
V. NORMAL, TANGENTE (Hiperplano).

## Hipocicloide

Curva plana $\Gamma$ descrita por un punto fijo M de un círculo C de radio $r$ que rueda interiormente sin deslizarse sobre un círculo C' de radio R. Cuando $R/r$ es irracional, la hipocicloide no se cierra. Cuando $R/r$ es un racional, admite un número finito de puntos de retroceso.
Si $R = 2r$, es un diámetro del círculo C' llamado antiguamente Engranaje de La Hire, o Mosca de la Hire (V. LA HIRE).
Si $R = 3r$, es una deltoide.
Si $R = 4r$, es una astroide.
V. EPICICLOIDE.




- *Hipocicloide alargada o reducida.* — V. HIPOTROCOIDE.
- *Hipocicloide de Steiner.* — Deltoide.

## Hipócrates de Chíos (siglo V a. C.)

- *Lúnulas de Hipócrates de Chíos.* — Sea ABC un triángulo rectángulo en A; las superficies comprendidas entre el semi-círculo BAC de diámetro BC y los semi-círculos de diámetros BA y AC exteriores al triángulo se llaman lúnulas de Hipócrates. El área de las dos lúnulas es igual al área del triángulo ABC. Las lúnulas han sido utilizadas en las investigaciones que tratan de resolver el problema de la cuadratura del círculo.

**Las lúnulas han sido utilizadas en las investigaciones que tratan de resolver el problema de la cuadratura del círculo.**

## Hipotenusa

● *Hipotenusa de un triángulo rectángulo.* — Lado opuesto al ángulo recto de ese triángulo.
V. CATETOS, PITÁGORAS (Teorema de)

## Hipótesis

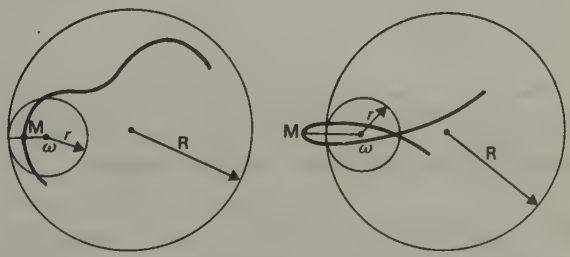
Para demostrar un teorema de una teoría $\mathcal{T}$, las definiciones, axiomas y teoremas ya establecidos en la teoría $\mathcal{T}$ constituyen las hipótesis de la demostración.
En otro contexto, la palabra hipótesis se emplea a veces como sinónimo de conjetura.
V. CARMICHAËL, CONTINUO, ERGÓDICO, GOLDBACH, INACCESIBLES (Cardinales), RIEMANN, WARING.

● *Hipótesis nula.* — V. TEST (de hipótesis).

● *Test de hipótesis en estadística.* V. TEST.

## Hipotrocoide

Curva plana engendrada por un punto M ligado al plano móvil de una circunferencia de centro $\omega$ y de radio $r$ rodando sin deslizar interiormente sobre una circunferencia de radio R. Si $\omega M = r$ es un hipocicloide. Si $\omega M < r$, el hipotrocoide se denomina también hipocicloide abreviado; si $\omega M > r$ se denomina hipocicloide alargado.
V. EPITROCOIDE.



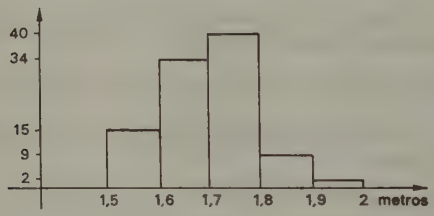

$\omega M < r$ $\omega M > r$

## Hire (de la), P. (1640-1718)

V. La Hire.

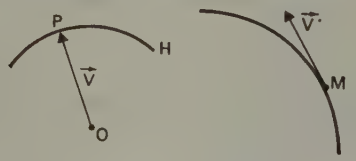
## Histograma

Modo de representación de los valores adoptados por un carácter continuo sobre una muestra dada. Para cada clase $C_i$ se traza un rectángulo cuyo lado sobre el eje de las abscisas tiene por longitud la amplitud de la clase y cuyo área es proporcional a la frecuencia de la clase $C_i$. Por ejemplo, si uno se interesa en la talla de 100 individuos y se obtienen las informaciones siguientes, agrupadas en cinco clases $[1,5; 1,6[$, $[1,6; 1,7[$, $[1,7; 1,8[$, $[1,8; 1,9[$ y $[1,9; 2[$: 15 miden entre 1,50 y 1,60 m; 34 entre 1,60 y 1,70 m; 40 entre 1,70 m y 1,80 m; 9 entre 1,80 m y 1,90 m, y 2 entre 1,90 m y 2 m, el histograma es entonces:




## Hodógrafa

• *Hodógrafa del movimiento de un móvil puntual* M *con relación a un punto fijo* O. — Lugar H de puntos P tales que $\overrightarrow{OP} = \vec{V}$, donde $\vec{V}$ es el vector velocidad de M en el instante *t*. La hodógrafa de un movimiento uniforme es una curva trazada sobre una esfera.




## Hoja

Sinónimo de vértice pendiente en teoría de los grafos.

## Hojitas

• *Superficie en hojitas de Riemann.* — V. Riemann.

## Hölder, O. (1859-1937)

• *Condición de Hölder de orden α para una aplicación.* — Condición de Lipschitz de orden α.
V. LIPSCHITZ.

• *Desigualdades de Hölder.* — Afirman que si $p$ y $q$ son dos números reales superiores a 1 tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$

para dos $n$-uplos $(a_1, a_2, ..., a_n)$ y $(b_1, b_2, ..., b_n)$ de números reales positivos y que:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \left[\int_a^b f^p(x)dx\right]^{1/p}\left[\int_a^b g^q(x)dx\right]^{1/q}$$

para dos funciones $f$ y $g$ reales positivas integrables sobre $[\![a, b]\!]$.
$[\![a, b]\!]$.
Si $p = q = 2$ nos encontramos las desigualdades de Cauchy-Schwarz.

• *Sucesión y teorema de Jordan-Hölder.* — V. JORDAN.

## Holomorfa

• *Función holomorfa en un punto $z_0$ de un abierto* D *de* C. — Función compleja definida en un entorno de $z_0$ que es derivable en $z_0$; tal función es entonces indefinidamente derivable en $z_0$.

• *Función holomorfa sobre un abierto* D *de* C. — Función holomorfa en todo punto de D. Semejante función es analítica sobre D. Sea $x + iy$ la forma algebraica de $z \in \mathbf{C}$; si $f: z \mapsto f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa sobre D, las funciones reales $u$ y $v$ son armónicas sobre D.
V. CAUCHY (Teorema de), LIOUVILLE (Teorema de), MORERA (Teorema de).

• *Función holomorfa en el infinito.* — Función compleja $f$ para la que existe un número real positivo $r$ tal que para todo $z \in \mathbf{C}$ que verifica $|z| > r$ la función $f$ sea holomorfa en $z$.

## Hom

Abreviación que proviene de homomorfismo.
Dados dos objetos X e Y de una categoría $\mathscr{C}$, se representa $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ el conjunto de los morfismos de X en Y. Se definen dos functores:

$$\mathrm{Hom}(X, -): Y \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$$

y

$$\mathrm{Hom}(-, Y): X \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$$

de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$, el primero convariante (si $u: Y \mapsto Y'$ entonces:

$$\mathrm{Hom}(X, u): \mathrm{Hom}(X, Y) \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y')$$

es definido por $\mathrm{Hom}(X, u): \varphi \mapsto u \circ \varphi$) y el segundo contravariante (si $u: X \mapsto X'$ entonces $\mathrm{Hom}(u, Y)$: $\mathrm{Hom}(X', Y) \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y)$ es definido por

$\mathrm{Hom}(u, Y): \varphi \mapsto \varphi \circ u$),

llamados functores Hom. Por este motivo se dice que $\mathrm{Hom}(X, Y)$ es contravariante en X y covariante en Y. En la categoría **Mod**(A) de los A-módulos, el functor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ admite el functor $- \otimes_A M$ como adjunto a la izquierda.

V. FUNCTOR, TENSORIAL.

## Homeomorfia

Sinónimo de homeomorfismo.

## Homeomorfismo

Se llama homeomorfismo de un espacio topológico E sobre un espacio topológico F a una biyección de E sobre F que es continua, así como a su biyección recíproca. La imagen de todo abierto (resp. cerrado) de E por un homeomorfismo es un abierto (resp. cerrado) de F. Sinónimo: aplicación bicontinua.

## Homeomorfos

• *Espacios homeomorfos.* — Espacios topológicos entre los que existe un homeomorfismo; ejemplo: **R** y $]a, b[$ con $a \neq b$. Dos superficies homeomorfas se llaman también topológicamente equivalentes; intuitivamente, existe una biyección de la una sobre la otra que a dos puntos «próximos» de la una asocia dos puntos «próximos» de la otra.

V. ISÓTOPOS.

## Homogénea

• *Ecuación lineal homogénea.* — Ecuación lineal de la forma $f(x) = 0$.

• *Ecuación lineal homogénea asociada a una ecuación lineal* $f(x) = b$. — Ecuación lineal homogénea $f(x) = 0$.

• *Función homogénea de grado* $\alpha \in \mathbf{R}$. — Función numérica definida sobre un espacio vectorial tal que para todo par $(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times E$, tengamos:

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha \cdot f(x).$$

La función $f$ de $\mathbf{R}^2$ en **R** definida por $(x, y) \mapsto xy^2 + x^2y$ es homogénea de grado 3.

V. EULER (Fórmulas de).

• *Parte homogénea de grado total k de un polinomio f.* — Suma formada por

los términos de $f$ de grado total $k$. La parte homogénea de grado total 3 del polinomio $2X^2\,YZ + 6XY^3 + 4i\,XYZ - YZ^2 + Y^3 + 3XZ - 1$ es $4i\,XYZ - YZ^2 + Y^3$.

## Homogéneas

• *Coordenadas homogéneas de un punto* M *de un espacio proyectivo* P(E) *de dimensión finita n.* — Sean $B = (\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ una base de E y M la clase de equivalencia de un vector $\vec{x}$ de $E - \{0\}$ en P(E). Los componentes $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ de $\vec{x}$ en la base B se denominan coordenadas homogéneas de M. Para todo número real $\alpha \neq 0$, la familia $(\alpha x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ es igualmente un sistema de coordenadas homogéneas de M; por eso se dice que están definidas salvo un factor multiplicativo.

## Homogeneidad

Propiedad de ser homogéneo.

## Homogéneo

• *Espacio homogéneo.* — Par (E, G), donde G es un grupo que opera transitivamente sobre E.

• *Polinomio homogéneo de grado total k.* — Polinomio igual a su parte homogénea de grado total $k$. El polinomio $\sqrt{3}\,X^2\,YZ - 5i\,X^4 + 12\,Y^3\,Z$ es homogéneo de grado total 4.

• *Sistema homogéneo.* — Sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

## Homogéneos

• *Números homogéneos.* — Dos enteros se llaman homogéneos si tienen los mismos factores primos.
Ejemplo: $45 = 3^2 \times 5$ y $375 = 3 \times 5^3$.
V. HETEROGÉNEOS.

## Homografía

Sean E y F dos K-espacios vectoriales de igual dimensión finita y P(E) y P(F) sus espacios proyectivos asociados. Se denomina homografía de P(E) sobre P(F) a una aplicación proyectiva biyectiva de P(E) sobre P(F).
V. PROYECTIVO (Grupo).

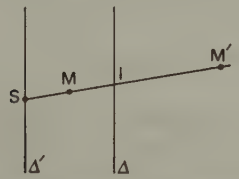
## Homográfica

• *Función (o transformación) homográfica.* — Se denomina función homográ-

fica de variable en un cuerpo K a una función $h$ definida por $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, donde $a$, $b$, $c$, $d$ son elementos de K que verifican $ad - bc \neq 0$. Cuando $c = 0$, entonces $h$ es una biyección afín de K sobre K. En caso contrario, $h$ es una biyección de $K - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ sobre $K - \left\{\frac{a}{c}\right\}$. En ambos casos, $h$ es la restricción en K o en $K - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ de una homografía de la recta proyectiva $P(K) = K \cup \{\infty\}$ sobre ella misma. Cuando $K = \mathbf{R}$, la representación gráfica de $h$ es una recta para $c = 0$ y una hipérbola para $c \neq 0$.

## Homología

(Geometría.) Sean S un punto de un plano P, $\Delta$ una recta de P que no contiene a S y $\Delta'$ la paralela a $\Delta$ que pasa por S. Para todo punto M de P, no situado sobre $\Delta'$, la recta SM corta $\Delta$ en I. Se llama homología de vértice (o de centro) S, de eje $\Delta$ y de razón doble $k \in \mathbf{R}$, a la aplicación de $P - \{\Delta'\}$ en P que a todo punto M de $P - \{\Delta'\}$ asocia el punto M' de la recta SM tal que la razón doble de los puntos (S, I, M, M') sea igual a $k$. Si $k = -1$, la homología se denomina armónica.




• *Clase de homología.* — Elemento de un módulo de homología.

• *Módulo de homología.* — Dado un complejo de cadenas:

$$M: \ldots \to M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \to \ldots,$$

se llama $n$-ésimo módulo de homología de M el módulo $H_n(M) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$ cociente de $n$-ésimo módulo de los ciclos por el $n$-ésimo módulo de los extremos. En cierta forma, los módulos de homología miden la falta de exactitud en cada $M_n$.

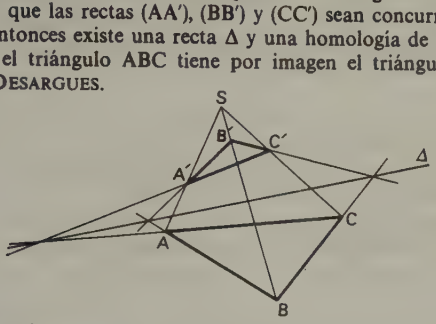
## Homológica

• *Algebra homológica.* — Dominio del álgebra nacido de la topología algebraica cuya idea consiste en asociar, de forma functorial, grupos o módulos a otros objetos matemáticos (espacios topológicos, complejos de cadenas, etc.) de tal forma que el estudio de estos grupos o de esos módulos proporcione invariantes de los objetos matemáticos estudiados (V. HOMOLOGÍA (Módulos de)). El álgebra homológica se emplea en la actualidad en numerosos dominios de las matemáticas.

V. BORDES, CADENAS, CICLOS, COBORDES, COCADENAS, COCICLOS, COHOMOLOGÍA, HOMOLOGÍA.

## Homológicos

• (Geom.) *Triángulos homológicos.* — Triángulos coplanarios ABC y A'B'C' tales que las rectas (AA'), (BB') y (CC') sean concurrentes en un mismo punto S. Entonces existe una recta Δ y una homología de vértice S y de eje Δ por la que el triángulo ABC tiene por imagen el triángulo A'B'C'.
V. DESARGUES.




## Homomorfismo

• *Homomorfismo relativo a dos leyes de composición internas.* — Sea ⊤ (resp. ⊥) una ley de composición interna sobre un conjunto E (resp. E'). Se llama homomorfismo de (E, ⊤) hacia (E', ⊥) a una aplicación $f$ de E hacia E' tal que para todo par $(x, y) \in E \times E$ tengamos $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$.

• *Homomorfismo relativo a dos leyes de composición externas.* — Sea $*$ (resp. $\cdot$) una ley de composición externa sobre un conjunto E (resp. E') cuyo dominio común de operadores es Ω. Se llama homomorfismo de (E, $*$) *hacia* (E', $\cdot$) a una aplicación $f$ de E hacia E' tal que para todo par $(\alpha, x) \in E \times \Omega$ se tenga $f(\alpha * x) = \alpha \cdot f(x)$.

• *Homomorfismo relativo a dos relaciones binarias.* — Sea $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$) una relación sobre E (resp. E'); se denomina homomorfismo de (E, $\mathcal{R}$) en (E', $\mathcal{R}'$) a una aplicación $f$ de E hacia E' tal que para $x \mathcal{R} y$ implica $f(x) \mathcal{R}' f(y)$ para todo par $(x, y) \in E \times E$.

• *Homomorfismo de grupos, de anillos, de cuerpos, de espacios vectoriales, de módulos, etc.* — Homomorfismo para cada una de las leyes internas o externas que definen esas estructuras.
V. ADJUNTO, AUTOMORFISMO, ENDOMORFISMO, HOM, IMAGEN, ISOMORFISMO, NÚCLEO.

## Homotecia

• *Homotecia afín de centro (o de polo)* $O \in \mathcal{E}$ *y de razón* $k \in \mathbf{R}$ *de un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Aplicación afín de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$ que, a todo punto $M \in \mathcal{E}$, asocia el punto M' definido por $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. La aplicación lineal asociada a una homotecia afín es una homotecia vectorial. La imagen de una recta D por una homotecia de razón no nula es una recta paralela a D.

• *Homotecia vectorial de razón* $k \in \mathbf{R}$ *de un espacio vectorial* E *sobre un cuerpo conmutativo* K. — Endomorfismo $h$ de E definido por $h(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}$. Una homotecia es un automorfismo si y solamente si $k$ no es nulo.
V. NEGATIVA, POSITIVA.

## Homotéticas

• *Figuras homotéticas.* — Figuras F y F′ tales que existe una homotecia afín $\mathscr{H}$ que verifica $\mathscr{H}(F) = F'$. Dos triángulos cuyos lados son paralelos dos a dos son homotéticos, así como dos circunferencias cualesquiera de un mismo plano.

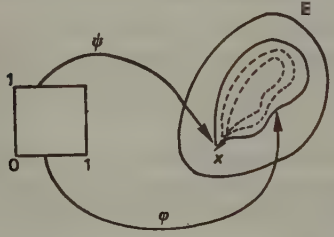
## Homotopía

• *Clase de homotopía de un camino de un espacio topológico* E. — Clase de equivalencia del camino por la relación de homotopía.

• *Relación de homotopía en el conjunto $\mathscr{C}$ de los caminos de origen x y de extremo y de un espacio topológico* E. — Relación de equivalencia R definida sobre $\mathscr{C}$ por $\varphi R \psi$ si y solamnete si $\varphi$ y $\psi$ son homótopos.

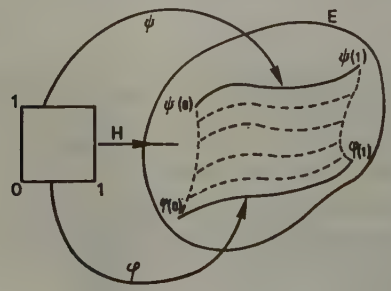
## Homótopo

• *Lazo homótopo a un punto x de un espacio topológico* E. — Camino $\varphi$ de origen y de extremo $x$ homótopo al camino $\psi : [\![0, 1]\!] \to E$ definido por $\psi(t) = x$ cualquiera que sea $t$.




## Homotopos

• *Caminos homótopos de un espacio topológico* E.— Dos caminos $\varphi : [\![0, 1]\!] \to E$ y $\psi : [\![0, 1]\!] \to E$ son homótopos si existe una aplicación H continua de $[\![0, 1]\!]^2$ en E tal que $H(t, 0) = \varphi(t)$ y $H(t, 1) = \psi(t)$ para todo $t \in [\![0, 1]\!]$.



## Hôpital (de L'), Guillaume François Antoine (1661-1704)

V. L'HOSPITAL.

## Hoppe, Reinhold (1816-1900)

• *Curva de Hoppe.*— Curva de $\mathbf{R}^3$ que toma la forma de un nudo de trébol a izquierda. Está definida en un sistema de referencias cartesiano por las ecuaciones paramétricas:

$$x = \cos t(3 \cos t + 2)$$
$$y = 5 \cos t \,.\, \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} t(25 \cos^2 t - 1)$$

Una circunferencia y la curvas de Hoppe son homeomorfos, pero no existe homeomorfismo de $\mathbf{R}^3$ en él mismo, transformando la curva de Hoppe en una circunferencia.

## Horaria

• *Ecuación horaria del movimiento de un móvil puntual* M. — Función $f$ que a cada instante $t$ hace corresponder la abscisa curvilínea de M sobre la trayectoria. La ecuación horaria del movimiento rectilíneo uniforme de velocidad $v$ es definida por $x = vt + x_0$ (siendo $x_0$ la abscisa del móvil en el instante $t = 0$).

## Horiciclo

Sean A, B, C tres puntos de un plano de Lobatchevski y $d_1$, $d_2$, $d_3$ las perpendiculares a las rectas (BC), (CA) y (AB), trazadas por el punto medio de los segmentos BC, CA, AB. Si las rectas $d_1$, $d_2$ y $d_3$ son paralelas, los puntos A, B, C pertenecen a una curva llamada horiciclo caracterizada por la siguiente propiedad: la perpendicular trazada por el centro de una cuerda cualquiera de esa curva es paralela a una recta fija.
V. ENDOCICLO, HIPERCICLO.

## Horizontal

• *Plano horizontal en geometría descriptiva.* — Plano paralelo al plano horizontal de referencia.

• *Plano horizontal de referencia.* — V. DESCRIPTIVA (Geometría).

• *Recta horizontal en geometría descriptiva.* — Recta paralela al plano horizontal de referencia.

• *Traza horizontal de un plano en geometría descriptiva.* — Intersección de ese plano con el plano horizontal de referencia.

## **Hörner,** William G. (1786-1837)

• *Método de Hörner.* — Método utilizado en programación para el cálculo de una función polinomia con coeficientes reales. Se pone:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

bajo la forma $P(x) = (...((a_0x + a_1)x + a_2)x + \cdots + a_{n-1})x + a_n$, lo que permite calcularla con la ayuda de un algoritmo simple; «tomar el primer coeficiente $a_0$, multiplicarlo por $x$, añadir el coeficiente siguiente, multiplicar todo por $x$, añadir el coeficiente siguiente, multiplicar todo por $x$, añadir el coeficiente siguiente, etc.».

## **Hu,** T. C.

• *Teorema de Hu.* — Las organizaciones del trabajo obtenidas por el método del camino crítico son óptimas cuando las restricciones de las sucesiones forman un árbol. Este teorema fue uno de los primeros demostrados en teoría de la organización del trabajo (1961).

V. CRÍTICA, TRABAJO (Teoría de la organización del).

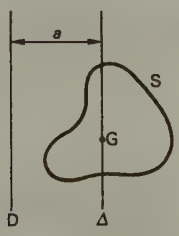
## **Huygens,** Christian (1629-1695)

La ortografía «Huyghens» es incorrecta.

• *Teorema de Huygens.* — El momento de inercia $I_D$ de un sólido S de masa M con relación a un eje D es igual al momento de inercia $I_\Delta$ de S por relación al eje $\Delta$ paralelo a D y que pasa por el centro de inercia G de S aumentado con el momento de inercia con relación a D de un punto de masa M situado en G. En otros términos:

$$I_D = I_\Delta + a^2 M$$

donde $a$ es la distancia entre los ejes D y A.



# I

## i

Número complejo cuyo cuadrado es igual a $-1$; esta noción procede de la palabra «imaginario». Los físicos lo representan en ocasiones *j* para no confundirlo con la notación de la intensidad de una corriente (V. J).

## Icosaedro

Poliedro de veinte caras. Existe un icosaedro regular cuyas caras son triángulos equiláteros; admite doce vértices y treinta aristas.

• *Icosaedro regular.* — En función de la longitud de la arista, la superficie del icosaedro es:

$$S = 5\sqrt{3}a^2 \simeq 8{,}6603 \cdot a^2$$

y su volumen es:

$$V = \frac{5}{6}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a^3 \simeq 2{,}1817 \cdot a^3.$$

Véase en VOLÚMENES estas medidas en función del radio de la esfera circunscrita.

## Ideal

• *Ideal de un anillo* A. — Se llama ideal a izquierda (resp. a derecha) de **A** a un sub-grupo aditivo **I** de **A** tal que para todo $x \in A$ y para todo $y \in I$ tengamos $xy \in I$ (resp. $yx \in I$). Si **A** es conmutativo, las dos nociones coinciden y se habla de ideal. Los ideales del anillo **Z** son los sub-grupos $n\mathbf{Z}$ con $n \geqslant 0$.
V. FRACCIONARIO, MAXIMAL, PRIMO, PRINCIPAL.

• *Ideal bilátero.* — Ideal a izquierda y a derecha.

• *Ideal de una variedad algebraica afín.* — V. AFÍN (Variedad algebraica).

## Ideales

• *Ideales comaximales.* — V. COMAXIMALES.

• *Ideales extraños.* — Ideales comaximales.

• *Producto de dos ideales.* — Sean **I** y **J** dos ideales de un anillo conmutativo **A**. Su producto es, por definición, el conjunto de las sumas finitas de elementos $xy$, donde $x \in \mathbf{I}$ e $y \in \mathbf{J}$. Es un ideal de **A**, representado **IJ** y contenido en $\mathbf{I} \cap \mathbf{J}$. Tenemos las inclusiones siguientes:

• *Suma de dos ideales.* — Sean **I** y **J** dos ideales de un anillo conmutativo **A**. Su suma es, por definición, el conjunto de las sumas $x + y$, donde $x \in \mathbf{I}$ e $y \in \mathbf{J}$. Es un ideal de **A**, representado $\mathbf{I} + \mathbf{J}$ que contiene $\mathbf{I} \cup \mathbf{J}$. Se demuestra que $\mathbf{I} \cup \mathbf{J}$ no es necesariamente un ideal de **A** y que el ideal engendrado por $\mathbf{I} \cup \mathbf{J}$ en **A** es igual a $\mathbf{I} + \mathbf{J}$.

## Ideles

Elementos inversibles del anillo $K_A$ de las adelas de un cuerpo K de números algebraicos.
V. ADELAS.

## Idempotente

• *Elemento idempotente o idempotente de un conjunto* E *provisto de una ley de composición interna* $*$. — Elemento $x \in E$ tal que $x * x = x$. Todo elemento de $\mathfrak{P}(E)$ es idempotente para las leyes $\cap$ y $\cup$, y (1, 0) es un idempotente del anillo producto directo $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

## Idéntica

A veces se emplea por igual.

• *Aplicación idéntica sobre un conjunto* E. — Aplicación de E en E, representada $I_E$, que a $x \in E$ asocia ese elemento. La aplicación idéntica $I_E$ es una biyección de E sobre E.

• *Transformación idéntica.* — V. TRANSFORMACIÓN.

## Identidad

Nombre dado a ciertas fórmulas algebraicas; la fórmula de binomio de Newton o la fórmula:

$$a^n - b^n = (a - b)\,(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

son identidades en un anillo conmutativo A. En la enseñanza, se califica de *notables* las identidades más frecuentemente utilizadas:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

V. ABEL, BEZOUT, DIOFANTO, EULER, LAGRANGE, NEWTON (Binomio de).

● *Identidad sobre un conjunto* E. — Empleado a veces por aplicación idéntica sobre E.

● *Identidad o igualdad de polarización.* — V. POLAR (Forma).

## Identificar

Sean E y F dos conjuntos provistos de una estructura, tales que existe un isomorfismo $f$ de E sobre F para la estructura considerada. En ocasiones se acuerda confundir E y F confundiendo el elemento $x \in E$ con el elemento $f(x) \in F$. Se dice que se identifican E y F.

## Igual (=)

V. IGUALDAD (Relación de).

● *Sensiblemente igual.* — V. APROXIMACIÓN (de un real).

## Igualdad

● *Igualdad o relación de igualdad.* — Relación denotada = (se lee «igual»). Se escribe $a = b$ cuando los símbolos $a$ y $b$ representan el mismo objeto matemático. De hecho, la igualdad es una noción primitiva de las matemáticas (como la pertenencia); no se define más que por sus reglas de empleo que imponen que dos objetos matemáticos iguales tienen las mismas propiedades. La igualdad es reflexiva, simétrica y transitiva; es, por tanto, una equivalencia. También es antisimétrica.
V. METALENGUAJE.

● *Igualdad de Parseval.* — V. PARSEVAL.

● *Igualdad de Poincaré.* — V. POINCARÉ.

● *Igualdad de polarización.* — V. POLAR (forma).

● (Geometría.) *Igualdad de dos figuras geométricas.* — En numerosos casos, cuando dos figuras son isométricas se dice, por un abuso de lenguaje muy cómodo, que son iguales. Por ejemplo, dos segmentos de igual longitud a menudo se denominan iguales.

● *Caso de igualdad de triángulos.* — Nombre dado hace mucho tiempo a tres

condiciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean isométricos o, de forma impropia, sean iguales. Se les enunciaba:

Primer caso. Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre dos lados respectivamente iguales, son iguales.

Segundo caso. Si dos triángulos tienen un lado igual adyacente a dos ángulos respectivamente iguales, son iguales.

Tercer caso. Si dos triángulos tienen tres lados respectivamente iguales, son iguales.

## Igualdades

- *Prolongación de las igualdades por continuidad.* — V. CONTINUIDAD.

## Iguales

- *Figuras iguales.* — V. DIRECTAMENTE, INVERSAMENTE.
- *Curva con las tangentes iguales.* — Nombre que también se da a la tractiz.

## Im (*f*)

Imagen de la aplicación *f*; a veces se escribe Im*f*.

## Imagen

- *Imagen de un elemento* x *de un conjunto* E *por una relación* $\mathcal{R}$ *de* E *hacia* F. — Conjunto de elementos *y* de F tales que $x\mathcal{R}y$. Si la relación es una aplicación *f*, la imagen de *x* se reduce a un elemento representado $f(x)$.
- *Imagen de un número complejo.* — V. COMPLEJO (Plano).
- *Imagen de una parte* A *de un conjunto* E *por una relación* $\mathcal{R}$ *de* E *hacia un conjunto* F. — Conjunto de imágenes por $\mathcal{R}$ de los elementos de A. Si la relación es una aplicación *f*, la imagen de A por *f* se representa $f(A)$. V. DIRECTA, RECÍPROCA.
- *Imagen de una relación* $\mathcal{R}$ *de* E *hacia* F. — Imagen de E por $\mathcal{R}$, es decir, conjunto de imágenes por $\mathcal{R}$ de los elementos de E. En el caso en que la relación sea una aplicación *f*, la imagen de *f* se representa $\mathrm{Im}(f)$ o $f(E)$; la aplicación *f* es sobreyectiva si y solamente si $\mathrm{Im}(f) = F$.

## Imaginaria

- *Curva algebraica o superficie algebraica imaginaria.* — Curva o superficie cuyos puntos son imaginarios. Por ejemplo, la cuádrica cuya ecuación en un sistema de referencias ortonormado es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

es una superficie imaginaria llamada elipsoide imaginario.

• *Geometría imaginaria.* — Nombre dado inicialmente por Lobatchevski a la geometría que actualmente lleva su nombre.

• *Número imaginario.* — Número complejo cuya parte imaginaria no es nula. Se escribe $a + ib$ con $a \in \mathbf{R}$ y $b \in \mathbf{R}^*$. Si $a \neq 0$ se dice puro.

• *Parte imaginaria de un número complejo z.* — Número real $b$ en la escritura de $z$ bajo forma algebraica $z = a + ib$. La parte imaginaria de $z$ se representa $\mathrm{Im}(z)$.

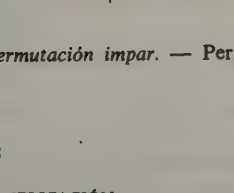
• *Punto imaginario de una curva algebraica de* $\mathbf{R}^2$ *de ecuación cartesiana* $P(x, y) = 0$. — Par $(a, b)$ de números complejos no todos reales tales que $P(a, b) = 0$.

• *Punto imaginario de una superficie algebraica de* $\mathbf{R}^3$ *de ecuación cartesiana* $P(x, y, z) = 0$. — Triplete $(a, b, c)$ de números complejos no todos reales tales que $P(a, b, c) = 0$.

## Impar

• *Entero impar.* — Número entero de la forma $2n + 1$, donde $n \in \mathbf{N}$. Su conjunto es el complementario en el anillo $\mathbf{Z}$ del ideal $2\mathbf{Z}$ de los enteros pares.

• *Aplicación impar.* — Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K de característica diferente de 2. Una aplicación $f$ de E en K es impar si para todo $x \in E$ tenemos $f(-x) = -f(x)$. Si $E = K = \mathbf{R}$, el grafo de $f$ relativamente a un sistema de referencias cartesiano es simétrico en relación al origen O del sistema de referencias. Ejemplos de funciones impares: las funciones $x \mapsto \operatorname{sen} x$ y $x \mapsto 7x^5 - 3x$.




• *Permutación impar.* — Permutación de signatura igual a $-1$.

## Implica

V. IMPLICACIÓN.

## Implicación

Conector también llamado condicional representado $\Rightarrow$ o a veces $\rightarrow$ (se lee «implica» (o «entraña»). $A \Rightarrow B$ es una abreviatura de $(\neg A) \vee B$. La proposición $A \Rightarrow B$ es falsa en el único caso en que siendo A verdadero B es falso. V. CONCLUSIÓN, CONTRAPUESTO, CONTRARIO, INFERENCIA, NECESARIO, PREMISA, RECÍPROCA, SUFICIENTE.

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

## Implícita

• *Curva implícita.* — Sea $f$ una función de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$. El conjunto de los puntos M de $\mathbf{R}^2$ cuyas coordenadas cartesianas $(x, y)$ verifican $f(x, y) = 0$ se denomina curva implícita de ecuación $f(x, y) = 0$. En el caso en que $f$ sea un polinomio, la curva es algebraica.

• *Función implícita.* — Sea $f$ una función de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$. La igualdad $f(x, y) = 0$ define una relación entre $x$ e $y$. Si esa relación de $\mathbf{R}$ hacia $\mathbf{R}$ es una función, esa función se denomina implícita.

## Implícitas

• *Teoremas de las funciones implícitas.* — Sean $(a, b)$ un punto de un abierto $\Omega$ de $\mathbf{R}^2$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ una función continuamente diferenciable sobre $\Omega$, tal que $f(a, b) = 0$. Si $f'_y(a, b) \neq 0$, existe un entorno abierto V de $(a, b)$ contenido en $\Omega$ y un entorno abierto de W de $a$, tales que, para todo punto $x \in W$, la ecuación $f(x, y) = 0$ admite una solución única $y = g(x)$ tal que $(x, g(x)) \in V$. La función implícita $g$ así definida de W en $\mathbf{R}$ es de clase $C^1$.

## Imposible

• *Ecuación imposible.* — Ecuación que no admite solución.

• *Suceso imposible de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A})$. — El suceso $\phi$. Si el espacio está probabilizado, su probabilidad es nula.

• *Suceso casi imposible de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. — Suceso de probabilidad nula; el suceso imposible es casi imposible, pero la recíproca es inexacta.

## Impropio

Utilizado por oposición a propio.

• *Cónica impropia.* — V. ESPECIE (de una cónica).

• *Integral impropia.* — Sinónimo de integral generalizada.

• *Cuádrica impropia.* — V. ESPECIE (de una cuádrica).

• *Valor absoluto impropio.* — Sinónimo de valor absoluto trivial. V. TRIVIAL.

## Impulsión

• Sinónimo de cantidad de movimiento.
V. CANTIDAD.

## Inaccesible

• *Cardinal inaccesible o débilmente inaccesible.* — Cardinal regular $\aleph_\alpha$ cuyo índice $\alpha$ no tiene predecesor. Actualmente se ignora (hipótesis de los cardinales inaccesibles) si existen cardinales inaccesibles distintos de $\aleph_0$. Esta noción se debe a Hausdorff.

• *Cardinal fuertemente inaccesible.* — Cardinal inaccesible $m$ tal que $a < m$ entraña $2^a < m$. Esta noción fue introducida por Tarski y Zermelo. Bajo la hipótesis del continuo generalizado, todo cardinal inaccesible es fuertemente inaccesible. Utilizando una idea de Mahlo, se pueden definir clases de cardinales fuertemente inaccesibles cada vez mayores.

## Inaccesibles

• *Hipótesis de los cardinales inaccesibles.* — Existe un cardinal regular diferente de $\aleph_0$ y que no es de la forma $\aleph_{\alpha+1}$. Se ignora en la actualidad si esta hipótesis es verdadera.

• *Números inaccesibles.* — Emile Borel llamó inaccesibles a los números de los que no se sabrá nada, fuera de su definición, ya sea por nuestra incapacidad de imaginarlos o por las grandes dificultades para calcularlos, ya sea por las dimensiones físicas del universo con relación a estos números. Por ejemplo, los números definidos a partir de una $n$-ésima cifra decimal de $\pi$ o de un $p$-ésimo número primo.

## Incertidumbre

• *Incertidumbre sobre una aproximación.* — Mayorante del valor absoluto del error. Por ejemplo: 3,145 es un valor aproximado de $\pi$ con una incertidumbre igual a $5 \cdot 10^{-3}$.

## Incidencia

• *Axiomas de incidencia.* — Axiomas de una geometría dada, que proporcionan relaciones entre puntos y rectas. Por ejemplo, en geometría afín plana los axiomas de incidencia pueden enunciarse:

1) una recta no es vacía y está estrictamente incluida en el plano;
2) para todo par (M, N) de puntos distintos del plano existe una recta y una sola que contiene M y N;

3) para toda recta D y para todo punto M pasa por M una recta y una sola paralela a D.

## Incidente

• *Arco incidente con un vértice x de un grafo.* — Arco uno de cuyos extremos es *x*.
V. EXTERIOR (Arco incidente hacia el), INTERIOR (Arco incidente hacia el).

## Incluido

Un conjunto A está incluido en un conjunto B si todo elemento de A pertenece a B. Se escribe $A \subset B$. Si $A \subset B$ y si $A \neq B$, se dice que A está estrictamente incluido en B y se representa $A \underset{\neq}{\subset} B$.

V. CONTENIDO, ESTRICTA (Inclusión), INCLUSIÓN.

## Inclusión

• Relación de orden parcial sobre $\mathfrak{P}(E)$, representada $\subset$ y definida por $A \subset B$ si y solamente si A está incluido en B. La inclusión se representa a veces $\subseteq$ (sobre todo en las obras anglosajonas).

• *Inclusión estricta.* — V. ESTRICTA.

• *Principio de exclusión-inclusión.* — V. EXCLUSIÓN.

## Inclusiva

• *Disyunción inclusiva.* — Sinónimo de disyunción, utilizado por oposición a disyunción exclusiva.

## Inclusivo

• *O inclusivo.* — Sinónimo de disyunción. Se emplea por oposición a «o exclusivo». La palabra «o» se emplea siempre en matemática en un sentido inclusivo.
V. DISYUNCIÓN.

## Incógnita

Expresión no matemática y no obstante empleada corrientemente. Por ejemplo, en la ecuación $f(x) = g(x)$ la letra $x$ se denomina la incógnita. Si $f$ y $g$ son funciones definidas sobre un producto $\prod_{i=1}^{n} E_i$ de conjuntos $E_i$, la incógnita $x$

se escribe $x = (x_1, ..., x_n)$ con $x_i \in E_i$ y se dice que la ecuación es de $n$ incógnitas $x_1, ..., x_n$.
V. ECUACIÓN.

## Incompatibilidad

V. SHEFFER.

## Incompatible

• *Sistema de ecuaciones incompatible.* — Sistema cuyo conjunto de soluciones es vacío.

## Incompatibles

• *Sucesos incompatibles de un espacio probabilizable* $(\Omega, \mathscr{A})$. — Sucesos A y B tales que $A \cap B = \phi$. Dicho en otros términos, dos sucesos incompatibles no pueden realizarse los dos a la vez.

## Incompleta

• *Ecuación diferencial incompleta.* — Se dice de una ecuación diferencial de la forma $F(y, y') = 0$, o $F(x, y') = 0$ porque entre los términos $x$ e $y$ uno de ellos no aparece explícitamente.

## Incompletitud

• *Teorema de incompletitudes.* — V. GÖDEL.

## Incompletos

• *Cocientes incompletos de una fracción continua.* — V. CONTINUA.

## Inconmensurable

Caído en desuso. Sinónimo de irracional.

## Incremento

Antiguo término del cálculo diferencial; esta palabra designa actualmente, en informática, la variación del valor de una variable en diferentes fases de la ejecución de un programa.

## Incrementos

• *Teorema de los incrementos finitos.* — V. FINITOS.

## Indecidible

• *Enunciado indecidible.* — Sea $\mathcal{T}$ una teoría de lenguaje L. Un enunciado A de L se denomina indecidible en $\mathcal{T}$ si A y (no-A) no son teoremas de $\mathcal{T}$. En caso contrario, A se denomina decidible. En teoría de conjuntos, en el sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel la hipótesis del continuo es indecidible.

V. COHEN, GÖDEL.

## Indefinida

• *Forma bilineal simétrica (resp. forma sesquilineal hermitiana) indefinida.* — Forma bilineal simétrica $\varphi$ sobre un **R**-espacio vectorial E (resp. forma sesquilineal hermitiana $\varphi$ sobre un **C**-espacio vectorial E) que no es ni positiva ni negativa; por tanto, existe al menos un par $(x, y)$ de vectores de E que verifican $\varphi(x, x) > 0$ y $\varphi(y, y) < 0$.

• *Integral indefinida.* — Sea $f$ una función continua sobre un intervalo **I** de **R** y sea $a \in \mathbf{I}$; la función F definida sobre **I** por la integral de Riemann $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f$, así como todas las funciones G de la forma $G(x) = F(x) + \alpha$, donde $\alpha$ es una constante. Tal primitiva se representa a veces $\int f(t)\,dt$ y se denomina una integral indefinida. Por eso se escribe:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + \alpha$$

V. INTEGRAL (Cálculo).

## Indefinidamente

V. DERIVABLE, DIFERENCIABLE.

## Independiente

• *Conjunto independiente de un matroide* (E, $\mathcal{S}$). — Parte de E que pertenece a $\mathcal{S}$. Una parte de E que no pertenezca a $\mathcal{S}$ se denomina un conjunto dependiente de un matroide.

V. MATROIDE.

## Independientes

• *Familia de sucesos mutuamente independientes de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. — Familia de sucesos $(A_i)_{i\in I}$ tal que para toda parte finita J de **I** tengamos:

$$P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

• *Familia de vectores linealmente independientes de un módulo.* — Familia de vectores $(x_i)_{i\in I}$ tal que para toda parte finita J de I la combinación lineal $\sum_{j\in J} a_j x_j$ sea nula si y solamente si todos los coeficientes $(a_j)_{j\in J}$ son nulos. En el caso contrario, los vectores se llaman linealmente dependientes.
V. LIBRE (Familia), LIGADA (Familia).

• *Familia o sistema de puntos afinmente independientes de un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Familia $(A_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ de puntos tales que la variedad lineal afín que engendran sea de dimensión $k$. En el caso contrario, los puntos se llaman afinmente dependientes. Los puntos de la familia $(A_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ son independientes si y solamente si la familia $(\overrightarrow{A_0A_i})_{1\leqslant i\leqslant k}$ es una familia de vectores linealmente independientes.
V. LIBRE (Familia), LIGADA (Familia).

• *Familia o sistema de puntos proyectivamente independientes de un espacio proyectivo* P(E). — Familia de $(k+1)$ puntos de P(E) tales que la variedad lineal proyectiva que engendran sean de dimensión $k$.
V. LIBRE (Familia), LIGADA (Familia).

• *Números algebraicamente independientes.* — V. ALGEBRAICAMENTE.

• *Sucesos estocásticamente independientes de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. — Sucesos A y B tales que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En el caso contrario, los sucesos se llaman estocásticamente dependientes.

• *Variables aleatorias independientes sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. — Variables aleatorias X e Y tales que para todo número real $a$ y todo número real $b$ los sucesos $X^{-1}(]-\infty, a[)$ e $Y^{-1}(]-\infty, b[)$ sean estocásticamente independientes. En el caso contrario, las variables se llaman dependientes.

## Indeterminada

• *Ecuación indeterminada.* — Ecuación que admite una infinidad de soluciones.

• *Forma indeterminada.* — Se dice que la diferencia, el cociente o el producto de dos funciones numéricas $f$ y $g$ presentan una forma indeterminada en $x_0$ si, conociendo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

las reglas elementales sobre los límites no permiten determinar el límite en $x_0$ de $f-g$ de $f/g$ o de $fg$.

## Indeterminado

• *Sistema de ecuaciones indeterminado.* — Sistema que admite una infinidad de soluciones.

## Indicador

- *Indicador de Euler.* — V. EULER.

## Indicatriz

- *Indicatriz de Dupin.* — V. DUPIN.
- *Indicatriz esférica.* — V. ESFÉRICA.
- *Función indicatriz de Euler.* — Sinónimo de indicador de Euler.
- *Función indicatriz de una parte de un conjunto.* — Sinónimo de función característica.

## Indice

En el grafismo $a_b$ se dice que la letra *b* está escrita en índice con relación a la letra *a* y se lee «*a* índice *b*». Cuando se puede elegir, se prefiere una escritura en índice a una escritura en exponente, que puede prestarse a confusión con la notación de las funciones potenciales.
V. FAMILIA.

- *Indice cromático de un multigrado.* — V. CROMÁTICO.
- *Indice de un lazo* $\gamma$ *de* $[\![0, 1]\!]$ *en* C *con relación a un elemento* $z_0$ *de* C. — Entero $I(\gamma, z_0)$ definido por:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Intuitivamente, es el número de vueltas alrededor de $z_0$ efectuadas por un punto que describe todo el lazo.
V. RESIDUOS (Teorema de los).

- *Indice de un sub-grupo* H *de un grupo* G. — Cardinal del conjunto cociente $G/\mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ designa la equivalencia definida por $x \mathcal{R} y$ si y solamente si $xy^{-1} \in H$. Cuando H es un sub-grupo distinguido en G, el índice de H en G es igual al orden del grupo cociente G/H.
V. COCIENTE.
- *Indice libre, ligado o mudo.* — V. MUTIFICADOR.

## Individuo

- *Individuo en estadísticas.* — Elemento de una población.
- *Individuo en cálculo de predicados.* — V. PREDICADOS.

## Inducción

- *Axioma de inducción.* — V. PEANO.
- *Razonamiento por inducción.* — Razonamiento por recurrencia. Hasta el si-

glo XIX (Gauss, Cauchy), los matemáticos no dudaban en recurrir a un razonamiento por inducción de la misma forma y en el mismo sentido que en las ciencias experimentales. Esta heurística puede sugerir direcciones de investigaciones pero no podría tener en ningún caso valor demostrativo y ha abocado en muchos casos a errores. Por el contrario, el razonamiento por recurrencia, bastante impropiamente llamado razonamiento por inducción, es perfectamente válido, puesto que de hecho es una deducción.
V. RECURRENCIA, SKEWES.

• *Razonamiento por inducción (o recurrencia) transfinita.* — Generalización del razonamiento por recurrencia, en el que los ordinales reemplazan a los enteros naturales (que son los ordinales finitos). Su principio es el siguiente: para probar que una propiedad $P(\alpha)$ que se refiere a un ordinal $\alpha$ es verdadera para todo ordinal $\alpha \geqslant \alpha_0$, basta con probar que $P(\alpha)$ es verdadera para $\alpha = \alpha_0$ y que si $P(\alpha)$ es verdadera para todo ordinal $\alpha$ tal que $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$, entonces $P(\beta)$ es verdadera.

## nducida

• *Estructura inducida.* — Sea F una parte de un conjunto E estable para las leyes definidas sobre E. La estructura definida sobre F por las leyes inducidas sobre F por las de E se llama estructura inducida sobre F por la de E.

• *Ley inducida sobre una parte estable* A *de un conjunto* E *por una ley de composición interna (o externa) sobre* E. — Restricción en A de la ley de composición interna (o externa) sobre E. Por ejemplo, la multiplicación sobre Q puede considerarse como la ley inducida sobre Q por la multiplicación sobre R.

V. RESTRICCIÓN.

• *Topología inducida.* — Sea P una parte de un espacio topológico E. Las intersecciones de P con los abiertos de E determinan una topología sobre P cuyos abiertos son esas intersecciones. Se llama topología inducida sobre P por la topología de E.

## nductivo

• *Conjunto inductivo.* — Conjunto ordenado en el que toda cadena está mayorada.
V. ZORN.

## Inecuación

Como ecuación, este término, empleado solo, es matemáticamente indefinible. Su sentido depende esencialmente del contexto. La mayor parte de las inecuaciones aparecen como relaciones de la forma $f(x) \leqslant g(x)$, donde $f$ y $g$ son aplicaciones de un conjunto E en un conjunto ordenado F. Resolver la inecuación consiste entonces en determinar el conjunto de los elementos $a$ de E tal que la desigualdad $f(a) \leqslant g(a)$ sea verdadera.

## Ineficaz

• *Algoritmo ineficaz.* — V. EFICACIA.

## Inercia

• *Centro de inercia de un sistema material.* — Dado un sistema de $n$ puntos $M_1, M_2, ..., M_n$ de masas $m_1, m_2, ..., m_n$, se denomina centro de inercia del sistema al baricentro G de los puntos $M_1, M_2, ..., M_n$ afectados de coeficientes $m_1, m_2, ..., m_n$. En el caso de un sólido S de masa M cuya densidad en el punto de las coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ es $\rho(x, y, z)$, se llama centro de inercia de S al punto G de coordenadas $(x_G, y_G, z_G)$ definido por:

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint_S x\,\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iiint_S y\,\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_S z\,\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

• *Ejes de inercia.* — El tensor de inercia I de un sistema material por relación a un punto O admite tres sub-espacios propios que son tres rectas vectoriales de $\mathbf{R}^3$ dos a dos ortogonales. Las rectas que pasan por O y admiten por dirección las rectas vectoriales citadas anteriormente se llaman ejes de inercia del sistema en O.

• *Elipsoide de inercia.* — Sean O un punto de un sistema material S e $I_{\vec{u}}$ el momento de inercia de S en relación a una recta que pasa por O y de vector director unitario $\vec{u}$. Cuando $\vec{u}$ describe el conjunto de vectores unitarios de $\mathbf{R}^3$, el punto M tal que

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sqrt{I_{\vec{u}}}}\vec{u}$ describe un elipsoide llamado elipsoide de inercias de S en O. Sus ejes de simetría son los ejes de inercia en O.

• *Fuerza de inercia.* — V. ALEMBERT (Principio de d').

• *Ley de inercia de Sylvester.* — V. SYLVESTER.

• *Momento de inercia.* — Dada una recta $\Delta$ y un sistema S de $n$ puntos $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de masas $m_i$, se llama momento de inercia de S por relación a $\Delta$ al número:

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

donde $r_i$ es la distancia del punto $M_i$ a $\Delta$. En el caso de un sólido S cuya densidad en el punto de coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ es $\rho(x, y, z)$ se llama momento de inercia de S en relación a una recta $\Delta$ a la integral:

$$I_\Delta = \iiint_S \rho(x, y, z)\,d^2(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

donde $d(x, y, z)$ es la distancia del punto de coordenadas $(x, y, z)$ a $\Delta$.
V. HUYGENS (Teorema de).

• *Tensor de inercia.* — Dado un punto O de un sistema material S, existe un endomorfismo simétrico I del espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$ tal que el momento de inercia de S con relación a una recta $\Delta$ que pasa por O y de vector director unitario $\vec{u}$ sea igual a $I_\Delta = \vec{u} \cdot \mathbf{I}(\vec{u})$. El endomorfismo I se denomina tensor de inercia en O.

## Inf

Abreviatura de extremo inferior.
V. INFERIOR.

## Inferencia

(Lógica.) Cuando el enunciado $A \Rightarrow B$ es verdadero, se dice a veces que A infiere a B y se escribe $A \vdash B$; el símbolo $\vdash$ se llama símbolo de inferencia.

## Inferior

Cuando una relación de orden sobre un conjunto E se representa $\leqslant$, la expresión $x \leqslant y$ se lee «$x$ es inferior a $y$». En la enseñanza primaria y secundaria «inferior» se emplea a menudo por «estrictamente inferior» y $\leqslant$ se lee «inferior o igual a» o también «más pequeño que».

• *Envolvente inferior de una familia* $(f_i)_{i \in I}$ *de funciones definidas sobre un conjunto* E *y con valores reales.* — Función $f$, representada $\inf_{i \in I} f_i$, definida sobre E por $f(x) = \inf_{i \in I} f_i(x)$.

• *Extremo inferior de una función* $f$ *definida sobre un conjunto* E *y con valores en un conjunto ordenado* F. — Extremo inferior, representado $\inf_{x \in E} f(x)$, de la imagen $\mathrm{Im}(f)$ de $f$.

• *Extremo inferior de una parte* A *de un conjunto ordenado* E. — El elemento mayor, si existe, del conjunto de minorantes de A. El extremo inferior de A, representado $\inf_{x \in A} x$ puede no pertenecer a A. Toda parte minorada de **R** admite un extremo inferior pero una parte minorada de **Q** no admite uno necesariamente en **Q**.
V. MÍNIMO.

• *Inferior estrictamente.* — Cuando una relación de orden estricto sobre un conjunto E se representa $<$, la expresión $x < y$ se lee: «$x$ es estrictamente inferior a $y$».

• *Límites inferior y superior de una función.* — Sean $f$ una función numérica definida sobre un entorno I de un número real $a$ y E el conjunto de los

valores de adherencia de $f$ en el punto $a$, es decir, el conjunto de los números reales y que son adherentes a todas las imágenes por $f$ de los entornos de $a$. El extremo inferior de E, representado:

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad o \quad \lim_{x \to a} \inf f(x)$$

se denomina límite inferior de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$. El extremo superior de E representado

$$\overline{\lim_{x \to a}} f(x) \quad o \quad \lim_{x \to a} \sup f(x)$$

se llama límite superior de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$. Se definen de igual forma los límites superiores e inferiores de $f$ en $+\infty$ y en $-\infty$. Estos límites verifican

$$\lim_{x \to a} \inf f(x) \leqslant \lim_{x \to a} \sup f(x).$$

En el caso en que $f(x)$ tenga un límite $\lambda$ cuando $x$ tiende hacia $a$, los límites inferiores y superiores son iguales y su valor común es $\lambda$.

• *Matriz triangular inferior.* — Matriz cuadrada $M = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• *Semi-continuidad inferior.* — V. INFERIORMENTE (Semi-continua).

• *Semi-retículo inferior.* — Conjunto ordenado E tal que toda parte $\{x, y\}$ de E de los elementos admite un extremo inferior (representado $x \wedge y$).

• *Suma de Darboux inferior.* — V. DARBOUX.

## Inferiormente

• *Función real semi-continua inferiormente en* $x_0$. — Función $f$ definida en el entorno de $x_0 \in \mathbf{R}$ y tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mu > 0$ para el que $|x - x_0| \leqslant \mu$ implica $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$.

• *Parte de un conjunto ordenado acotado inferiormente.* — Parte minorada.

## Infimum

Sinónimo poco utilizado de extremo inferior.

## Infinita

• *Rama infinita de un arco parametrado* $(\mathbf{I}, f)$ *del plano.* — Sean O un punto

cualquiera del plano y $M_t = f(t)$ el punto del arco asociado al valor $t \in I$. Se dice que el arco parametrado admite una rama infinita relativa al valor $t_1$, si la longitud OM, tiende hacia el infinito cuando $t$ tiende hacia $t_1$. Sea una función numérica $g$ definida sobre un intervalo $]-\infty, a[$ (resp. $]b, +\infty[$) de $\mathbf{R}$. La representación gráfica de $g$ en un sistema de referencias cartesiano presenta una rama infinita relativa a $x$ que tiende hacia $-\infty$ (resp. $+\infty$) cuyo estudio queda resumido por el cuadro que damos a continuación, donde $\lambda$, $a$ y $b$ designan respectivamente los límites eventuales de $g(x)$, $g(x)/x$ y $g(x) - ax$ cuando $x$ tiende hacia $-\infty$ (resp. $+\infty$).

<table>
<tr><td>$\lambda \in \mathbf{R}$</td><td colspan="2">La recta de ecuación $y = \lambda$ es asíntota</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lambda$ no existe<br>o<br>$\lambda = +\infty$<br>o<br>$\lambda = -\infty$</td><td>$a$<br>no existe</td><td colspan="2">La rama infinita no admite<br>ni recta asíntota<br>ni dirección asintótica</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a \in \mathbf{R}$</td><td>$b$<br>no existe</td><td>Dirección asintótica<br>$\Delta: y = ax$ pero no hay<br>rama parabólica</td></tr>
<tr><td>$b \in \mathbf{R}$</td><td>La recta de ecuación<br>$y = ax + b$ es<br>asíntota</td></tr>
<tr><td>$b = +\infty$<br>o<br>$b = -\infty$</td><td>Rama parabólica<br>de dirección asintótica<br>$\Delta: y = ax$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$a = +\infty$ o $-\infty$</td><td>Rama parabólica<br>de dirección $\Delta: x = 0$</td></tr>
</table>

V. ASÍNTOTA (Recta), ASINTÓTICA (Dirección), PARABÓLICA (Rama).

• *Espacio vectorial de dimensión infinita.* — V. DIMENSIÓN.

• *Familia infinita.* — Familia de la que el conjunto de los índices es infinito.

• *Límite infinito.* — Se dice que una función numérica $f$ de variable real admite un límite infinito cuando $x$ tiende hacia $a \in \overline{\mathbf{R}}$ si $f(x)$ tiende hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$ cuando $x$ tiende hacia $a$.
V. LÍMITE.

• *Método del descenso infinito.* — Método de razonamiento hábilmente utilizado por Fermat que utiliza el hecho de que una sucesión decreciente infinita de enteros naturales es necesariamente estacionaria. En particular, semejante sucesión no puede ser estrictamente decreciente.

• *Sucesión infinita.* — Familia indizada por una parte infinita de N.

• *Valor infinito.* — Sea $f$ una función definida sobre un conjunto E y con valores en $\overline{\mathbf{R}}$; admite en $x \in E$ un valor finito (resp. infinito) si $f(x) \in \mathbf{R}$ [resp. $f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$].

## Infinitamente

V. GRANDE, PEQUEÑO.

• *Enteros o números reales infinitamente grandes* (análisis no estándar). — V. GRANDES.

• *Números reales infinitamente pequeños* (análisis no estándar). — V. PEQUEÑOS.

## Infinitesimal

• *Cálculo infinitesimal.* — Esta expresión se emplea principalmente para designar los conceptos y técnicas del análisis infinitesimal, creados y desarrollados sobre todo entre los siglos XVII y XIX bajo el impulso de Leibniz y Newton. Comprende principalmente el cálculo diferencial, el cálculo integral y el cálculo de variaciones. Sólo fue establecido sobre bases rigurosas a partir del siglo XIX.

• *Geometría infinitesimal.* — Origen de la geometría diferencial.

## Infinito

En matemática, la palabra infinito empleada sola no tiene sentido. En cambio, se pueden definir expresiones como: «conjunto infinito» y ciertas locuciones «tender hacia el infinito», «más infinito», «menos infinito», etc. La noción de infinito presenta dos aspectos: el infinito potencial, que evoca una posibilidad de superación (por ejemplo, todo número primo admite uno siguiente, por lo que la lista de los números primos es ilimitada) y el infinito actual, que es una «toma de conciencia» de todos los elementos a la vez de un conjunto infinito (el conjunto de los enteros naturales, etc.). El uso del infinito actual ha sido condenado hace mucho en matemáticas.

• *Adjunción de un punto en el infinito.* — V. ALEXANDROV (Compactificado de).

• *Axioma del infinito.* — Es uno de los axiomas de la teoría de los conjuntos que puede enunciarse bajo diferentes formas:

*a*) existe un conjunto infinito;
*b*) existe un ordinal infinito.

• *Cardinal infinito.* — Cardinal $\alpha$ que no es finito, es decir, tal que $\alpha = \alpha + 1$; es el cardinal de un conjunto infinito. La existencia de un cardinal infinito es un axioma de la teoría de conjuntos.
V. ALEPH, FINITO (Cardinal), TRANSFINITO.

• *Círculo del infinito.* — Generalización en el espacio de los puntos cíclicos en

el plano. Sea $\hat{\mathbf{R}}^3$ el completado proyectivo de $\mathbf{R}^3$. Los puntos de $\hat{\mathbf{R}}^3$ cuyas coordenadas homogéneas verifican $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ y $T = 0$ son todos ellos imaginarios. Su conjunto se denomina círculo del infinito, umbilical o círculo absoluto. Todo plano de $\hat{\mathbf{R}}^3$ «corta» el círculo del infinito en dos puntos que son los puntos cíclicos de ese plano.

• *Recta del infinito.* — V. INFINITO (Hiperplano del).

• *Conjunto infinito.* — Conjunto que no es finito. Un conjunto es infinito si y solamente si existe una biyección de ese conjunto sobre uno de sus sub-conjuntos propios (axioma de Dedekind). Por ejemplo, N es infinito porque la aplicación de N en el conjunto de los enteros naturales pares que a $n \in \mathbf{N}$ asocia $2n$ es una biyección.

• *Función holomorfa en el infinito.* — V. HOLOMORFA.

• *Hiperplano del infinito.* — Sean $\mathscr{E}$ un espacio afín asociado a un K-espacio vectorial E y $\hat{\mathscr{E}} = \mathrm{P}(\mathrm{E} \times \mathrm{K})$ el completado proyectivo de $\mathscr{E}$. El hiperplano proyectivo H de $\hat{\mathscr{E}}$ definido por $\mathrm{H} = \mathrm{P}(\mathrm{E} \times \{0\})$ se denomina hiperplano del infinito de $\hat{\mathscr{E}}$ o por abuso de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ es una recta afín, H es un punto llamado del infinito. Si $\mathscr{E}$ es un plano afín, H es una recta llamada del infinito y si $\mathscr{E}$ es un espacio afín de dimensión 3, H es un plano llamado del infinito.

• *Menos infinito y más infinito.* — Para definir la recta real acabada representada $\overline{\mathbf{R}}$ se introducen dos nuevos elementos representados $+\infty$ y $-\infty$ que se denominan «más infinito» y «menos infinito». Se exige entonces que $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

• *Ordinal infinito.* — Ordinal $\alpha$ que no es finito. Frecuentemente se representa $\omega$ el ordinal infinito más pequeño; la existencia de un ordinal infinito es un axioma de la teoría de los conjuntos.
V. FINITO (Cardinal), TRANSFINITO.

• *Plano del infinito.* — V. INFINITO (Hiperplano del).

• *Punto del infinito.* — V. INFINITO (Hiperplano del).

• *Punto al infinito en la dirección de la recta* D. — Punto del infinito del completado proyectivo de D. Dos rectas de un espacio afín son paralelas si y solamente si tienen igual punto del infinito.

• *Producto infinito.* — Sea $(x_n)_{n \geqslant 0}$ una sucesión de números complejos. Se denomina producto infinito de factor general $x_n$ la sucesión $(\mathrm{P}_n)_{n \geqslant 0}$ de término general $\mathrm{P}_n = x_0 x_1 x_2 \ldots x_n$. El producto infinito se llama convergente si la sucesión $(\mathrm{P}_n)_{n \geqslant 0}$ converge hacia un número P no nulo, representado $\prod_{n=0}^{\infty} x_n$ y llamado producto infinito de la sucesión $(x_n)$. (Cuando $\mathrm{P} = 0$ se conviene en considerar el producto como divergente.) En el caso en que $x_n \neq 0$ para todo $n \geqslant 0$ el producto infinito se llama absolutamente convergente si la serie $\Sigma(x_n - 1)$ es absolutamente convergente; se denomina conmutativamente convergente si su límite P permanece sin alteración cuando se modifica el orden de sus factores. La convergencia conmutativa y la convergencia absoluta son equivalentes.

• *Tender hacia el infinito.* — V. LÍMITE.

## Infinitud

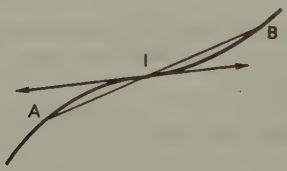
• *Infinitud de elementos de un conjunto infinito* E. — Parte infinita de E.

## Inflexible

• *Poliedro o superficie inflexible.* — Aquélla cuya forma no se puede modificar sin modificar la longitud por lo menos de una curva trazada sobre ese poliedro o sobre esa superficie. También se dice que ese poliedro o esa superficie son rígidos.
V. BRICARD, CAUCHY, CONNELLY, FLEXAEDRO, FLEXIBLE.

## Inflexión

• *Punto de inflexión de una curva plana.* — Un punto I donde la curva admite una tangente se llama punto de inflexión si, cualquiera que sea el entorno V de I, existe una recta que pase por I y que corta la curva en tres puntos, A, I y B, de V tales que I esté entre A y B. Con frecuencia se dice que en el punto de inflexión la curva atraviesa a su tangente. Sea una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$, siendo $f$ por lo menos $(n + 1)$ veces derivable. Si $n$ es par, si $f^{(i)}(x_0) = 0$ para todo $i \in \{2, 3, ..., n\}$ y si $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, entonces el punto de la curva de abscisa $x_0$ es un punto de inflexión.




## Información

• *Información matemática.* — Viene dada por uno o varios sucesos, cada uno de los cuales está afectado de una probabilidad. El sentido dado a este término está bastante alejado del sentido usual.

• *Juegos de información perfecta.* — Un juego es de información perfecta si en cada momento del juego los dos jugadores poseen una información total sobre las reglas del juego y sobre las jugadas realizadas anteriormente. El juego de go, el juego de ajedrez son de información perfecta. El juego «piedra-papel-tijeras» no es de información perfecta porque los dos jugadores juegan en el mismo instante y debido a ello cada jugador no sabe, en el momento de escoger un nombre, qué nombre ha sido escogido por el otro.
V. ESTRICTA (Juegos de determinación).

• *Cantidad de información.* — Número proporcional al logaritmo de la probabilidad de la información.

• *Fuente de información.* — Generador aleatorio de mensajes.

• *Teoría matemática de la información.* — La teoría matemática de la información, aún llamada teoría estadística de la comunicación o teoría de la señal, concierne al estudio teórico de las emisiones, transmisiones (por un canal) y recepción de las señales. Esta teoría relativamente reciente tiene numerosas aplicaciones: teléfono, radio, sistema nervioso, lingüística, etc.
V. LIBRE (Monoide).

## Informática

Dominio que va desde la concepción de los ordenadores hasta el estudio de sus métodos de utilización. Esta disciplina encrucijada, centrada sobre el ordenador, pero que puede prescindir de él, concierne al tratamiento automático de datos: por eso sus dominios de aplicaciones son particularmente variados: matemáticas, gestión, teoría de los juegos, traducción automática, enseñanza, medicina, biología...

## Ingham, Alfred Edward (1900-1967)

• *Teorema de Ingham.* — Para $n \in \mathbf{N}$ bastante grande, existe un entero primo entre $n^3$ y $(n+1)^3$.
V. BERTRAND (Conjetura de), BREUSH (Teorema de).

## Inicial

• *Sección inicial de un conjunto ordenado* E. — Sea $a$ un elemento de E. El conjunto $]\leftarrow, a]$ de los elementos de E inferiores a $a$ se denomina sección inicial cerrada de extremidad $a$. El conjunto de los elementos de E estrictamente inferiores a $a$ se llama sección inicial abierta de extremidad $a$.
V. FINAL, INTERVALO.

## Inicial

• *Extremidad inicial de un arco de un grafo.* — V. ARCO.

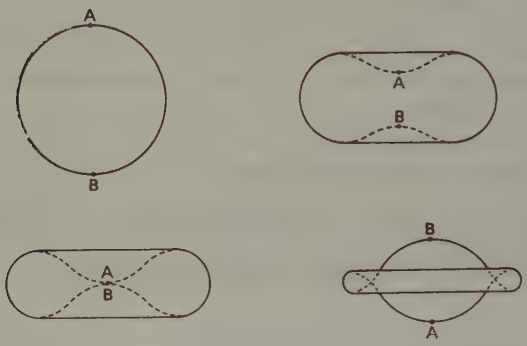
• *Condición inicial de una ecuación diferencial.* — V. CAUCHY (Problema de).

## Inmersión

Sea $\Sigma$ una superficie parametrada de $\mathbf{R}^3$ de clase $C^k$ ($k \geqslant 0$) de representación paramétrica $f: U \to \mathbf{R}^3$. Una aplicación continua $\mu$ de $\Sigma$ en $\mathbf{R}^3$ se denomina una inmersión de $\Sigma$ en $\mathbf{R}^3$ si $\mu \circ f: U \to \mathbf{R}^3$ es diferenciable y si para todo punto $(u_0, v_0) \in U$ existe un entorno abierto $U_0$ (en $\mathbf{R}^2$) de $(u_0, v_0)$, un entorno $V_0$ (en $\mathbf{R}^3$) de $(\mu \circ f)(u_0, v_0)$, un intervalo abierto $I = ]-\alpha, \alpha[$ de $\mathbf{R}$ y un difeomorfismo $\varphi$ de $U_0 \times I$ sobre $V_0$ tales que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\mu \circ f} & V_0 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{\varphi} & \\ U_0 \times I & & \end{array} \qquad \text{où } i : u \mapsto (u, 0).$$

La superficie parametrada $\mu(\Sigma)$ se denomina superficie sumergida. Más generalmente, se define la inmersión de una variedad diferencial en otra. Intuitivamente, se obtienen inmersiones de la esfera deformándola sin plegar ni desgarrar la esfera y permitiendo que dos regiones diferentes de ella puedan entrar en contacto e incluso atravesarse. Véanse los ejemplos siguientes:




El significado de este término depende del contexto. Una inmersión de E en F significa que se identifica E con su imagen en F por un homomorfismo canónico de E en F. Ejemplo: inmersión de Z en Q o, en geometría, de $\mathbf{R}^p$ en $\mathbf{R}^n$ para $p \leqslant n$.

• *Inmersión de Sègre.* — V. SÈGRE.

• *Inmersión de una superficie en* $\mathbf{R}^3$. — Dada una superficie parametrada $(\Sigma, f)$ de $\mathbf{R}^3$, se denomina inmersión de $\Sigma$ en $\mathbf{R}^3$ a una inmersión $\mu$ de $\Sigma$ en $\mathbf{R}^3$ tal que $\mu$ sea un homomorfismo de $\Sigma$ sobre $\mu(\Sigma)$, siendo las topologías de $\Sigma$ y $\mu(\Sigma)$ las inducidas por la topología de $\mathbf{R}^3$. Más generalmente, se define la inmersión de una variedad diferencial en otra. Intuitivamente, si se deforma una esfera $\Sigma$ sin plegarla ni desgarrarla de forma que dos puntos distintos de $\Sigma$ jamás coincidan, la superficie $\Sigma'$ obtenida es la imagen de $\Sigma$ por diversas inmersiones.

V. ANTIPODAL, INVERSIÓN (de la esfera).

## Inscriptible

• *Poliedro inscriptible.* — Poliedro que puede ser inscrito en una esfera. Los poliedros regulares son inscriptibles.

V. INSCRITO (Poliedro).

• *Polígono inscriptible.* — Polígono que puede ser inscrito en un círculo. Los polígonos regulares son inscriptibles.
V. INSCRITO (Polígono).

## Inscrita

• *Esfera inscrita en un cono de revolución.* — Esfera tangente a todas las generatrices del cono. Entonces el cono está circunscrito a la esfera.
V. CIRCUNSCRITO (Cono).

• *Esfera inscrita en un cilindro de revolución.* — Esfera tangente a todas las generatrices del cilindro. Entonces el cilindro está circunscrito a la esfera.

V. CIRCUNSCRITO (Cilindro).

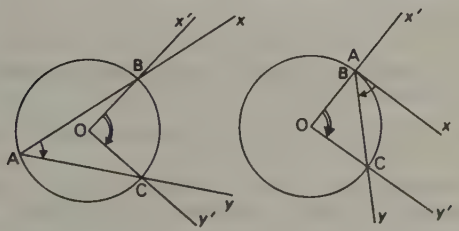
• *Esfera inscrita en un poliedro convexo.* — Esfera tangente a cada cara del poliedro. Semejante esfera no existe necesariamente. Los poliedros regulares y los tetraedros admiten una esfera inscrita.

## Inscrito

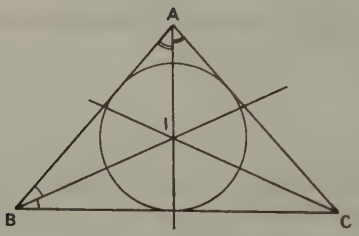
• *Angulo inscrito.* — Dada una circunferencia de centro O, el ángulo $\widehat{(Ax, Ay)}$ de un par de semi-rectas de igual origen A se llama inscrito en la circunferencia si A pertenece a la circunferencia y si cada semi-recta corta a la circunferencia en un punto distinto de A o es tangente en A a la circunferencia. Sean Ax y Ox' (resp. Ay y Oy') semi-rectas que se cortan en un punto B (resp. C) de la circunferencia. Tenemos:

$$(\widehat{Ox', Oy'}) = 2(\widehat{Ax, Ay});$$

se dice que un ángulo al centro es el doble de un ángulo inscrito que intercepta el mismo arco.
V. CAPAZ (Arco).




• *Círculo inscrito en un polígono convexo.* — Círculo tangente a cada lado del polígono. Un círculo tal no existe necesariamente. Un triángulo y todo polígono regular admiten un círculo inscrito. Para el triángulo, el centro del círculo inscrito es el punto de concurrencia de sus bisectrices interiores.




Círculo inscrito en un triángulo

• *Poliedro inscrito en una esfera.* — Poliedro del que todos los vértices están sobre la esfera.

• *Polígono inscrito en un círculo.* — Polígono cuyos vértices todos están sobre el círculo.

## Instantáneo

• *Centro instantáneo de rotación del movimiento de un plano* P' *sobre un plano fijo* P. — En cada instante $t$, el movimiento de P' es tangente a un movimiento de rotación de eje $\Delta$ perpendicular a P. El punto de intersección I de $\Delta$ con P se llama centro instantáneo de rotación. La velocidad de arrastre de I es nula.

## Integrable

• *Función de cuadrado integrable.* — Una función de cuadrado integrable en el sentido de Riemann es una función de valores reales o complejos tal que $|f|^2$ sea integrable (en el sentido de Riemann). Una función de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue es una función medible $f$ tal que $|f|^2$ sea integrable (en el sentido de Lebesgue). El conjunto de estos últimos es un espacio prehilbertiano para la forma bilineal simétrica:

$$(f, g) \mapsto \int f(s)g(x)\,dx$$

representado $\mathscr{L}^2$. Si $\mathscr{L}^1$ designa el espacio de las funciones integrables no tenemos ni $\mathscr{L}^1 \subset \mathscr{L}^2$ ni $\mathscr{L}^2 \subset \mathscr{L}^1$.

• *Ecuación diferencial integrable.* — Ecuación diferencial que admite soluciones.

• *Función integrable.* — Función que admite una integral. Según la integral de que se trata, se precisa en el sentido de Lebesgue, de Riemann...

## Integración

Usualmente, efectuar la integración de $f$ sobre I es calcular la integral de $f$ sobre I (V. PARTES).

• *Teoría de la integración.* — En estrecha relación con la teoría de la medida, con la que está prácticamente confundida, la teoría de la integración se interesa en la actualidad tanto por la integral de funciones como por las medidas de conjuntos. En ambos casos, según una presentación unificadora debida a Daniell, se remite al estudio de una forma lineal (medida o integral) sobre un espacio de funciones y a su prolongación sobre un espacio mayor. La noción de integral se ha esbozado sucesivamente a partir de los trabajos de Pascal, Fermat, Euler, Leibniz, Newton, Cauchy y Riemann (durante mucho tiempo se ha dicho que integrar es pasar de lo infinitamente pequeño a lo finito). La teoría de la medida, aunque presentida ya por Eudoxio y Arquímedes, se ha desarrollado más recientemente gracias a los trabajos de Lebesgue, Radon, Riesz, Borel, Stieltjes, Daniell, etc.

## Integrador

Máquina que permite el cálculo aproximado de integrales definidas o el de integrales de ecuaciones diferenciales. En la actualidad, los integradores más perfeccionados son calculadores analógicos.

## Integral

La noción de integral ha aparecido con la búsqueda de la medida de las áreas de las figuras geométricas elementales y como noción inversa, en cierto sentido, de la de derivada.
Se llama integrales a ciertas formas lineales $\mu$ sobre ciertos espacios vectoriales de funciones. Las más utilizadas son la integral de Riemann y la de Lebesgue. La imagen, si existe, de una función $f$ por la forma lineal $\mu$ es un escalar llamado integral de $f$ y $f$ se llama integrable en el sentido de la integral $\mu$. V. ABELIANA, DIRICHLET, DOBLE, ELÍPTICA, FÉJER, FOURIER, FRESNEL, GAUSS, GENERALIZADA, INTEGRACIÓN, LEBESGUE, POISSON, RIEMANN, STIELTJES, WALLIS.

• *Cálculo integral.* — Conjunto de los métodos de cálculo de las primitivas, de las integrales definidas, generalizadas y múltiples y de los métodos que permiten la resolución de las ecuaciones diferenciales. A continuación damos algunas integrales indefinidas de las más usuales:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{para } n \text{ entero racional diferente de } -1$$

$$\int x^{-1} dx = \operatorname{Log}|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\operatorname{Log} a} + c \quad (a > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

$$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + c \qquad \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\operatorname{Log}|\cos x| + c \qquad \int \operatorname{cotg} x\,dx = \operatorname{Log}|\operatorname{sen} x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsen} x + c \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = \operatorname{Log}|x + \sqrt{x^2+h}| + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c \qquad \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{Log}\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + c \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = 2\ \operatorname{Arctg} e^x + c.$$

• *Coseno integral.* — Función real Ci definida por:

$$\operatorname{Ci}(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt.$$

• *Curva integral de una ecuación diferencial.* — Curva representativa de una solución de la ecuación diferencial.

• *Ecuación integral.* — Ecuación de la forma:

$$\varphi(s) - \lambda \int_\Delta \mathrm{K}(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

donde $f$ es una función dada definida sobre un intervalo real $\Delta$ y K una función definida sobre $\Delta \times \Delta$ (K es el núcleo de la ecuación). La incógnita es la función.
V. DEGENERADA, FREDHOLM, GOURSAT (Núcleo de), VOLTERRA.

• *Fórmula integral de Cauchy.* — V. CAUCHY.

• *Integral compleja.* — V. COMPLEJA.

• *Integral curvilínea.* — V. CURVILÍNEA.

• *Integral de círculo.* — Nombre dado a la cuadratriz de Abdank-Abakanowicz.

• *Integral definida.* — V. DEFINIDA.

• *Integral doble, triple, múltiple.* — V. MÚLTIPLE.

• *Integral de Euler o euleriana de primera (resp. segunda) especie.* — Función euleriana de primera (resp. segunda) especie. V. EULERIANA (Función).

• *Integral de una ecuación diferencial o de una ecuación en derivadas parciales.* — Solución de esa ecuación.

• *Integral generalizada absolutamente convergente.* — V. ABSOLUTA (Convergencia).

• *Integral impropia o generalizada convergente.* — V. GENERALIZADA.

• *Integral indefinida.* — V. INDEFINIDA.

• *Integral de Painlevé.* — V. PAINLEVÉ.

• *Ingral de superficie.* — V. SUPERFICIE.

• *Integral de Weierstrass.* — V. WEIERSTRASS.

• *Integral a lo largo de un camino* $\gamma : [\![a, b]\!] \to \mathbf{C}$ *de una función compleja* $f$ *continua en* $\gamma([\![a, b]\!])$. — Es por definición el número complejo:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

• *Integral primera de una ecuación diferencial* $F(x, y, y') = 0$. — V. PRIMERA.

• *Logaritmo integral.* — Se llama así a la primitiva de $(\operatorname{Log} x)^{-1}$, representada $\operatorname{Li}(x)$ y definida por:

$$\operatorname{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\operatorname{Log} u}.$$

Esta función juega un papel fundamental en teoría de números, puesto que $\operatorname{Li}(x)$ proporciona una buena aproximación de $\pi(x)$, número de los enteros primos $p \leqslant x$ y lleva a estudiar la diferencia $\pi(x) - \operatorname{Li}(x)$ (V. LITTLEWOOD, SKEWES).

• *Seno integral.* — Función real Si definida por:

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

## Integridad

• *Dominio de integridad.* — Anillo conmutativo (unitario) íntegro.

## Integro

• *Anillo íntegro.* — Anillo conmutativo (unitario) no nulo en el que el producto de dos elementos no nulos no es nulo. El anillo $\mathbf{Z}$ es íntegro pero $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ no lo es necesariamente: en $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ tenemos $2 \cdot 3 = 0$.

## Inter

El símbolo de la intersección se representa $\cap$ y se lee «intesección».

## Intercuartil

• *Desviación intercuartil.* — Diferencia $Q_3 - Q_1$ entre el tercer cuartil y el primer cuartil.

## Intérgrafo

V. ABDANK-ABAKANOWICZ.

## Interior

• *Interior de una cónica.* — Conjunto de los puntos del plano desde donde no se puede trazar ninguna tangente a la cónica.

• *Interior de una curva plana cerrada de Jordan.* — V. JORDAN (Teorema de).

• *Interior de una parte* P *de un espacio topológico* E. — Conjunto representado $\mathring{P}$ de los puntos interiores a P. El interior de P es, en el sentido de la inclusión, el abierto mayor contenido en P; por ejemplo, el interior de una bola cerrada de $\mathbf{R}^n$ es la bola abierta de igual centro e igual radio.

• *Arco incidente hacia el interior con un conjunto* B *de vértices de un grafo* G. — Arco cuya extremidad terminal pertenece a B y cuya extremidad inicial no pertenece a B.

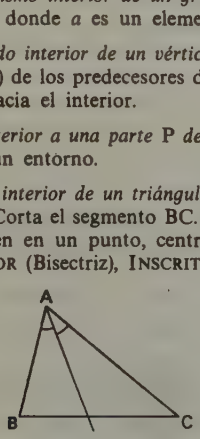
• *Arco incidente hacia el interior de un vértice* $x$ *de un grafo.* — Arco que admite $x$ como extremidad terminal.

• *Automorfismo interior de un grupo* G. — Automorfismo de G de la forma $x \mapsto axa^{-1}$, donde $a$ es un elemento de G.

• *Semi-grado interior de un vértice* $x$ *de un grafo.* — Cardinal $d^-(x)$ del conjunto $\Gamma^-(x)$ de los predecesores de $x$; es también el número de arcos incidentes en $x$ hacia el interior.

• *Punto interior a una parte* P *de un espacio topológico* E. — Punto de E del que P es un entorno.

• *Bisectriz interior de un triángulo* ABC *en* A. — Bisectriz del sector angular (AB, AC). Corta el segmento BC. Las tres bisectrices interiores de un triángulo concurren en un punto, centro del círculo inscrito en el triángulo.
V. EXTERIOR (Bisectriz), INSCRITO (Círculo).



## Interiores

• *Angulos interiores de un polígono.* — V. ANGULOS de un polígono.

## Interna

• *Ley de composición interna sobre un conjunto* E. — Aplicación de E × E en E. Ejemplos: sobre **R** la adición y la multiplicación y sobre $\mathfrak{P}$ (E) la intersección, la reunión, la diferencia y la diferencia simétrica.
V. RESTRICCIÓN.

## Internos

• *Angulos alternos internos.* — V. ALTERNOS.

## Interpolación

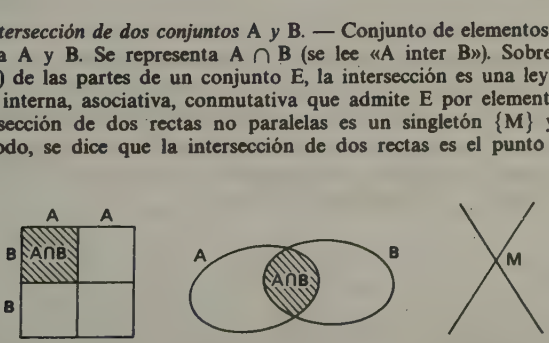
• *Interpolación de una función f definida sobre una parte finita* $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *de* **R**. — Aplicación $\hat{f}$ definida sobre **R** que prolonga *f*. Las interpolaciones más empleadas son funciones polinomios. Algunas interpolaciones permiten calcular unos valores aproximados de integrales.
V. LAGRANGE, LINEAL, SIMPSON, TRAPECIOS.

## Interpretación

• (Lógica.) *Interpretación de un término de un lenguaje* L *en una realización a de* L. — Aplicación que a todo término cerrado *t* del sobrelenguaje L(a) asocia un valor *t* en a.

## Intersección

• *Intersección de dos conjuntos* A *y* B. — Conjunto de elementos que pertenecen a A y B. Se representa A ∩ B (se lee «A inter B»). Sobre el conjunto $\mathfrak{P}$ (E) de las partes de un conjunto E, la intersección es una ley de composición interna, asociativa, conmutativa que admite E por elemento neutro. La intersección de dos rectas no paralelas es un singletón {M} y, por abuso cómodo, se dice que la intersección de dos rectas es el punto M.



• *Intersección de una familia* $(A_i)_{i \in I}$ *de conjuntos.* — El conjunto, representado $\bigcap_{i \in I} A_i$ (se lee «intersección de los $A_i$») de los elementos que pertenecen a $A_i$ para todo $i \in I$.

## Intervalo

• *Intervalo en un conjunto ordenado* E. — Parte I de E tal que para todo par $(x, y)$ de elementos de I que verifican $x \leqslant y$, si $z \in E$ es tal que $x \leqslant z \leqslant y$, entonces $z \in I$. Los intervalos de **R** son las partes conexas de **R**. Sean $a$ y $b$ dos elementos de un conjunto ordenado E tales que $a < b$, se distinguen cuatro intervalos de extremidades $a$ y $b$: el intervalo abierto $]a, b[$, el intervalo cerrado $[\![a, b]\!]$ los intervalos abiertos de un lado y cerrados del otro $]a, b]$ y $[a, b[$. Igualmente, se definen las secciones iniciales $]\leftarrow, a]$ y $]\leftarrow, a[$ y las precedentes. Como **R** es una parte de la recta real acabada **R**, las secciones iniciales y terminales de **R** se representan $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $[a, +\infty[$ y $]a, +\infty[$.

V. Abierto, Agujereado, Amplitud, Cerrado, Confianza, Inicial, Longitud, Semi-abierto, Terminal.

## Intrínseco

• *Ecuación intrínseca de una curva rectificable plana.* — Relación $R = f(s)$ que existe entre el radio de curvatura R de la curva en un punto M y la abscisa curvilínea $s$ de M. Es independiente de todo sistema de referencias del plano.

• *Método, noción o propiedad intrínseca.* — Se dice, por oposición a relativa, para un método (una noción o una propiedad) independiente de cualquier convención.

## Intuicionismo

Escuela matemática nacida a principios del siglo XX (bajo el impulso de J. Brouwer), que no acepta más que demostraciones cuyos eslabones sean perfectamente «evidentes» en un sentido interpretado de forma muy particular. Así, el principio del tercero excluido es rechazado por esta doctrina que lleva a una matemática muy diferente de la matemática clásica. Sin embargo, A. Kolmogorov y K. Godel han demostrado que la consistencia de la aritmética intuicionista es equivalente de la de la aritmética clásica. Formalizado por Heytin, Kleene y Kreisel, el intuicionismo se opone a veces al logicismo de Frege y Russell y al formalismo de Hilbert.

## Invariante

• *Elemento invariante.* — Sea un grupo G de K-automorfismos de una extensión E de un cuerpo K y sea $\sigma \in G$. Un elemento $x \in E$ tal que $\sigma(x) = x$ se

denomina invariante por $\sigma$; un elemento $x \in E$ invariante para todo elemento $\sigma$ de G se denomina invariante por G.

• *Figura globalmente invariante por una transformada* T *de un espacio afín.* — Figura F tal que T(F) = F. No es necesariamente invariante punto por punto. Por ejemplo, toda recta que pasa por el centro de una homotecia de razón $\neq 1$ es globalmente invariante por esa homotecia, pero no lo es punto por punto.

• *Figura invariante punto por punto por una transformación* T. — Figura F cada uno de cuyos puntos es invariante por T. La invarianza punto por punto es una propiedad más fuerte que la invarianza global. Para una simetría ortogonal S por relación a una recta D, la recta D es invariante punto por punto, mientras que una recta $\Delta$ perpendicular a D aunque globalmente invariante no es invariante punto por punto.

• *Invariante de un nudo.* — V. NUDO.

• *Invariante topológico.* — V. TOPOLÓGICO.

• *Punto invariante por una aplicación o una transformación.* — Sinónimo de punto doble o punto fijo.
V. FIJO.

• *Sub-grupo invariante.* — Sinónimo de sub-grupo distinguido; esta terminología procede de la teoría de Galois.

## Invariantes

• *Cuerpos de invariantes.* — Dado un grupo G de K-automorfismos de una extensión E de un cuerpo K, el conjunto de los elementos de E invariantes por G es un sub-cuerpo de E que contiene a K, llamado cuerpo de los invariantes de G.
V. GALOISIANA (Extensión).

• *Teoría de los invariantes.* — Desarrollada a partir de 1840 (por Eisenstein, Cayley, Sylvester, etc.), a propósito de problemas sobre las formas cuadráticas (comportamiento del discriminante por sustitución lineal sobre las variables), sobre los polinomios homogéneos y cuestiones de geometría algebraica, esta teoría ha conducido a los teoremas de Hilbert sobre los ideales de los anillos de polinomios y a su teorema de las sicigias.

## Inversamente

• *Figuras inversamente iguales.* — Sinónimo abusivo de figuras inversamente isométricas.

• *Figuras inversamente isométricas.* — Dos figuras F y F′ de un espacio afín euclídeo E se denominan inversamente iguales si existe una isometría retrógrada I de E tal que I(F) = F′.

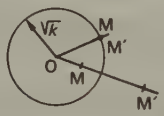
• *Números inversamente proporcionales.* — V. PROPORCIONALES.

## Inversible

Que admite un inverso.

## Inversión

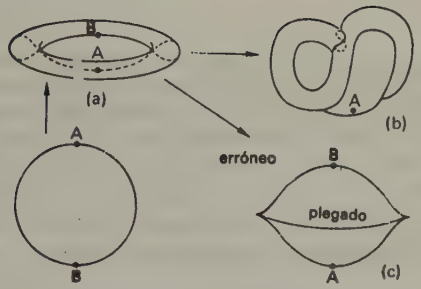
Sean O un punto del plano P y $k$ un número real no nulo. Se denomina inversión de polo (o de centro) O y de potencia $k$ a la aplicación de $P - \{O\}$ en $P - \{O\}$ que a un punto M asocia el punto M′ alineado con los puntos O y M y tal que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$. La inversión es involutiva. Para $k > 0$, el conjunto de los puntos invariantes es la circunferencia de centro O y de radio $\sqrt{k}$ llamada circunferencia de inversión. La imagen de una circunferencia por una inversión es una recta si el polo está sobre la circunferencia; en caso contrario, es una circunferencia. Si $k < 0$ (resp. $k > 0$) la inversión se llama negativa (resp. positiva).




• *Inversión de una permutación* $\sigma$ *sobre* $E = \{1, 2, ..., n\}$. — Par $(i, j) \in E \times E$ tal que $i < j$ y $\sigma(i) > \sigma(j)$.
V. SIGNATURA.

• *Problema de la inversión de la esfera.* — Al deformar de manera continua una esfera $\Sigma$ evitando la formación de pliegues y desgarres, ¿se puede obtener otra esfera $\Sigma'$ cuya cara externa sea la cara interna de $\Sigma$ y recíprocamente? De forma más técnica, el problema consiste en saber si existe en el conjunto $\mathcal{I}$ de las inmersiones de $\Sigma$ un camino continuo cuyo origen sea la inmersión idéntica $\mu_0$ (correspondiente a la esfera en sí misma) y cuyo extremo sea la inmersión antipodal $\mu_1$ de $\Sigma$. Stephen Smale mostró en 1958 que este problema es posible. Si se imagina que la esfera es un balón de goma, la inversión es irrealizable. Este hecho no es una paradoja; demuestra que para acudir a la intuición debemos imaginar que las superficies tienen la posibilidad de interpenetrarse; las deformaciones de la goma concretan sólo un camino dentro del conjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}$ de las inmersiones de $\Sigma$, o se dice que no existe en $\mathcal{P}$ un camino de origen $\mu_0$ y extremo $\mu_1$. Uno de los caminos en $\mathcal{I}$ que permiten la inversión de la esfera $\Sigma$ se refiere a catorce modificaciones geométricas simples de $\Sigma$. La esfera está deformada de forma que recubre por dos caras la superficie de Boy; de hecho, después de atravesarse una a otra las dos caras, y repitiendo las deformaciones precedentes en orden inverso, se obtiene la esfera invertida.

Los dibujos (a y b) que figuran más abajo muestran las dos primeras transformaciones a seguir; el dibujo (c) indica una vía errónea. Aunque el círculo sea una esfera en el plano euclídeo, el problema de la inversión del círculo en el plano es imposible (teorema de Whitney-Graustein).
V. BOY; INMERSIÓN.




• *Inversión de* $\mathbf{R}^3$. — Simetría ortogonal respecto a una recta. Es un desplazamiento de $\mathbf{R}^3$.

• *Teorema de inversión local.* — V. LOCAL.

## Inverso/a

• *Inverso de un elemento x en un monoide multiplicativo.* — Sinónimo de simétrico de este elemento. Se lo representa $x^{-1}$. En $(\mathbf{R}, \cdot)$, el inverso de 3 es 1/3 y el real 0 no tiene inverso (V. SIMÉTRICO).

• *Inverso de una función numérica f definida sobre un conjunto* E *y que no se anula sobre* E. — Función $g$ definida sobre E por $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Se representa: $g = \frac{1}{f}$. Tenemos, por tanto, $g(x) \cdot f(x) = 1$ para todo $x \in E$. No hay que confundir esta noción y la de función recíproca: para $f: x \mapsto e^x$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}_+^*$, la función inversa es $\frac{1}{f}: x \mapsto e^{-x}$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}_+^*$, mientras que su función recíproca es $x \mapsto \operatorname{Log} x$ de $\mathbf{R}_+^*$ en $\mathbf{R}$. No obstante, en numerosos casos se emplea función inversa como sinónimo de función recíproca: ese es el caso, por ejemplo, para las funciones trigonométricas inversas y las funciones hiperbólicas inversas.

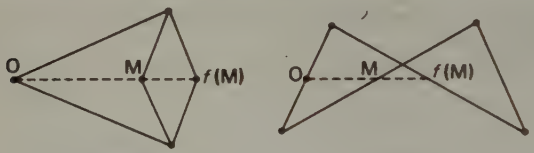
• *Podaria inversa.* — Sinónimo de antipodaria.

• *Semejanza inversa.* — Similitud que, en tanto que automorfismo, es un automorfismo inverso.
V. SEMEJANZA.

• *Transformación inversa.* — Cuando una transformación es una biyección, su biyección recíproca se denomina transformación inversa; así se habla de rotación inversa, de homotecia inversa, etc.

## Inversores

Mecanismos, antiguamente llamados compases compuestos o reciprocadores, formados de barras articuladas, empleado para el trazado continuo de ciertas líneas y la transformación de los movimientos. En particular, permiten transformar un movimiento circular en movimiento rectilíneo, y viceversa. Los inversores de Hart y de Peaucellier representados a continuación realizan una inversión $f$ de centro O que es el único punto fijo del mecanismo. El inversor de Kempe permite transformar una circunferencia en una recta sin pasar por una inversión; además, comunica un movimiento de traslación a una figura entera en lugar de desplazar sólo un punto en línea recta.




Peaucellier Hart

## Inversos/as

• *Elementos inversos en un monoide multiplicativo* M. — Elementos $x$ e $y$ de M que verifican $xy = yx = 1$. También se dice que $x$ e $y$ son inversos uno de otro.

• *Figuras inversas.* — Figuras F y F′ tales que existe una inversión I que verifica $I(F) = F'$.

• *Funciones circulares (o funciones trigonométricas) inversas.* — Funciones Arco coseno, Arco seno, Arco tangente y Arco cotangente representadas, respectivamente, Arco cos, Arco sen, Arco tg y Arco cotg o también, en informática, $\cos^{-1}$, $\text{sen}^{-1}$, $\text{tg}^{-1}$ y $\text{cotg}^{-1}$.

• *Funciones hiperbólicas inversas.* — Funciones Argumento ch, Argumento sh, Argumento th y Argumento coth, representadas, respectivamente, Arg ch, Arg sh, Arg th y Arg coth, o también, en informática, $\text{ch}^{-1}$, $\text{sh}^{-1}$, $\text{th}^{-1}$, $\text{coth}^{-1}$.

## Involución

Aplicación involutiva: por ejemplo, las simetrías son involuciones.

• *Pares de puntos en involución.* — Tres pares de puntos (A, A′) (B, B′) (C, C′) situados en un mismo eje se dice que están en involución si:

$$\frac{\overline{AB} \times \overline{AB'}}{\overline{AC} \times \overline{AC'}} = \frac{\overline{A'B} \times \overline{A'B'}}{\overline{A'C} \times \overline{A'C'}}.$$

## Involutiva

• *Aplicación involutiva.* — Aplicación $f$ de un conjunto E en él mismo tal que $f \circ f$ sea la aplicación idéntica sobre E. Las aplicaciones involutivas son las biyecciones $f$ de E tales que $f = f^{-1}$. Ejemplos: las simetrías o la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ de un grupo multiplicativo en él mismo.

## Involutivo

• *Elemento involutivo de un monoide multiplicativo unitario* E. — Elemento $a$ de E tal que $a^2 = 1$.

## Inyección

Aplicación inyectiva.
V. CANÓNICA.

## Inyectiva

• *Aplicación inyectiva de un conjunto* E *en un conjunto* F. — Aplicación tal que todo elemento de F sea la imagen como máximo de un elemento de E. Para una aplicación tal es, por tanto, imposible que dos elementos distintos de E tengan la misma imagen.

## Irracional

• *Número irracional.* — Número real que no es racional. Para tal número $x$ no existen enteros racionales $a$ y $b$ tales que $ax = b$. Ejemplos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ y $\pi$ son irracionales.

## Irreductible

• *Curva o conjunto algebraico irreductible.* — Que no es reunión de dos conjuntos algebraicos estrictamente más pequeños. Si $P(X, Y) \in C[X, Y]$ es un polinomio irreductible, la curva algebraica plana de ecuación $P(x, y) = 0$ es irreductible.

• *Elemento irreductible de un anillo conmutativo íntegro* A. — Elemento no inversible $p$ de A tal que para todo par $(x, y) \in A^2$ que verifica $xy = p$, uno al menos de los elementos $x$ e $y$ sea inversible. Los polinomios irreductibles de C[X] son los polinomios del primer grado; en R[X] son los polinomios del primer grado y los polinomios del segundo grado cuyo discriminante es estrictamente negativo. En un anillo factorial, los elementos irreductibles son los elementos primos no nulos; pero en $Z[i\sqrt{5}]$, por ejemplo, 2 es irreductible pero no es primo: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$.
V. PRIMO.

• *Puesta en forma irreductible de una fracción α.* — Determinación de un par $(a, b)$ de elementos primos entre sí tales que $\alpha = \frac{a}{b}$. En **Q**, la fracción 15/8 es irreductible; la fracción 15/10 no lo es.

## Irregular

• *Número primo irregular.* — Entero primo $p$ que divide el número de clases del cuerpo ciclotómico $\mathbf{Q}(\zeta_p)$. Los números primos irregulares inferiores a 163 son: 37, 59, 67, 101, 131, 149, 157.
V. JENSEN, METSANKYLA, REGULAR.

## Isla de Von Koch

Figura cuyo contorno es una curva de Koch. Sinónimos: cardo de Van der Waerden, Curva en copo de nieve.

## Isobaricentro

• *Isobaricentro de n puntos.* — Baricentro de esos puntos afectados de coeficientes $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$.
V. GRAVEDAD (Centro de).

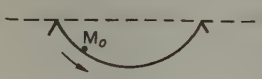
## Isóclina

• *Curva isóclina relativa a una familia de curvas.* — Lugar de los puntos de las curvas de la familia para los que la pendiente de la tangente tiene un valor constante.

• *Isóclina de una ecuación diferencial.* — Isóclina de sus curvas integrales.

## Isócrona

• *Curva isócrona.* — Curva tal que un punto material M que se desplaza sin rozamientos sobre la curva tiene un movimiento periódico cuyo período es independiente de la posición inicial $M_0$, de donde el punto es soltado con una velocidad nula. Un arco de cicloide, cuyos puntos de retroceso estén situados hacia lo alto sobre una misma horizontal, es isócrono.



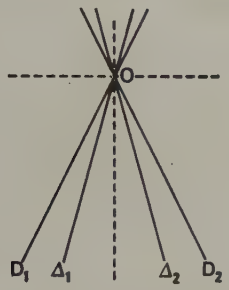
## Isogonal

• *Transformación isogonal.* — Sinónimo de transformación conforme.

• *Trayectoria isogonal de una familia de curvas* $(\Gamma_i)_{i\in I}$. — Una curva C que encuentra a todas las curvas de la familia se denomina trayectoria isogonal si en cada punto M de C el ángulo que hace C con la curva $\Gamma_i$ que pasa por M es constante.

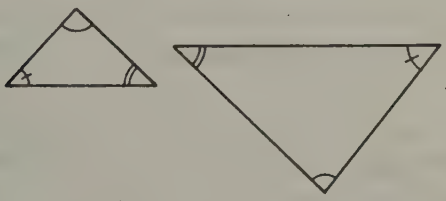
## Isogonales

• *Rectas isogonales.* — Sean dos rectas de referencia $D_1$ y $D_2$ del plano euclídeo que se cortan en un punto O. Dos rectas $\Delta_1$ y $\Delta_2$ que pasan por O se llaman isogonales si sus bisectrices son las mismas que las de las rectas $D_1$ y $D_2$.




## Isógonas

• *Figuras isógonas.* — Figuras que tienen sus ángulos de igual medida; ejemplo: dos triángulos semejantes.



## Isometría

• *Isometría de un espacio métrico* (E, *d*) *sobre un espacio métrico* (E', *d'*). —

Biyección $f$ de E en E′ tal que para todo par $(x, y)$ de elementos de E tengamos:

$$d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^2$, las translaciones, rotaciones y las simetrías ortogonales son isometrías. En un espacio afín euclídeo de dimensión finita, toda isometría es un automorfismo afín.
V. AFÍN, DIRECTA, LINEAL, NEGATIVA, POSITIVA, RETRÓGRADA, VECTORIAL.

• *Casos de isometría de los triángulos.* — Casos de igualdad de los triángulos.

## Isométricas

• *Figuras isométricas.* — Dos figuras F y F′ de un espacio métrico E son isométricas si existe una isometría I de E en E tal que $I(F) = F'$. A veces se dice, por abuso, que esas figuras son «iguales».
V. DIRECTAMENTE, INVERSAMENTE.

## Isométricos

• *Espacios métricos isométricos.* — Dos espacios métricos son isométricos si existe una isometría del uno hacia el otro.

## Isomorfas

Aquéllas entre las que existe un isomorfismo.

## Isomorfismo

Homomorfismo biyectivo.

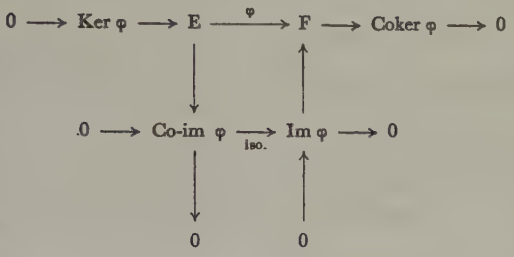
• *Isomorfismo afín.* — V. AFÍN.

• *Isomorfismo de una categoría.* — Morfismo $u: X \to Y$ tal que existe un morfismo $v: Y \to X$ que verifica $u \circ v = \mathrm{id}_Y$ y $v \circ u = \mathrm{id}_X$.

• *Isomorfismo functorial.* — V. FUNCTORIAL.

• *Teoremas de isomorfismo:*

1) Sean E y F dos A-módulos y $\varphi: E \to F$ un homomorfismo; entonces Im $\varphi$ es isomorfo a Co-im $\varphi$. A veces este teorema se expresa diciendo que el diagrama que aparece a continuación es conmutativo en líneas y en columnas exactas:




2) Sean M y N dos sub-módulos de un módulo E; entonces $(M + N)/M$ es isomorfo a $N/M \cap N$).

Observemos que estos dos teoremas son, para los módulos, aquéllos que se utilizan con mayor frecuencia, que existen muchos otros, y que para los grupos, para los anillos, los espacios vectoriales, etc., se pueden enunciar resultados semejantes.

## Isoperímetras

• *Curvas isoperímetras.* — Curvas rectificables de igual longitud. Entre todas las curvas isoperímetras cerradas de longitud L del plano, es la circunferencia, aquella cuyo interior tiene mayor área.

## Isoperímetros

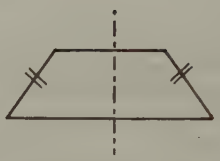
• *Dominios isoperímetros del plano.* — Dominios cuyas fronteras son curvas isoperímetras.

## Isopletas

V. NOMOGRAMAS.

## Isósceles

• *Trapecio isósceles.* — Trapecio que tiene dos lados no paralelos de igual longitud. Admite un eje de simetría.



• *Triángulo isósceles.* — Triángulo que tiene dos lados de igual longitud. Admite un eje de simetría y tiene dos ángulos de medidas iguales.
V. ULTRAMÉTRICO (Espacio).

## Isótopas

• *Figuras isótopas.* — Dos figuras F y F′ de $\mathbf{R}^2$ o de $\mathbf{R}^3$ se llaman isótopas si existe una isotopía que transforma F en F′. Intuitivamente, si se imaginan dos figuras isótopas de $\mathbf{R}^3$ materializadas por el caucho, se pasa de una figura a otra por deformación continua sin cortes o desgarraduras. Dos figuras isótopas son homeomorfas, pero la recíproca es falsa. Un círculo y una elipse de $\mathbf{R}^2$ son isótopas; un toro y una esfera provista de un asa son superficies isótopas de $\mathbf{R}^3$; un círculo y un nudo de trébol, aunque homeomorfos, no son isótopos.

## Isotopía

Sean F y F′ dos figuras de $\mathbf{R}^2$ (resp. de $\mathbf{R}^3$). Se llama isotopía de F sobre F′ un homeomorfismo de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$) sobre él mismo que transforma F en F′.
V. ISÓTOPAS.

## Isótropas

• *Coordenadas isótropas.* — Sea $z$ el afijo de un punto M del plano complejo; los complejos $z$ y $\bar{z}$ se denominan coordenadas isótropas de M.

## Isotropía

• *Grupo de isotropía de un elemento x de un conjunto* E *sobre el que opera un grupo* G. — Sinónimo de estabilizador de $x$.

## Isótropo

• *Cono isótropo.* — V. ISÓTROPO (Vector).

• *Recta isótropa.* — V. ISÓTROPO (Vector).

• *Sub-espacio vectorial isótropo.* — Sea $f$ una forma bilineal simétrica (o una forma sesquilineal hermitiana) no degenerada sobre un K-espacio vectorial E. Un sub-espacio vectorial E′ de E se llama isótropo si existe un vector no nulo de E′ ortogonal a E′.

• *Vector isótropo respecto de una forma bilineal simétrica (o sesquilineal hermitiana) no degenerada f sobre un K-espacio* vectorial E. — Vector $\vec{u}$ ortogonal a él mismo. Si $\vec{u}$ es no nulo, todo vector colineal a $\vec{u}$ es igualmente isótropo y la recta vectorial engendrada por $\vec{u}$ se llama recta isótropa. El conjunto de todos los vectores isótropos de E es una reunión de rectas vectoriales denominada cono isótropo de E. En $\mathbf{R}^2$, el producto escalar o euclídeo no admite más que el vector nulo como vector isótropo.

## Iteración

Repetición de un procedimiento de cálculo o de un razonamiento. Por ejemplo, si una función $f$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ es tal que $|f'(x)| \leqslant k < 1$, la ecuación $x = f(x)$ admite una solución única $a$ que es el límite común de las sucesiones definidas por recurrencia por $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \in \mathbf{N}$ con $x_0 \in \mathbf{R}$. Para determinar efectivamente un valor aproximado de $a$, se calcula (por iteración) $x_1 = f(x_0)$, luego $x_2 = f(x_1)$, etc.
V. PUNTO (Teorema del punto).

## Iwasawa, Kenkishi (1917-1998)

• *Descomposición de Iwasawa.* — Sea X una matriz cuadrada real de orden 2 inversible. La matriz X se escribe de manera única X = LU, donde U es una matriz cuadrada ortogonal y donde L es una matriz de la forma $L = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a > 0$ y $c > 0$. El par (L, U) se denomina descomposición de Iwasawa izquierda de X. Asimismo, X se escribe de manera única X = U′L′, donde U′ es una matriz cuadrada ortogonal y donde L′ es de la forma $L' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ con $a' > 0$ y $c' > 0$. El par (U′, L′) se llama descomposición de Iwasawa derecha de X.

## Izquierdas

• *Rectas izquierdas.* — Rectas no coplanarias dos a dos. Dos rectas izquierdas D y D′ tienen una única perpendicular común Δ. La distancia entre los puntos de intersección de Δ con D y D′ es la distancia entre D y D′. En el espacio de tres dimensiones se piensa, sin haberlo demostrado, que se puede trazar como máximo siete rectas izquierdas cada una de las cuales es distante de todas las demás una misma longitud.

## Izquierdo/a

• *Cuerpo izquierdo.* — Cuerpo no conmutativo, por ejemplo, el cuerpo H de los cuaternios.

• *Curva o figura geométrica izquierda.* — Curva o figura que no es plana. Por ejemplo, un cuadrilátero izquierdo tiene sus cuatro vértices no coplanarios.

• *Cúbica izquierda.* — Curva del espacio que todo plano corta en tres puntos (reales o imaginarios, distintos o no). La curva de ecuaciones paramétricas $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$ con $abc \neq 0$ es una cúbica izquierda.

• *Noción o propiedad definida a izquierda.* — V. ARTINIANO (Anillo), DERIVADA, DISTRIBUTIVA, DIVISOR, FILTRANTE, IDEAL, LÍMITE, MÚLTIPLE, NEUTRO, NOTHERIANO, SEMI-CONTINUA, SIMÉTRICA, SIMPLIFICABLE, TRANSLACIÓN.

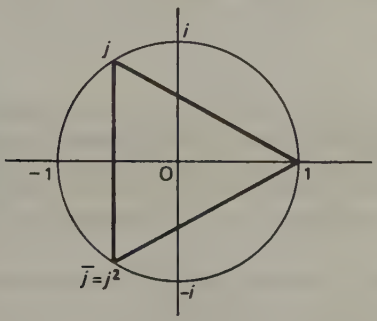
# J

## j

Raíz cúbica de la unidad en el cuerpo **C** de los números complejos definida por:

$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

Se verifica que $j^2 = j^{-1} = \bar{j}$ y que $j^2 + j + 1 = 0$. Los físicos representan a veces con $j$ al número imaginario $i$ tal que $i^2 = -1$ para no confundirlo con la intensidad representada entonces $i$.




## Jacob

• *Escala de Jacob.* — V. TRIVIAL (Nudo).

## Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804-1851)

• *Identidad de Jacobi.* — Igualdad verificada por la ley [ ] de un álgebra de Lie. En particular:

1) Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son tres vectores del espacio euclídeo orientado $\mathbf{R}^3$, tenemos:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) + \vec{B} \wedge (\vec{C} \wedge \vec{A}) + \vec{C} \wedge (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 0.$$

2) En un anillo A, si $[x, y] = xy - yx$, para tres elementos $x$, $y$, $z$ de A, tenemos:

$$[y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

3) Sean X, Y, Z tres campos de vectores diferenciables sobre un abierto U de $\mathbf{R}^3$; si [X, Y] es el corchete de los campos de vectores X e Y, entonces:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

V. LIE (Algebra de).

• *Polinomios de Jacobi.* — Polinomios ortogonales sobre $]-1, 1[$ por relación al peso $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, *donde* $\alpha > -1$ y $\beta > -1$. Representados $P_n^{(\alpha,\beta)}$ verifican:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n]$$

y son soluciones de la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)y'' + [(\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Para $\alpha = \beta = 0$, estos polinomios son los de Legendre y para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, son los de Tchebychev.

V. LEGENDRE, TCHEBYCHEV, ULTRAESFÉRICOS.

## Jacobiana

• *Matriz jacobiana.* — Sea $f: x \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x))$ una aplicación definida sobre un abierto U de $\mathbf{R}^p$ con valores en $\mathbf{R}^n$, diferenciable en un punto $a$ de U. La diferencial de $f$ en el punto $a$ es una aplicación lineal de $\mathbf{R}^p$ en $\mathbf{R}^n$; su matriz $J(f) = (m_{ij})$ con relación a las bases canónicas de $\mathbf{R}^p$ y $\mathbf{R}^n$ se denomina matriz jacobiana de $f$ en el punto $a = (a_1, ..., a_p)$. Se define por $m_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$:

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

## Jacobianas

• *Funciones elípticas jacobianas.* — Sean dos números reales no nulos $k$ y $k'$ tales que $k^2 + k'^2 = 1$, y sean $f$, $g$ y $h$ las funciones definidas por las integrales elípticas:

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}, \quad g(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(k'^2+k^2t^2)}}$$

y

$$h(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(t^2-k'^2)}}.$$

Las funciones recíprocas de *f*, *g* y *h*, denotadas respectivamente *sn*, *cn* y *dn* se denominan funciones elípticas jacobianas. Verifican:

$$cn^2u + sn^2u = 1 \qquad dn^2u + k^2sn^2u = 1$$
$$sn'u = cn\,u\,dn\,u \qquad cn'u = -sn\,u\,dn\,u.$$
$$dn'u = -k^2\,sn\,u\,cn\,u$$

## Jacobiano

Determinante de una matriz jacobiana cuadrada. Se la representa:

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a).$$

## Japonés

• *Teorema japonés.* — En un cuadriiátero inscriptible, la suma de los radios de las circunferencias inscritas a los dos triángulos que determina una diagonal es igual a la suma de los radios de las circunferencias inscritas a los dos triángulos a que determina la otra diagonal.

## Jensen, Johannes Ludwig Waldemar (1859-1925)

• *Teorema de Jensen.* — Existen una infinidad de enteros primos irregulares.

## Ji ($\chi$)

• *Ley con $\chi^2$ de Pearson de n grados de libertad.* — Sean *n* variables aleatorias normales reducidas independientes, $X_1, X_2, \ldots, X_n$. La ley de probabilidad de la variable aleatoria $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ se llama ley de una $\chi^2$ con *n* grados de libertad. La esperanza matemática de la $\chi^2$ es *n*, su varianza es $2n$. Su densidad de probabilidad viene definida por:

$$f(x) = 0 \text{ para } x < 0 \text{ y } f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ para } x > 0,$$

donde $\Gamma$ es la función euleriana gamma. Esta ley es fundamental en estadística.

• *Test de la* $\chi^2$. — Sea X un carácter cuantitativo, que toma los valores $x_1$, $x_2$, ..., $x_k$ con las frecuencias $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$, sobre una muestra de población. Se hace la hipótesis $H_0$ de que el carácter X está distribuido según cierta ley y se quiere hacer el test de esa hipótesis a partir de los valores obtenidos sobre la muestra. El test de la $\chi^2$ consiste en calcular bajo la hipótesis $H_0$ las frecuencias teóricas $n'_1$, ..., $n'_k$ y en compararlos con las frecuencias $n_1$, ..., $n_k$ calculando:

$$Q = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}$$

que sigue una ley $\chi^2$ con $k - 1 - l$ grados de libertades, siendo $l$ el número de parámetros a estimar. Se rechaza la hipótesis $H_0$, al nivel $\alpha$ escogido si Q es superior al valor del $\chi^2$ leído sobre la tabla

## **Joachimsthal,** Ferdinand (1818-1861)

• *Teorema de Joachimsthal para una cónica de centro.* — Sea $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} = 1$ la ecuación cartesiana de la cónica de centro ($\varepsilon = 1$ para la elipse, $\varepsilon = -1$ para la hipérbola). Desde un punto A ($\alpha$, $\beta$) pueden trazarse cuatro normales reales a la cónica si

$$\varepsilon[(a\alpha)^{2/3} + \varepsilon(b\beta)^{2/3} - c^{4/3}] > 0,$$

donde $c$ es la distancia focal. El teorema de Joachimsthal afirma que los pies de tres normales trazados desde A y el punto diametralmente opuesto al pie de la cuarta son cocíclicos.

• *Teorema de Joachimsthal para la parábola de ecuación cartesiana* $y^2 = 2px$. — Desde un punto A($\alpha$, $\beta$) pueden llevarse tres normales reales a la parábola si $27p\beta^2 - 8(\alpha - p)^3 < 0$. El teorema de Joachimsthal afirma que los pies de las tres normales y el vértice de la parábola son cocíclicos.

## **Jordan,** Camille Marie Ennemond (1838-1922)

• *Arco geométrico de Jordan.* — Arco geométrico del que un representante es un arco parametrado de Jordan. Un arco geométrico de Jordan es homeomorfo a un segmento.

• *Arco parametrado de Jordan.* — Arco parametrado (I, $f$), donde $I = [a, b]$ y donde $f$ es una aplicación inyectiva.

• *Condición de Jordan-Dedekind (Teoría de grafos).* — Se dice que un conjunto ordenado verifica la condición de Jordan-Dedekind si y solamente si todas las cadenas maximales entre dos elementos cualesquiera tienen igual longitud.

• *Curva de Jordan o una curva cerrada de Jordan de* $\mathbf{R}^2$ *(resp.* $\mathbf{R}^3$*).* — Imagen de una circunferencia $\Gamma$ de $\mathbf{R}^2$ por una aplicación inyectiva continua de $\Gamma$ en $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$). Las curvas de Jordan son homeomorfas entre sí. Una circunferencia, la curva de Hoppe son curvas de Jordan.

V. JORDAN (Teoremas de).

• *Forma reducida de Jordan.* — Matriz del tipo que va a continuación, donde los $M_i$ son matrices de Jordan:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & M_n \end{pmatrix}$$

• *Matriz de Jordan.* — Matriz cuadrada de elementos de un cuerpo conmutativo K de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

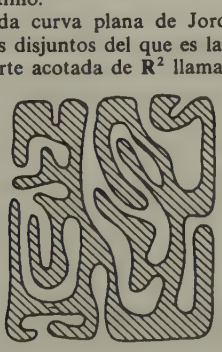
• *Sucesión de Jordan-Hölder de un grupo* G. — Sucesión $(G_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de subgrupos de G tal que $G_i$ sea distinguido en $G_{i+1}$ para todo $i$ y tal que el grupo $G_{i+1}/G_i$ sea simple y no reducido a un elemento. Todo grupo finito posee una sucesión de Jordan-Hölder.

• *Superficie de Jordan o superficie cerrada de Jordan de* $\mathbf{R}^3$. — Imagen de una esfera $\Sigma$ de $\mathbf{R}^3$ por una aplicación inyectiva continua de $\Sigma$ en $\mathbf{R}^3$. Las superficies de Jordan son homeomorfas entre sí. Una esfera, un elipsoide son superficies de Jordan.

• *Teoremas de Jordan:*

1) Sea $f$ una función $2\pi$-periódica y de variación acotada sobre todo intervalo acotado. La serie de Fourier de $f$ es convergente y converge uniformemente hacia $f$ sobre todo intervalo cerrado sobre el que $f$ es continua. Este resultado se llama también teorema de Dirichlet; generaliza un resultado de este último.

2) Toda curva plana de Jordan separa el plano $\mathbf{R}^2$ en dos componentes conexos disjuntos del que es la frontera común. Uno de esos componentes es una parte acotada de $\mathbf{R}^2$ llamada interior de la curva; la otra componente se



llama exterior de la curva. Véase a continuación una curva de Jordan con su interior (sombreado) y su exterior.
V. SCHOENFLIES (Teorema de).

• *Teorema de Jordan-Hölder.* — Sean $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $(H_i)_{1 \leq i \leq m}$ dos sucesiones de Jordan-Hölder de un grupo G; tenemos $n = m$ y, salvo el orden de los términos, los grupos $G_i/G_{i+1}$ y $H_j/H_{j+1}$ son dos a dos isomorfos.

## Juego

• *Juego de Nim.* — V. NIM.

• *Juego de la vida.* — V. VIDA.

## Juegos

• *Juegos de determinación estricta.* — V. ESTRICTA.

• *Juegos evolutivos.* — V. EVOLUTIVOS.

• *Juegos finitos.* — V. FINITOS.

• *Juegos de información perfecta.* — V. INFORMACIÓN.

• *Juegos de suma nula.* — V. NULA.

• *Teoría de juegos.* — Teoría en pleno desarrollo cuyos fundamentos están constituidos en gran parte por los trabajos de Von Neumann. Creada, en principio, para estudiar de manera eficaz los problemas económicos, la teoría de juegos es, en la actualidad, una disciplina autónoma que además de en economía tiene aplicaciones en las matemáticas puras, en la psicología, en la sociología, en las artes de la guerra, etc. El sentido de la palabra juego está tomado en un sentido muy amplio que va del sentido usual (juego de damas, juego de ajedrez) al sentido de las luchas a que se entregan personas o grupos de personas (los jugadores).

## Justo

• *Estimador justo.* — Estimador bien centrado.
V. CENTRADO.

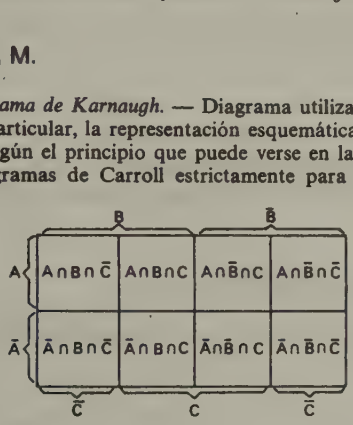
# K

## Kaliningrado

• *Problema de los siete puentes de Kaliningrado.* — V. SIETE.

## Karnaugh, M.

• *Diagrama de Karnaugh.* — Diagrama utilizado en cálculo booleano. Permite, en particular, la representación esquemática de conjuntos mediante rectángulos según el principio que puede verse en la figura siguiente; sólo difiere de los diagramas de Carroll estrictamente para más de dos conjuntos.




• *Diagrama de Veitch-Karnaugh.* — Diagrama de Karnaugh.

## *k*-cromático

• *Grafo k-cromático.* — V. CROMÁTICO.

## Kelvin, Sir William Thomson, lord (1824-1907)

• *Funciones de Kelvin.* — Funciones reales $\mathrm{Ber}_\lambda$ y $\mathrm{Bei}_\lambda$ definidas por:

$$\mathrm{Ber}_\lambda(x) + i\,\mathrm{Bei}_\lambda(x) = J_\lambda(xe^{3i\pi/4})$$

donde $J_\lambda$ es la función de Bessel. Para $\lambda = 0$, las funciones tienen por desarrollo en serie:

$$\mathrm{Ber}_0(x) = \mathrm{Ber}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{4n}}{[(2n)!]^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\cos\frac{\pi n}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}$$

$$\mathrm{Bei}_0(x) = \mathrm{Bei}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2}}{[(2n+1)!]^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi n}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}.$$

**Kempe,** Sir Alfred Bray (1849-1922)

• *Inversor de Kempe.* — V. INVERSORES.

**Ker (f)**

Núcleo del homomorfismo *f*. — Esta abreviatura viene del inglés *kernel* y del alemán *kern*. A veces se escribe Ker *f*.

**Khi**

Apelación, en griego antiguo, de la letra griega $\chi$ en minúscula y X en mayúscula. En nuestros días se encuentra frecuentemente la apelación chi; en ambos casos se lee «ji».

**Khintchine,** Alexandre Jakoblevitch (1894-1959)

• *Teorema de Khintchine.* — Ley débil de los grandes números.

**Kilo**

V. MÚLTIPLE.

**Kleene,** Stephen Cole (1909-1994)

• *Lenguaje de Kleene.* — Lenguaje engendrado por una gramática de Kleene. Los lenguajes de Kleene son reconocibles por autómatas finitos (V. FINITO).

• *Gramática de Kleene.* — Gramática de tipo 3 en la clasificación de Chomsky.

**Klein,** Félix (1849-1925)

• *Grupo de Klein.* — Existen, salvo un isomorfismo, dos grupos finitos de orden 4: el grupo cíclico (por tanto, conmutativo) $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ y un grupo conmutativo no cíclico $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ llamado grupo de Klein. El grupo de las isometrías del plano que dejan invariante un rectángulo es un grupo de Klein.

| | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | c | e |
| b | b | c | e | a |
| c | c | e | a | b |

Grupo cíclico

| | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

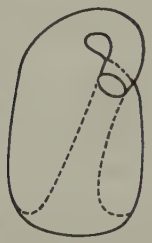
Grupo de Klein

El cuento de *La princesa Hoppy*, de Jacques Roubaud, está construido sobre el funcionamiento de un grupo de Klein.

• *Programa de Klein.* — V. ERLANGEN (Programa de), GEOMETRÍA.

• *Toro de Klein.* — Superficie obtenida pegando, borde contra borde, dos gorros cruzados; es homeomorfa a una botella de Klein.

• *Vaso o botella de Klein.* — Superficie cerrada de una sola cara; no admite ni interior ni exterior y no es orientable. De forma muy imaginada, esta superficie se obtiene alargando el cuello de una botella y empalmándolo por el interior con el fondo tras haberle hecho atravesar la botella.



Vaso de Klein

## **Knuth,** Donald E. (1938- )

• *Notación de Knuth.* — De la misma forma que se escribe $xn$ para $x + x + \cdots + x$ sumado $n$ veces, la ecuación de Knuth consiste en escribir $x\uparrow n$ por $x \,.\, x \ldots x$ multiplicado $n$ veces. Así:

$$10\uparrow 10 = 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 10^{10}.$$

Se plantea igualmente:

$$x \uparrow \uparrow n = x \uparrow (x \uparrow (\ldots \uparrow x) \ldots).$$

Por ejemplo, $10 \uparrow \uparrow 10 = 10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10^{10}}}}}}}}}$, lo cual se escribe también $10^{\overline{10|}}$.

V. FOLKMAN. Más generalmente:

$$x \overbrace{\uparrow \uparrow \ldots \uparrow}^{k\text{-flechas}} n = \underbrace{x \overbrace{\uparrow \ldots \uparrow}^{k-1} (x \overbrace{\uparrow \ldots \uparrow}^{k-1} (\ldots \overbrace{\uparrow \ldots \uparrow}^{k-1} x) \ldots))}_{n \text{ ocurrencias de } x}.$$

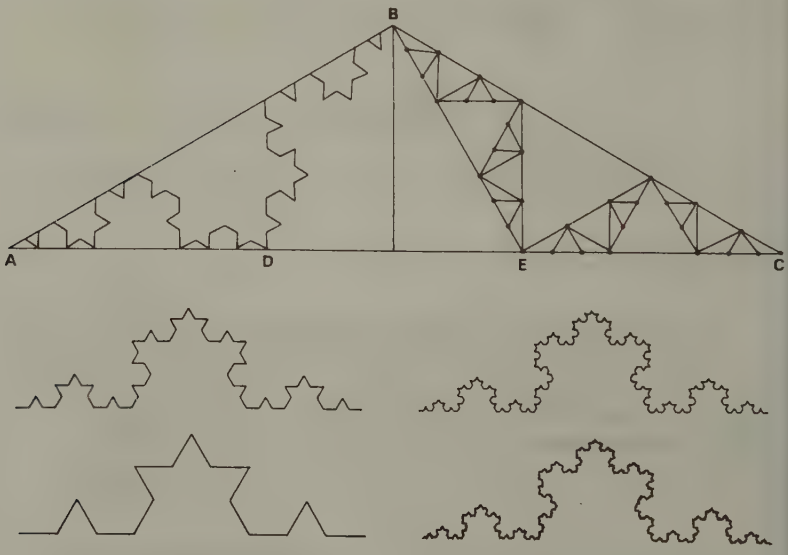
La notación de Knuth permite tomar el relevo de la notación exponencial en la definición de números muy grandes. Ya se ha llegado a utilizar esta notación para números que no son accesibles a los ordenadores actuales más potentes.

V. GRAHAM, GRANDES (Números).

## **Koch,** N. F. Helge von (1870-1924)

• *Curva de Koch.* — Arco de Jordan que no admite tangente en ninguno de sus puntos. Una porción cualquiera de la curva es semejante a la curva entera. Para definirla, se parte de un triángulo isósceles ABC del que los ángulos de las bases miden 30°. Se consideran los puntos D y E que dividen el segmento AC en tres partes iguales. Los triángulos BEC y BDA son semejantes al triángulo ABC. Se repite indefinidamente este procedimiento. La curva de Koch es la adherencia del conjunto infinito de vértices A, B, C, D, E, F, ..., de los triángulos isósceles sucesivos.

Esta curva no es rectificable. Con frecuencia se llama «copo de nieve» o «Cardo de Van der Waerden» la figura cuyo contorno es la curva de Koch.




Aproximación de una curva de von Koch

## **Kochen,** Simon B.

• *Teorema de Ax y Kochen.* — V. AX.

## Koenigsberg

• *Problema de los siete puentes de Koenigsberg.* — V. SIETE.

## Kolmogorov, Andrei M. (1903-1987)

• *Axiomas de Kolmogorov.* — Dado un espacio probabilizable $(\Omega, \mathscr{A})$, una probabilidad P sobre ese espacio es una aplicación $P: \mathscr{A} \to [\![0, 1]\!]$ que verifican los axiomas siguientes denominados de Kolmogorov:

$[P_1]$ $P(\Omega) = 1$.

$[P_2]$ Si A y B son dos sucesos incompatibles de $\mathscr{A}$, entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

$[P_3]$ Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de sucesos de $\mathscr{A}$ dos a dos incompatibles, entonces:

$$\sum_{n\geqslant 0} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right)$$

(axioma de las probabilidades totales o axioma de aditividad completa). Frecuentemente se reemplaza $[P_3]$ por $[P'_3]$ que le es equivalente: $[P'_3]$. Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ es una sucesión de sucesos de $\mathscr{A}$ tal que $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \geqslant 0$ y si $\bigcap_{n\geqslant 0} A_n = \phi$, entonces $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ (axioma de continuidad).

• *Desigualdad de Kolmogorov.* — Dadas $n$ variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mutuamente independientes, la desigualdad de Kolmogorov afirma que para todo número real $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$P\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \left| \sum_{i=1}^{k} (X_i - E[X_i]) \right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

donde $E[X_i]$ y $\sigma_i$ son respectivamente la esperanza matemática y la desviación típica de $X_i$.

• *Espacio de Kolmogorov.* — Espacio topológico que verifica el axioma $[T_0]$ de separación (o axioma de Kolmogorov): cualesquiera que sean los puntos distintos $x$ e $y$ de E, existe un entorno de $x$ al que $y$ no pertenece o un entorno de $y$ al que $x$ no pertenece. El espectro primero de un anillo conmutativo, provisto de la topología de Zariski es un espacio de Kolmogorov. V. ACCESIBLE (Espacio), SEPARACIÓN (Axiomas de).

## König, Julian o Koenig, J. (1849-1913)

• *Teorema de König.* — Sean $(a_n)_{n\geqslant 1}$ y $(b_n)_{n\geqslant 1}$ dos sucesiones de cardinales tales que $a_n < b_n$ para todo $n \geqslant 1$; entonces:

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n < \prod_{n\geqslant 1} b_n.$$

## Krémer, G. (1512-1594)

V. MERCATOR.

## Kronecker, Leopold (1823-1891)

• *Homomorfismo de Kronecker.* — Dado un anillo conmutativo A y unos A-módulos E, F, E', F', se denomina homomorfismo de Kronecker al homomorfismo $\varphi$ de $\mathrm{Hom}(E, F) \otimes \mathrm{Hom}(E', F')$ en $\mathrm{Hom}(E \otimes E', F \otimes F')$ tal que $\varphi(f \otimes f')$ sea la aplicación A-lineal $x \otimes x' \mapsto f(x) \otimes f'(x')$.

• *Símbolo de Kronecker.* — Sea I un conjunto de índices. El símbolo de Kronecker es la aplicación $\delta$ de $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ en $\{0, 1\}$ definida por:

$$\delta(i, j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$
$$\delta(i, j) = 1 \quad \text{si} \quad i = j.$$

Se suele sustituir la notación $\delta(i, j)$ por $\delta_{ij}$.

• *Teorema de Kronecker-Weber.* — Sea K una extensión galoisiana de Q; si $\mathrm{Gal}(K/Q)$ es abeliano (se dice entonces que K es una extensión abeliana de Q), entonces existe una raíz de la unidad $\zeta \in \mathbf{C}$ tal que $K \subset \mathbf{Q}(\zeta)$.

• *Teorema de Schering-Kronecker.* — V. SCHERING.

## Krull, Wolfgang (1899-1970)

• *Dimensión de Krull de un anillo conmutativo o de un álgebra.* — Longitud maximal (por tanto, eventualmente infinita) de las cadenas estrictamente crecientes de ideales primos. Por ejemplo, el anillo Z[X, Y] es de dimensión 3.

• *Teorema de Krull.* — Todo ideal a izquierda de un anillo unitario A, diferente de A, está contenido en un ideal a izquierda maximal.

## Kummer, Ernst Eduard (1810-1893)

• *Congruencia de Kummer.* — Sea $p$ un entero primo, $p - 1$ que no divide un entero par $n > 0$ y $b_n$ el $n$-ésimo número de Bernoulli; entonces, el número racional $b_n/n$ está en $\mathbf{Z}_{(p)}$ —localizado de Z en $p\mathbf{Z}$— y en ese anillo se tiene la congruencia, llamada de Kummer:

$$\frac{b_{n+p-1}}{n+p-1} \equiv \frac{b_n}{n} \pmod{p}.$$

• *Criterio de Kummer.* — Un entero primo impar $p$ es regular si y solamente si $p$ no divide en el anillo $\mathbf{Z}_{(p)}$ (V. VON STAUT (Teorema de)) ninguno de los números de Bernoulli $b_2, b_4, \ldots, b_{p-3}$, es decir, si $p^2$ no divide ninguna de las sumas $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (p-1)^k$ con $k = 2, 4, 6, \ldots, p - 3$.
V. METSANKYLA.

• *Superficie de Kummer.* — Superficie que posee dieciséis puntos dobles y

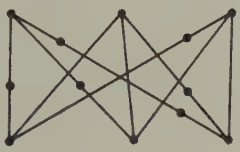
dieciséis planos tangentes tocándola según cónicas cada una de las cuales pasa por seis de esos puntos dobles.

• *Teorema de Kummer.* — La conjetura de Fermat es verdadera para todo exponente $p$ entero primo regular.

## **Kuratowski,** Kacimir (1896-1980)

• *Grafos de Kuratowski.* — Nombre dado a los grafos no planarios del tipo 1 o del tipo 2 indicados a continuación. El grafo de los tres pozos y de las tres casas es un grafo de Kuratowski del tipo 1. Un 5-clique es un grafo de Kuratowski del tipo 2.

Tipo 1



Tipo 2

• *Teoremas de Kuratowski:*

1) Teorema que da una caracterización de los grafos planarios. Afirma que un grafo es planario si y solamente si no admite subgrafo parcial del tipo 1 o del tipo 2 de Kuratowski.

2) Se llama a veces teorema de Kuratowski a lo que con más frecuencia se denomina teorema de Zorn.

# L

## Lados

• *Lados de un ángulo.* — Se emplea por abuso por lados de un sector angular.

• *Lados de un polígono.* — Segmentos que unen dos vértices consecutivos de ese polígono.

• *Lados de un sector angular* (Ox, Oy). — Las semi-rectas Ox y Oy. V. ANGULAR (Sector).

• *Lados de un triángulo esférico.* — V. ESFÉRICO.

## Lagrange, Joseph Louis (conde de) (1736-1813)

• *Ecuación de Euler-Lagrange.* — Nombre que a veces se da a la ecuación de Euler.

• *Ecuación de Lagrange.* — Ecuación diferencial de la forma:

$$f(y')t + g(y')y = h(y').$$

Sus isóclinas son rectas.
V. CLAIRAUT.

• *Función de Lagrange.* — Sinónimo de lagrangiano.

• *Identidad de Lagrange.* — Cualesquiera que sean los números reales $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ y $c'$ tenemos:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) = (aa' + bb' + cc')^2 + (ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2.$$

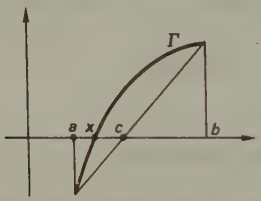
Se generaliza en el caso de $2n$ números reales $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 + \sum_{i>j} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

• *Interpolación de Lagrange.* — Sea $f$ una función numérica definida sobre un conjunto finito de números reales distintos $x_1, x_2, ..., x_n$. El polinomio de Lagrange $G(x)$ que toma los valores $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ cuando $x$ toma los valores $x_1, x_2, ..., x_n$ es una prolongación de $f$ denominada interpolación de Lagrange de $f$. Si $n = 2$, la interpolación es lineal; si $n = 3$, la interpolación es la de Simpson.

• *Mecánica de Lagrange.* — La mecánica de Lagrange consiste en remitir el estudio de los movimientos de ciertos sistemas de puntos materiales al estudio geométrico del espacio de las configuraciones que es el conjunto de los $n$-uplos $(q_1, ..., q_n)$, donde $q_1, ..., q_n$ son parámetros independientes que definen el movimiento. Este espacio posee una estructura de variedad diferencial. La mecánica de Lagrange permite estudiar completamente movimientos importantes que derivan, por ejemplo, de la teoría de las pequeñas oscilaciones o de la dinámica del sólido.
V. HAMILTON (Mecánica de).

• *Método de Lagrange.* — Método de aproximación de una raíz $x$ de una ecuación $y = f(x)$, donde $f$ es continua. Sea $\Gamma$ la representación gráfica de $f$ sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ que no contiene más raíces que $x$. La cuerda de $\Gamma$ que pasa por los puntos de abscisas $a$ y $b$ corta el eje de las abscisas en $c \in [\![a, b]\!]$. Si $f(a) \cdot f(c) < 0$, entonces $x \in [\![a, c]\!]$, se vuelve a empezar a partir de $a$ y $c$; en caso contrario se vuelve a empezar a partir de $c$ y $b$. Se repite el procedimiento hasta la precisión deseada.




• *Polinomio de Lagrange.* — Polinomio que toma valores $y_1, y_2, ..., y_n$ dados en $n$ valores distintos $x_1, x_2, ..., x_n$ dados y definidos por:

$$G(t) = y_1 f_1(t) + y_2 f_2(t) + \cdots + y_n f_n(t)$$

donde

$$f_i(t) = \frac{(t - x_1)(t - x_2)...(t - x_{i-1})(t - x_{i+1})...(t - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

• *Resto de Lagrange.* — V. MAC LAURIN (Fórmula de), TAYLOR (Fórmula de).

• *Sistema de ecuaciones de Lagrange de un movimiento.* — V. LAGRANGIANO.

• *Teoremas de Lagrange.* — 1) (De los cuatro cuadrados): Todo entero natural es suma de cuatro cuadrados. Jacobi ha dado el número de maneras en que es posible esta descomposición. 2) El orden de un sub-grupo es un factor del orden del grupo.

## Lagrangiana

• *Función lagrangiana.* — Sinónimo de lagrangiano.

• *Mecánica lagrangiana.* — Mecánica de Lagrange.

## Lagrangiano

Sea un sistema de puntos materiales sometidos eventualmente a relaciones holómanas y perfectas y tal que las fuerzas que le son aplicadas derivan de un potencial U (que puede depender del tiempo). La diferencia $L = C - U$ entre la energía cinética y la energía potencial se denomina lagrangiano o función lagrangiana. Si $(q_1, q_2, ..., q_n)$ es un sistema de parámetros independientes que definen la posición del sistema, el lagrangiano, representado entonces $L(q, \dot{q}, t)$, es una función de $q_1, q_2, ..., q_n$, de las derivadas $\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n$ y del tiempo $t$. El sistema de las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \text{ para } i = 1, 2, ..., n$$

se denomina sistema de ecuaciones de Lagrange del movimiento.
V. CHRISTOFFEL, HAMILTON (Acción de), HAMILTONIANO.

## Laguerre, Edmond Nicolas (1834-1886)

• *Funciones de Laguerre.* — Funciones definidas por $\mathcal{L}_n(x) = e^{-x/2}L_n(x)$, donde $L_n$ es un polinomio de Laguerre.

• *Polinomios de Laguerre.* —Polinomios ortogonales sobre $I = [\![0, +\infty[\![$ por relación al peso $p(x) = e^{-x}$. Representados $L_n$, verifican:

$$\int_0^{+\infty} L_p(x)L_q(x)e^{-x}dx = \delta_{pq}$$

(símbolo de Kronecker). Son dados por $L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n]$, verifican la fórmula de recurrencia:

$$(n+1)L_{n+1}(x) + (x - 2n - 1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

son soluciones de la ecuación diferencial $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$, y son coeficientes del desarrollo en serie:

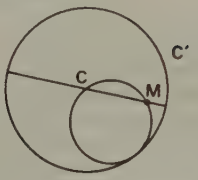
$$\frac{e^{xt/(t-1)}}{1-t} = \sum_{n\geq 0} L_n(x)t^n.$$

Se encuentra $L_0(x) = 1$; $L_1(x) = 1 - x$; $L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$, etc. A veces se denomina polinomios de Laguerre a los polinomios $n!\,L_n$.

## La Hire, Philippe (de) (1640-1718)

• *Engranaje o Mosca de La Hire.* — Nombre dado antiguamente al hipocicloide de dos puntos de retroceso que no es otro que un segmento de recta.

• *Teorema de La Hire.* — Si un círculo C de radio $r$ rueda sin deslizarse interiormente sobre un círculo C' de radio $2r$, todo punto fijo de C describe un diámetro de C'.
V. EPICICLOIDE, HIPOCICLOIDE.




## **Lalanne,** Leon Louis Chrétien (1811-1892)

V. ANAMORFOSIS.

## **Lambert,** Johann Heinrich (1728-1777)

- *Angulo de Lambert.* — Sinónimo de gudermaniano.
- *Teorema de Lambert.* — Afirma que $\pi$ es un número irracional.

## **Lamé,** Gabriel (1795-1870)

- *Curvas de Lamé.* — Curvas de ecuación cartesiana $Ax^m + By^m = C$, donde A, B, C y $m$ pertenecen a $\mathbf{R}^*$. La astroide, la elipse, la circunferencia, las evolutas de cónicas con centro son curvas de Lamé particulares. La ecuación de las curvas de Lamé puede ponerse bajo la forma:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m - \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1 \quad \text{ó} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1.$$

En el segundo caso, estas curvas admiten entonces por ecuaciones paramétricas:

$$x = a\cos^{2/m}\varphi \quad \text{e} \quad y = b\,\text{sen}^{2/m}\varphi$$

son algebraicas si $m$ es racional y trascendente en el caso contrario.

## **Landau,** Edmund Georg (1877-1938)

- *Notaciones de Landau.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones numéricas definidas sobre una parte D de $\mathbf{R}$. La notación de Landau $f = O(g)$ significa que $f$ está dominado por $g$ en el entorno de un punto $x_0$ adherente a D. La notación de Landau $f = o(g)$ significa que $f$ es despreciable ante $g$ en el entorno de un punto $x_0$ adherente a D.

V. DOMINADA, HARDY, DESPRECIABLE.

## **Laplace,** Pierre Simon (marqués de), (1749-1827)

- *Desarrollo de Laplace de un determinante.* — V. DESARROLLO.

• *Ecuación de Laplace en n variables.* — Ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$$

donde la función incógnita $f$ es una función real de $n$ variables reales. Las soluciones de clases $C^2$ sobre un abierto U de $\mathbf{R}^n$ no son otras que las funciones armónicas. Las partes reales e imaginarias de una función holomorfa son soluciones de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Según Whittaker, para toda función real $\Phi$ de dos variables reales continua y diferenciable dos veces y para todo intervalo $[\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}$, la función $f$ definida por:

$$f(x, y, z) = \int_a^b \Phi(z + ix\cos\theta + iy\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta)d\theta$$

es una solución de la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

• *Ley de Laplace-Gauss.* — Ley normal.

• *Transformada y transformación de Laplace.* — Sea $h$ una función de valores reales (o complejos) definida sobre el intervalo $[\![0, +\infty[\![$ de $\mathbf{R}$ y sea $x$ un número real (o complejo). Si la integral

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} h(t)e^{-xt}dt$$

es convergente, la función F así definida se denomina transformada de Laplace de $h$. La aplicación $h \mapsto \mathrm{F}$ se denomina transformación de Laplace.

• *Variable aleatoria de Laplace-Gauss.* — Variable aleatoria normal.

## Laplaciano

• *Laplaciano de una función f de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$ diferenciable sobre un abierto U de $\mathbf{R}^n$ y que admite derivadas parciales segundas.* — Función $\Delta f$ de U en $\mathbf{R}$ definida por:

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n).$$

Se observa que $\Delta f = \mathrm{div}\,[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f]$. El laplaciano es un operador diferencial; su notación $\Delta$ se debe a Lamé.

## Laticia

Sinónimo de retículo, de origen anglo-sajón y poco utilizado.

## Latino

• *Cuadrado latino de orden* $n \in \mathbb{N}^*$. — Descrito por Euler en 1782 como un tablero cuadrado de $n^2$ casillas donde están repartidos $n$ números o símbolos de manera tal que ninguno aparezca dos veces en una misma línea o en una misma columna. La tabla de Pitágoras de un grupo finito es un cuadrado latino. Los cuadrados latinos se utilizan en la concepción y el análisis de experiencias estadísticas y en la teoría de la información, en particular en el estudio de los códigos correctores de errores.
En matemáticas puras intervienen en combinatoria, por ejemplo, en el estudio de los planos proyectivos finitos. Diversos problemas relativos a los cuadrados latinos se refieren a la teoría de los grafos, así como a la utilización de los ordenadores.
V. GRECO-LATINO.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* |
| *c* | *d* | *e* | *f* | *a* | *b* |
| *e* | *f* | *a* | *b* | *c* | *d* |
| *b* | *c* | *d* | *e* | *f* | *a* |
| *d* | *e* | *f* | *a* | *b* | *c* |
| *f* | *a* | *b* | *c* | *d* | *e* |

## Latitud

V. ESFÉRICAS (Coordenadas).

## Laurent, Pierre Alphonse (1813-1854)

• *Serie de Laurent de una función analítica en la corona* S *de centro* $z_0$ *y de radios* $r_1 < r_2$. — En todo punto $z \in S$, tenemos:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \text{ con } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

donde $\gamma$ es un círculo de centro $z_0$ y de radio $r$ con $r_1 < r < r_2$. La serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ que converge normalmente hacia $f$ sobre toda corona

$$r_1 < s_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant s_2 < r_2$$

se denomina serie de Laurent de $f$, y $a_{-1}$ es el residuo de $f$ en el punto $z_0$.
V. RESIDUO.

## La Vallée Poussin, Charles Jean Gustave Nicolas de (1866-1962)

V. PRIMO (Número).

## Lazo

• *Lazo de un espacio topológico o del plano complejo.* — Camino cuyo origen es igual que el extremo.
V. HOMÓTOPO, INDICE.

## Lebesgue, Henri Léon (1875-1941)

• *Axioma de Borel-Lebesgue.* — V. BOREL.

• *Clan de Lebesgue de* $\mathbf{R}^n$. — Clan engendrado por los pavimentos acotados de $\mathbf{R}^n$. En particular para $n = 1$, el clan de Lebesgue es engendrado por los intervalos acotados de $\mathbf{R}$.

• *Función singular de Lebesgue.* — Existe una aplicación continua $\Phi$ creciente del conjunto de los números triádicos sobre $[\![0, 1]\!]$. Se prolonga en una función creciente $\bar{\Phi} : [\![0, 1]\!] \to [\![0, 1]\!]$ no constante y cuya derivada es nula sobre $[\![0, 1]\!]$, salvo sobre un conjunto de medida nula.

• *Integral de Lebesgue.* — La integral de Riemann es satisfactoria para las funciones continuas o para ciertas funciones $f$ discontinuas, pero satisfactorias de condiciones que expresan que sobre todo intervalo $]\!]x_1, x_{i+1}[\![$ la variación de $f$ permanece «razonable». La idea de Lebesgue consiste en invertir el problema; en lugar de dividir el conjunto de partida de $f$, la integración de Lebesgue divide el conjunto de llegada de $f$ y para cada intervalo $]\!]y_1, y_{i+1}[\![$ se considera el conjunto de los $x$ tales que $y_i < f(x) < y_{i+1}$. La función $f$ es integrable en el sentido de Lebesgue cuando la imagen recíproca de todo intervalo es medible. La noción de integral así obtenida es más general que la de Riemann; toda función Riemann-integrable es Lebesgue-integrable y las dos integrales coinciden. Por el contrario, la función de Dirichlet (función característica de $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$) es Lebesgue-integrable (y su integral es nula), pero no es Riemann-integrable. La superioridad de la integral de Lebesgue sobre la de Riemann queda particularmente evidenciada en los problemas de convergencia, el estudio de las series trigonométricas y la teoría de las distribuciones.

• *Medida de Lebesgue.* — Sobre $\mathbf{R}$ provisto de la tribu de Borel, existe una única medida $\mu$, denominada medida de Lebesgue, tal que para todo intervalo real $\mathbf{I}$ (abierto, cerrado, semi-abierto) de extremos $a \leqslant b$ tengamos $\mu(\mathbf{I}) = b - a$; si $\mathbf{X}$ es una parte numerable de $\mathbf{R}$, entonces $\mu(\mathbf{X}) = 0$.
V. DESPRECIABLE.

• *Teorema de Lebesgue o de la convergencia dominada.* — Sea $(f_n)$ una sucesión de funciones numéricas integrables en el sentido de Lebesgue, que convergen casi por doquier hacia una función $f$. Si existe una función $\varphi$ integrable tal que $|f_n| \leqslant \varphi$ para toda función $f_n$, entonces $f$ es integrable, la sucesión

$(f_n)$ converge en media hacia $f$ y la sucesión $\left(\int f_n(x)\,dx\right)$ converge hacia $\int f(x)\,dx$.

• *Teorema de Borel-Lebesgue.* — V. BOREL.

## Legendre, Adrien Marie (1752-1833)

• *Fórmula de Legendre-Gauss.* — Para todo entero $p > 1$, la función euleriana $\Gamma$ verifica:

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right) = (2\pi)^{(p-1)/2}p^{(1-2x)/2}\Gamma(x).$$

• *Integral elíptica puesta bajo la forma normal de Legendre.* — Integral elíptica de la forma:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}} \quad \text{donde} \quad 0 < |k| < 1.$$

• *Ley de reciprocidad cuadrática de Legendre-Gauss.* — Sean $p$ y $q$ dos números primos impares distintos. Si $p$ es residuo cuadrático módulo $q$, entonces $q$ es residuo cuadrático módulo $p$. Al utilizar el símbolo de Legendre, esta ley se expresa por:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}.$$

• *Polinomios de Legendre.* — Polinomios ortogonales sobre $\mathbf{I} = [-1, 1]$ en relación al peso $p(x) = 1$. Simbolizados $\mathbf{P}_n$, verifican:

$$\frac{2p+1}{2}\int_{-1}^{1} \mathbf{P}_p(x)\,\mathbf{P}_p(x)\,dx = \delta_{pq} \text{ (símbolo de Kronecker).}$$

Son dados por $\mathbf{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$, verifican la fórmula de recurrencia:

$$(n+1)\,\mathbf{P}_{n+1}(x) - (2n+1)\,\mathbf{P}_n(x) + n\mathbf{P}_{n-1}(x) = 0$$

y son soluciones de la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. Legendre los descubrió en 1785 como coeficientes del desarrollo en serie

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}_n(x)t^n$$

al buscar una expresión de la distancia entre un punto fijo interior a una esfera y un punto móvil sobre la esfera. Los primeros polinomios son:

$$\mathbf{P}_0 = 1, \quad \mathbf{P}_1(x) = x, \quad \mathbf{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1).$$

V. JACOBI, ULTRAESFÉRICOS.

• *Símbolo de Legendre.* — Sean $a$ un entero y $p$ un entero primo impar extraño con $a$. El símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ es definido por $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ si $a$ es residuo cuadrático de $p$ y $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ en el caso contrario. Verifica las fórmulas:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \text{ si } a \text{ y } b \text{ son extraños a } p.$$

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \bmod p \text{ (criterio de Euler)}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}.$$

• *Teorema de Legendre.* — Afirma que $\pi^2$ es un número irracional.

• *Transformación de Legendre.* — Transformación que permite pasar de funciones definidas sobre un espacio vectorial a funciones definidas sobre el espacio dual. Sea $f$ una función real de variable real derivable dos veces y convexa ($f''(x) > 0$); la transformada de Legendre de $f$ es la función $g$ que al número real $u = f'(x)$ asocia el número real $g(u) = ux - f(x)$. Para toda función real $f$ de dos variables reales diferenciable dos veces y que verifica

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

la transformada de Legendre de $f$ es la función $g$ que, al par:

$$(u, v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right),$$

asocia el número real $g(u, v) = ux + vy - f(x, y)$. Muy utilizada en física, esta transformación corresponde al caso de un flujo plano de un fluido, por ejemplo, al sustituir el plano de la hodógrafa por el plano del flujo.

## Lehmus

• *Teorema de Steiner-Lehmus.* — V. STEINER.

## Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)

La ortografía Leibnitz es incorrecta.

• *Fórmula de Leibniz.* — Da la derivada $n$-ésima de un producto de funciones $u$ y $v$ derivables $n$ veces:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \cdots$$

$$+ \binom{n}{p}u^{(n-p)}v^{(p)} + \cdots + uv^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

• *Notaciones de Leibniz.* — La derivada $n$-ésima de una función $f$ se simboliza frecuentemente desde Leibniz $d^n f/dx$ y la $k$-ésima derivada parcial de una función $f$ de $n$ variables $(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$ se representa $\partial f/\partial x_k$. La notación $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ designa la $j$-ésima derivada parcial de la $i$-ésima derivada parcial de $f$. Se interpreta así cada vez más de cerca la notación:

$$\frac{\partial^p f}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_i} x_i} \text{ con } k_1 + k_2 + \cdots + k_n = p.$$

V. NEWTON (Notaciones de).

• *Problemas de Leibniz.* — Dividir un triángulo en cuatro partes de igual área por dos rectas ortogonales.

• *Regla de Leibniz.* — Sean $\mathbf{I} = [\![a, b]\!]$ y $\mathbf{J} = [\![c, d]\!]$ dos intervalos de $\mathbf{R}$ y F una función de $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$ en $\mathbf{R}$ tal que la aplicación $y \mapsto F(x, y)$ sea continua sobre $\mathbf{J}$ cualquiera que sea $x \in \mathbf{I}$ y tal que $\partial F/\partial x$ exista y sea continua sobre $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$. La regla de Leibniz afirma que la función $f$ definida sobre $\mathbf{I}$ por:

$$f(x) = \int_a^d F(x, y)dy$$

es derivable sobre $\mathbf{I}$ y que $\dfrac{df}{dx} = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dy.$

• *Relación de Leibniz.* — Si G es el baricentro de los puntos $(A_i)_{i\in I}$, (I es finito), afectados de coeficientes $(m_i)_{i\in I}$, la relación de Leibniz afirma que:

$$\sum_{i\in I} m_i MA_i^2 = (\sum_{i\in I} m_i) MG^2 + \sum_{i\in I} GA_i^2$$

para todo punto M.

## Lejeune-Dirichlet, Peter Gustav (1805-1859)

Nombre correcto del matemático llamado más frecuentemente «Dirichlet». V. DIRICHLET.

## Lema

Nombre dado a resultados intermedios utilizados en el curso de largos razonamientos que necesita la demostración de ciertos teoremas.
V. ABEL, GAUSS, SCHUR, SCHWARZ, URYSOHN, WEIERSTRASS, YONÉDA.

## Lemniscata

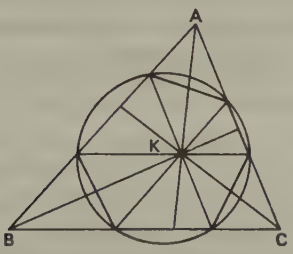
• *Lemniscata de n focos.* — Sean $n$ puntos del plano $F_1, F_2, ..., F_n$ y $k$ un número real estrictamente positivo. El conjunto de los puntos M del plano cuyo producto de las distancias a cada uno de los puntos $F_1, F_2, ..., F_n$ es constante e igual a $k$ es una curva llamada lemniscata de $n$ focos. Estas curvas pueden tener contornos muy curiosos. Se demuestra que para toda curva cerrada que no se recorta jamás, dibujada sobre una hoja de papel,

puede hallarse una lemniscata de $n$ focos cuyas desviaciones posibles del dibujo inicial no superan la anchura del trazo del lápiz.
V. BERNOULLI (Lemniscata de).

## Lemoine, Emile (1840-1912)

● *Eje o recta de Lemoine de un triángulo.* — Polar del punto de Lemoine por relación al círculo circunscrito. Pasa por los centros de los círculos de Apolonio del triángulo.

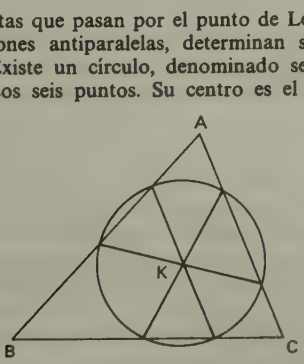
● *Hexágono de Lemoine.* — Hexágono inscriptible cuyos vértices son los seis puntos que determinan el primer círculo de Lemoine.




● *Punto de Lemoine de un triángulo.* — Punto K de concurrencia de las semimedianas de ese triángulo.
V. TUCKER.

● *Primer círculo de Lemoine de un triángulo.* — Las paralelas a los lados del triángulo trazadas por el punto de Lemoine determinan seis puntos sobre los lados del triángulo. Existe un círculo, llamado primer círculo de Lemoine, que pasa por esos seis puntos. Su centro es el punto medio de OK, donde O es el centro del círculo circunscrito y K el punto de Lemoine.
V. LEMOINE (Hexágono de).

● *Segundo círculo de Lemoine de un triángulo.* — Para cada lado del triángulo, se considera la dirección antiparalela de ese lado en relación al ángulo opuesto.
Las tres rectas que pasan por el punto de Lemoine, cuyas direcciones son las tres direcciones antiparalelas, determinan seis puntos sobre los lados del triángulo. Existe un círculo, denominado segundo círculo de Lemoine, que pasa por esos seis puntos. Su centro es el punto de Lemoine.



## Lenguaje

• *Lenguaje sobre un alfabeto o lenguaje formal.* — Dado un conjunto numerable X, se denomina lenguaje de alfabeto X a una parte L del monoide libre $X^*$ engendrado por X. Se interesa más particularmente en los lenguajes engendrados por una gramática formal. Para ciertos gramáticos, estos lenguajes son reconocibles por autómatas.
V. AUTÓMATA, CHOMSKY, FORMAL (Gramática), KLEENE.

• *Lenguaje del primer orden en lógica.* — Lenguaje formal cuyo alfabeto es un conjunto de elementos, denominados signos o símbolos y que pueden ser conectores, cuantificadores, un símbolo de igualdad, una colección infinita numerable de letras llamadas variables del lenguaje y de los signos de puntuación. Los diferentes lenguajes del primer orden se distinguen por sus constantes, que se clasifican en tres familias (eventualmente vacías): los predicados, los individuos y los signos operatorios. Existe una función que a cada signo operatorio o predicado asocia un entero positivo llamado peso.

• *Lenguaje de programación.* — Lenguaje formal cuyas palabras son instrucciones ejecutables por un ordenador. El «lenguaje-máquina», directamente comprensible por el ordenador es de un empleo delicado que necesita grandísima atención. Los lenguajes evolucionados, más cercanos del lenguaje humano y de empleos más fáciles, necesitan la intervención de un órgano anexo (el compilador) que «traduce» este lenguaje evolucionado en lenguaje máquina y a la recíproca. Los más utilizados por los científicos son ALGOL APL, FORTRAN y $PL_1$ (llamados NPL en sus inicios).

• *Realización de un lenguaje.* — V. ESTRUCTURA.

## Leonardo de Pisa

Otro nombre de Fibonacci (V. FIBONACCI).

## Letra

V. LENGUAJE, LIBRE (Monoide).

## Lévi, Beppo (1875-1961)

• *Teorema de Beppo Lévi o de la convergencia monótona.* — Sea $(f_n)$ una sucesión creciente de funciones numéricas integrables. Si la sucesión de las integrales de $f_n$ está majorada, entonces la envolvente superior $f$ de las funciones $f_n$ es integrable, la sucesión $(f_n)$ converge en media hacia $f$ y la sucesión $\left(\int f_n(x)\,dx\right)$ converge hacia $\int f(x)\,dx$.

## Lexicográfico

En el sentido general, la lexicografía (de una raíz griega que significa «palabra») es la ciencia de la composición de los léxicos y de los diccionarios.

• *Orden lexicográfico.* — Sean (E, $\leqslant$) un conjunto totalmente ordenado y $<$ la relación de orden estricto sobre E. La relación $\prec$ definida sobre $E^n$ por:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \prec (b_1, b_2, ..., b_n)$$

si $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ o si $a_1 < b_1$ o si existe $i = 1, ..., n$ tal que:

$$a_1 = b_1, ..., a_{i-1} = b_{i-1} \quad \text{y} \quad a_i < b_i$$

es una relación de orden total sobre $E^n$ llamada de orden lexicográfico. El mismo procedimiento permite proporcionar un orden total a todo producto $\prod_{i=1}^{n} E_i$ de conjuntos totalmente ordenados.

## Ley

• *Ley de las áreas.* — V. AREAS.

• *Ley de composición de las aplicaciones.* — V. COMPOSICIÓN.

• *Ley de composición externa.* — Acción de un conjunto sobre otro.

• *Ley de composición interna.* V. INTERNA.
V. ASOCIATIVA, CONMUTATIVA, DISTRIBUTIVA, INDUCTIVA.

• *Ley [ ] (ley «corchete») de un álgebra de Lie.* — V. LIE.

• *Ley débil (resp. fuerte) de los grandes números.* — V. GRANDES.

• *Ley de los grandes números.* — Ley débil de los grandes números.

• *Ley de inercia de Sylvester.* — V. SYLVESTER.

• *Ley de probabilidad de una variable aleatoria.* — Dada una variable aleatoria X sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, se denomina ley de probabilidad de X o ley de X a la aplicación que a todo elemento B de la tribu de Borel de **R** asocia la probabilidad del suceso $X^{-1}(B)$. La ley de X está perfectamente determinada por la función de distribución de X. Cuando X es discreta, la ley de X está determinada entonces por la distribución de X. Cuando X es absolutamente continuo, la ley de X está determinada entonces por la densidad de probabilidad de X.
V. BETA, BINOMIAL, CAUCHY, CONJUNTA, CHI (Ley del $\chi^2$), EXPONENCIAL, FISHER-SNEDECOR, GAMMA, GEOMÉTRICA, HIPERGEOMÉTRICA, LAPLACE-GAUSS, LOG-NORMAL, MULTINOMIAL, NEGATIVA (Ley binomial), NORMAL, PASCAL, PEARSON, POISSON, POLIHIPERGEOMÉTRICA, POLINOMIAL, STUDENT, UNIFORME.

• *Ley de reciprocidad cuadrática de Legendre-Gauss.* — V. LEGENDRE.

• *Ley de los senos.* — V. SENOS.

• *Ley de las tangentes.* — V. TANGENTES.

• *Convergencia en ley.* — Sean $(X_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria, todas definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, y sean $F_n$ y F las funciones de distribución de $X_n$ y X. Se dice que la sucesión $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en ley hacia X si $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ en todo punto $x \in \mathbf{R}$, donde F es continua. La convergencia estocástica entraña la convergencia en ley; la recíproca es falsa.

## Leyes

• *Leyes marginales.* — V. MARGINALES.

• *Leyes de los grandes números.* — V. GRANDES.

• *Leyes de Morgan.* — V. MORGAN.

## L'Hôpital (de), Guillaume François Antoine

V. L'HOSPITAL.

## L'Hospital (de), Guillaume François Antoine o l'Hôpital (de) (1661-1704)

• *Cúbica de L'Hospital.* — Otro nombre de la cúbica de Tschirhausen.

• *Regla de L'Hospital.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones reales continuas en el intervalo $]-h, +h[$, derivables, salvo quizá en 0, en ese intervalo, y tal que $g(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. Si $f(0) = g(0) = 0$ y si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a, \text{ entonces } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = a.$$

## Libre

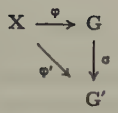
• *Familia libre de vectores.* — Sinónimo de familia de vectores linealmente independientes.

• *Familia afínmente libre.* — Familia de puntos afínmente independientes.

• *Familia proyectivamente libre.* — Familia de puntos proyectivamente independientes.

• *Grupo conmutativo libre.* — Z-módulo libre.

• *Grupo libre engendrado por un conjunto* X. — Par $(G, \varphi)$, donde G es un grupo y $\varphi: X \to G$ una aplicación tal que si $(G', \varphi')$ es otro par análogo, existe un único homomorfismo de grupos $\sigma: G \to G'$ tal que $\varphi' = \sigma \circ \varphi$. El par $(G, \varphi)$ es la solución de un problema universal y se dice que G es el grupo libre engendrado por el conjunto X. Así se define un functor de la categoría de los conjuntos en la de los grupos.




V. ADJUNTOS (Functores), NIELSEN (Teorema de), UNIVERSAL (Problema).

• *Indice libre.* — V. MUTIFICADOR.

• *Módulo libre.* — Módulo que admite una base. Todo espacio vectorial es un módulo libre, así como el A-módulo A[X] de los polinomios en una indeterminada sobre el anillo conmutativo A.

• *Monoide libre sobre un conjunto* X. — Sobre el conjunto $\mathscr{F}_X$ de las sucesiones finitas de elementos de X, llamados palabras, se define una ley de composición interna denominada por concatenación, definida por:

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Provisto de esta ley asociativa, $\mathscr{F}_X$ se denomina monoide libre sobre el conjunto X; su elemento neutro es la palabra vacío ( ). El conjunto X se denomina el alfabeto del monoide, sus elementos se llaman letras. En teoría de los lenguajes se simboliza X* el monoide libre engendrado por el conjunto X.

• *Variable libre en un enunciado o una fórmula.* — Variable $x$ tal que no exista en el enunciado o la fórmula ninguna ocurrencia de $\forall x$ o $\exists x$. En la fórmula $(\forall x)\ (x \leqslant y)$, la variable $y$ es libre y la variable $x$ está ligada.
V. LIGADA, MUTIFICADOR.

## Libremente

• *Grupo* G *que opera libremente sobre un conjunto* E. — Grupo G que opera sobre E y tal que la aplicación $(\alpha, x) \mapsto (\alpha x, x)$ de G × E en E × E sea inyectiva.
V. OPERANTE.

## Lie, Marius Sophus (1842-1899)

• *Algebra de Lie.* — Algebra E provista de una aplicación (ley «corchete») $(x, y) \mapsto [x, y]$ de E × E en E tal que:

1) $[x, x] = 0$ para todo $x \in E$;
2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identidad de Jacobi).

Ejemplos: $\mathbf{R}^3$ provisto del producto vectorial, End($\mathbf{R}^n$) provisto de la ley definida por $[f, g] = fg - gf$ y más generalmente todo anillo en el que se plantee $[x, y] = xy - yx$.

• *Grupo de Lie.* — Variedad G de clase $C^k$ provista de una estructura de grupo tal que el producto $p: G \times G \to G$ y la aplicación que da la inversa $i: G \to G$ sean de clase $C^k$. Los grupos clásicos $GL(\mathbf{R}^n)$ u $O(\mathbf{R}^n)$ son grupos de Lie. Un grupo de Lie es, por tanto, un grupo topológico; el quinto problema de Hilbert equivale a dar condiciones suficientes para que un grupo topológico pueda ser provisto de una estructura de grupo de Lie, problema totalmente resuelto en 1951 por Gleason, Montgomery y Zippin.

## Ligada

• *Familia ligada de vectores de un módulo o de un espacio vectorial.* — Familia de vectores $(x_i)_{i\in I}$ que no es libre, es decir, tal que existe una parte finita J de I y escalares $(a_j)_{j\in J}$ no todos nulos que verifican:

$$\sum_{j\in J} a_j x_j = 0.$$

• *Familia de puntos afínmente ligada.* — Familia de puntos que no es afínmente libre.

• *Familia de puntos proyectivamente ligada.* — Familia de puntos que no es proyectivamente libre.

• *Variable ligada en una fórmula.* — Variable x tal que en esa fórmula haya por lo menos una ocurrencia de $\forall x$ o de $\exists x$.
V. LIBRE, MUTIFICADOR.

## Ligado

• *Gramática formal de contexto ligado.* — V. CHOMSKY (Clasificación de).

• *Indice ligado.* — V. MODIFICADOR.

• *Vector ligado.* — Empleado antiguamente por bipunto. Además de que los vectores ligados no son vectores, este término se prestaba a confusión con la noción de «familia de vectores ligada» en el sentido de la dependencia lineal. V. VECTOR.

## Ligados

• *Puntos afínmente ligados.* — Puntos que no son afínmente independientes. Tres puntos alineados están afínmente ligados.

• *Puntos proyectivamente ligados.* — Puntos que no son proyectivamente independientes.

## Lím

Abreviatura de límite.

## Limitado

• *Desarrollo limitado.* — Una función real $f$ definida sobre un intervalo $]x_0 - h, x_0 + h[$ de **R** admite un desarrollo limitado de orden $n$ en el entorno de $x_0$ si $f(x)$ puede escribirse:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n$$

donde $\varepsilon(x)$ tiende hacia 0 cuando $x$ tiende hacia $x_0$. Una función $f$ definida sobre un intervalo $]A, +\infty[$ (o $] -\infty, A[$) de $\mathbf{R}$ admite un desarrollo limitado de orden $n$ en el entorno del infinito si:

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^n},$$

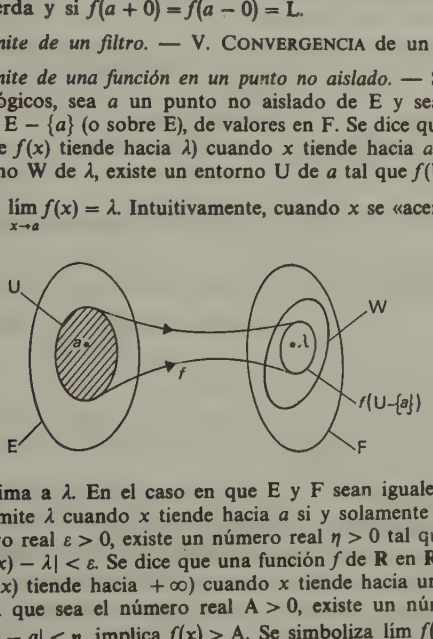
donde $\varepsilon(x)$ tiende hacia 0 cuando $x$ tiende hacia el infinito.

## Límite

• *Límite a derecha o a izquierda de una función.* — Sea $f$ una función definida sobre $\mathbf{R} - \{a\}$ de valores en un espacio topológico F. Se dice que $f$ admite un límite a derecha $\lambda \in \mathbf{F}$ cuando $x$ tiende hacia $a \in \mathbf{R}$ si, cualquiera que sea el entorno W de $\lambda$, existe un número real $\alpha > a$ tal que $f(]a, \alpha[) \subset \mathbf{W}$. El número real $\lambda$ se simboliza $f(a+)$ o $f(a+0)$. Asimismo, $f$ admite un límite a izquierda $\lambda' \in \mathbf{F}$ cuando $x$ tiende hacia $a \in \mathbf{R}$ si cualquiera que sea el entorno W de $\lambda'$ existe un número real $\alpha < a$ tal que $f(]\alpha, a[) \subset \mathbf{W}$. El número real $\lambda'$ se simboliza $f(a-)$ o $f(a-0)$. La función $f$ admite un límite L cuando $x$ tiende hacia $a$, si y solamente si admite un límite a derecha y un límite a izquierda y si $f(a+0) = f(a-0) = \mathbf{L}$.

• *Límite de un filtro.* — V. CONVERGENCIA de un filtro.

• *Límite de una función en un punto no aislado.* — Sean E y F dos espacios topológicos, sea $a$ un punto no aislado de E y sea $f$ una función definida sobre $\mathbf{E} - \{a\}$ (o sobre E), de valores en F. Se dice que $f$ tiene por límite $\lambda \in \mathbf{F}$ (o que $f(x)$ tiende hacia $\lambda$) cuando $x$ tiende hacia $a$ si cualquiera que sea el entorno W de $\lambda$, existe un entorno U de $a$ tal que $f(\mathbf{U} - \{a\}) \subset \mathbf{W}$. Se representa $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$. Intuitivamente, cuando $x$ se «acerca» a $a$, entonces $f(x)$ se




aproxima a $\lambda$. En el caso en que E y F sean iguales a $\mathbf{R}$, la función $f$ tiene por límite $\lambda$ cuando $x$ tiende hacia $a$ si y solamente si, cualquiera que sea el número real $\varepsilon > 0$, existe un número real $\eta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \eta$ implica $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$. Se dice que una función $f$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ tiene por límite $+\infty$ (o que $f(x)$ tiende hacia $+\infty$) cuando $x$ tiende hacia un número real $a$ si, cualquiera que sea el número real $\mathrm{A} > 0$, existe un número real $\eta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \eta$ implica $f(x) > \mathrm{A}$. Se simboliza $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. Se dice que $f$ tiene por límite $\lambda \in \mathbf{R}$ (o que $f(x)$ tiende hacia $\lambda$) cuando $x$ tiende hacia $+\infty$ si cualquiera que sea el número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\mathrm{B} > 0$ tal que

$x > B$ implica $|f(x) - \lambda < \varepsilon$. Se representa $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$. De igual modo se definen las expresiones:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lambda, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

V. INFINITO (Límite).

● *Límite de una función en un punto relativamente a una parte* A *de un espacio topológico.* — Sean E y F dos espacios topológicos, A una parte de E y sea $a$ un punto de E adherente a A. Se dice que una función $f$ de A en F tiene por límite $\lambda \in F$ (o que $f(x)$ tiende hacia $\lambda$) cuando $x$ tiende hacia $a$ permaneciendo en A si $\lambda$ es el límite de $f$ según el filtro de las intersecciones de A con los entornos de $a$; dicho en otros términos, si cualquiera que sea el entorno V de $\lambda$ en F, existe en E un entorno U de $a$ tal que $f(U \cap A) \subset V$. Se representa $\lim_{x \to a;\, x \in A \setminus} f(x) = \lambda$. Cuando $A = E - \{a\}$ se obtiene la noción de límite en el punto no aislado $a$. Si $E = \mathbf{R}$ y si A es un intervalo abierto uno de cuyos bordes es $a$ se obtiene la noción de límite a derecha o a izquierda. Cuando $A = E$, la función $f$ de E en F es continua en $a$ si y solamente si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

● *Límite de una función según un filtro.* — V. CONVERGENCIA de una función según un filtro.

● *Límite de una sucesión.* — V. CONVERGENCIA.

● *Límite inferior.* — V. INFERIOR.

● *Límite superior.* — V. INFERIOR.

● *Ordinal límite.* — Ordinal que no tiene predecesores. Ejemplos, $\omega$, $\omega + \omega$, $\omega^2$, etc.

● *Teorema central límite o teorema del límite centrado.* — V. CENTRADO.

## Límites

● *Haz de círculos de puntos límites.* — V. HAZ.

## Lindemann, Ferdinand (1852-1939)

● *Teorema de Lindemann.* — El número real $\pi$ es trascendente (1882). Se deduce de él la imposibilidad de la cuadratura del círculo.
V. HERMITE (Teorema de), LIOUVILLE (Números de), TRASCENDENTE (Número).

## Lindenbaum, Adolf (1905-1942)

● *Algebra de Lindenbaum-Tarsky.* — V. BOOLE (Algebra de).

## Línea

Utilizado vulgarmente por curva.
V. POLIGONAL.

- *Línea de llamada.* — V. LLAMADA.
- *Línea de tierra.* — V. DESCRIPTIVA.
- *Línea o vector-línea de una matriz.* — V. MATRIZ.
- *Matriz línea.* — Matriz (1, *p*).

## Lineal

- *Ajuste lineal.* — Ajuste por una recta.
- *Algebra lineal y multilineal.* — Estudio de los módulos, espacios vectoriales, aplicaciones lineales y multilineales, matrices, determinantes, tensores, etc. Nacido, en el siglo XIX, de la geometría, es hoy el dominio del álgebra que más aplicaciones posee, tanto en las diferentes ramas de las matemáticas (análisis, probabilidades...) como en las disciplinas científicas más diversas (física, econometría...).
- *Aplicación lineal de un* A-*módulo* E *en un* A-*módulo* F. — Aplicación $f$ de E en F tal que para todo $(x, y) \in E^2$ y todo $(\alpha, \beta) \in A^2$ se tenga:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Dicho en otros términos, $f$ es un homomorfismo de $(E, +, \cdot)$ en $(F, +, \cdot)$.
V. CO-IMAGEN, CO-NÚCLEO, IMAGEN, MATRIZ, NÚCLEO, RANGO, TRANSPUESTA.

- *Aplicación lineal proyectiva.* — V. PROYECTIVA.
- *Aplicación n-lineal.* — V. MULTILINEAL (Aplicación).
- *Coeficiente de correlación lineal.* — V. CORRELACIÓN.
- *Combinación lineal de los vectores* $x_1, ..., x_n$ *de un* A-*módulo* E. — Vector de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, donde los $\alpha_i$ son elementos de A.
- *Elemento lineal de una superficie.* — Sea $ds^2$ la primera forma cuadrática fundamental de la superficie. La forma $ds$ se llama elemento lineal de la superficie.
V. FUNDAMENTALES.
- *Ecuación lineal.* — Ecuación $f(x) = b$, donde $f$ es una aplicación lineal de un módulo E en un módulo F y donde $b \in F$.
- *Ecuación diferencial lineal.* — Ecuación diferencial de la forma:

$$A_n(t)\,y^n + A_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \cdots + A_1(t)\,y' + A_0(t)\,y = f(t).$$

- *Forma lineal sobre un* A-*módulo* E. — Aplicación lineal de E en A, donde A está considerada como A-módulo.
V. SEMI-LINEAL.

• *Forma n-lineal.* — Forma multilineal.

• *Grupo lineal de un espacio vectorial* E. — Grupo GL(E) de los automorfismos de E para la ley de composición de las aplicaciones. También se representa $GL_n(K)$ el grupo lineal sobre $K^n$.

• *Haz lineal puntual en el plano afín* $\mathbf{R}^2$. — Sean dos curvas algebraicas $C_1$ y $C_2$ de ecuaciones $P(x, y) = 0$ y $Q(x, y) = 0$. La familia de curvas $\mathcal{F}$ de ecuación:

$$\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0,$$

donde $(\alpha, \beta)$ describe $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ se llama haz lineal de base $\{C_1, C_2\}$ o haz lineal engendrado por las curvas $C_1$ y $C_2$.
V. HAZ de círculos, de cónicas, de rectas.

• *Haz lineal puntual en el espacio afín* $\mathbf{R}^3$. — Sean dos superficies algebraicas $S_1$ y $S_2$ de ecuaciones $P(x, y, z) = 0$ y $Q(x, y, z) = 0$. La familia de las superficies $\mathcal{F}$ de ecuación:

$$\alpha P(x, y, z) + \beta Q(x, y, z) = 0, \text{ donde } (\alpha, \beta) \text{ describe } \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

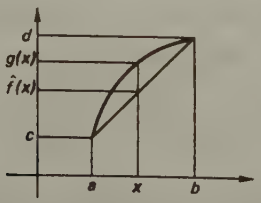
se denomina haz lineal de base $\{S_1, S_2\}$ o engendrada por las superficies $S_1$ y $S_2$.
V. HAZ de planos, de esferas.

• *Interpolación lineal.* — Sean dos números reales $a$ y $b$ distintos $(a < b)$ y una aplicación $f$ de $\{a, b\}$ en $\mathbf{R}$ definida por $f(a) = c$ y $f(b) = d$. La única aplicación afín

$$\hat{f}: x \mapsto \frac{1}{b-a}[(d-c)x + bc - ad]$$

que prolonga $f$ se denomina interpolación lineal de $f$. Si $g$ es una función numérica definida sobre $[\![a, b]\!]$ y tal que $g(a) = c$ y $g(b) = d$, la función $\hat{f}$ se denomina aproximación de $g$ por interpolación lineal.

• *Isometría lineal de un espacio vectorial euclídeo* E *de dimensión finita.* — Isometría vectorial de E (V. VECTORIAL).




• *Operador lineal.* — Nombre que se da a veces a una aplicación lineal de un módulo E en sí mismo, por ejemplo, cuando E es un espacio de funciones.

• *Representación lineal de un grupo* G. — Homeomorfismo de G en el grupo GL(V) de los automorfismos de un espacio vectorial V.

• *Transformación lineal.* — V. TRANSFORMACIÓN.

• *Variedad lineal.* — Sinónimo de sub-espacio afín. V. AFÍN (Sub-espacio).

- *Variedad lineal afín.* — V. AFÍN.
- *Variedad lineal proyectiva.* — Sinónimo de sub-espacio proyectivo.

## Lineales

- *Aplicaciones lineales asociadas a una forma bilineal.* — Sean $E^*$ y $F^*$ los duales de dos K-espacios vectoriales E y F y $\varphi$ una forma bilineal sobre $E \times F$. Se llama aplicaciones lineales asociadas a $\varphi$ a las aplicaciones lineales $\varphi_g$ de E en $F^*$ y $\varphi_d$ de F en $E^*$ definidas por $\varphi_g(x): y \mapsto \varphi(x, y)$ y $\varphi_d(x): y \mapsto \varphi(y, x)$. En el caso en que $E = F$ y donde $\varphi$ es simétrico, la aplicación $\varphi_d$ es igual a la aplicación $\varphi_g$ y se llama la aplicación lineal asociada a $\varphi$. V. SEMI-LINEALES.

## Linealmente

- *Vectores linealmente dependientes (resp. independientes).* — V. INDEPENDIENTES.

## Linearidad

- *Linearidad de una aplicación.* — Propiedad de la aplicación de ser lineal.

## Líneas

- *Líneas de curvatura de una superficie.* — V. CURVATURA.
- *Líneas divisorias de una superficie.* — DIVISORIA.
- *Líneas geodésicas o geodésicas de una superficie.* — V. GEODÉSICA.
- *Líneas de la mayor pendiente de una superficie.* — Líneas de thalweg.
- *Líneas de partición de las aguas de una superficie.* — Líneas divisorias.
- *Líneas de pendiente de una superficie.* — PENDIENTE.
- *Líneas de salida de las aguas de una superficie.* — Líneas de thalweg.
- *Líneas de thalweg de una superficie.* — V. THALWEG.
- *Líneas trigonométricas.* — Funciones trigonométricas.

## Líneas de máxima pendiente

- *Líneas de salida de las aguas de una superficie.* — Líneas de thalweg. V. THALWEG.

## Liouville, Joseph (1809-1882)

- *Números de Liouville.* — Números reales de la forma $\sum_{n>0} \frac{c_n}{10^{n!}}$, donde $c_n$ es

un número comprendido entre 0 y 9, pero que no es constantemente nulo a partir de cierto índice $n$. Los números de Liouville son números trascendentes, los primeros reconocidos como tales. Su conjunto no es numerable; tiene la potencia del continuo. Liouville descubrió esos números cuando estudiaba la aproximación de los números irracionales algebraicos por números racionales.
V. LIOUVILLE (Teorema de).

• *Problema de Sturm-Liouville.* — V. STURM.

• *Teoremas de Liouville:*

1) Sea f *una función holomorfa sobre* C. Si existe un entero $k > 0$ tal que:

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{f(z)}{z^k} = 0,$$

entonces $f$ es un polinomio de grado estrictamente inferior a $k$. En particular, una función holomorfa y acotada en C es constante.
2) Sea $\alpha$ un número algebraico de grado $n$; existe una constante $\gamma(\alpha) > 0$ tal que para todo número racional $p/q$ tengamos $|\alpha - (p/q)| > \gamma(\alpha)/q^n$. Este teorema muestra que hay un límite de tal manera que se puede aproximar un número algebraico por un $n$ número racional.
V. LIOUVILLE (Números de).

## Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund (1832-1903)

• *Condición de Lipschitz.* — Condición de Lipschitz de orden 1. Una aplicación que verifica una condición de Lipschitz también se denomina lipschitziana.

• *Condición de Lipschitz de orden* $\alpha$. — Sea $f$ una aplicación de un espacio métrico E en un espacio métrico F y sean $k$ y $\alpha$ dos números reales tales que $k > 0$ y $0 < \alpha \leqslant 1$. Se dice que $f$ verifica una condición de Lipschitz, o de Hölder, de orden $\alpha$ y de razón $k$ si $d(f(x), f(y)) \leqslant k[d(x, y)]^\alpha$ para todo par $(x, y) \in E^2$.

## Lipschitziana

• *Aplicación lipschitziana de razón k o aplicación k-lipschitziana de un espacio métrico* E *en un espacio métrico* E'. — Aplicación $f$ de E en E' tal que existe un número real estrictamente positivo $k$ que verifica $d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y)$ para todo par $(x, y)$ de elementos de E. Semejante aplicación es uniformemente continua. Ejemplo: toda función real $f$ definida y derivable sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ de R y cuya derivada verifica $|f'(x)| \leqslant k$ para todo número real $x \in [\![a, b]\!]$.
V. CONTRACTIVA.

• *Función numérica de dos variables reales lipschitziana en relación a una variable.* — Una función numérica $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ definida sobre un abierto D de $\mathbf{R}^2$ se denomina lipschitziana de razón $k$ o $k$-lipschitziana en $y$ si existe un número real $k > 0$ tal que $|f(x_1, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k|y_1 - y_2|$ para todo par $(x, y_1) \in D$ y todo par $(x, y_2) \in D$.
V. CAUCHY-ARZELA (Teorema de).

## Lissajous, Jules Antoine (1822-1880)

• *Curvas de Lissajous.* — Curvas planas de ecuaciones paramétricas $x = a \cos kt$ e $y = b \cos ht$ con $a$, $b$, $h$, $k$ números reales. Estas curvas, muy utilizadas en físicas, pueden ser producidas por un oscilógrafo catódico.

## Literal

• *Cálculo literal.* — Cálculo sobre letras (por oposición a cálculo sobre números).

• *Algebra literal.* — Nombre dado a los trabajos de Viète que muestran el interés de manipular letras que representan números por oposición a la idea de cálculo directo sobre los números.

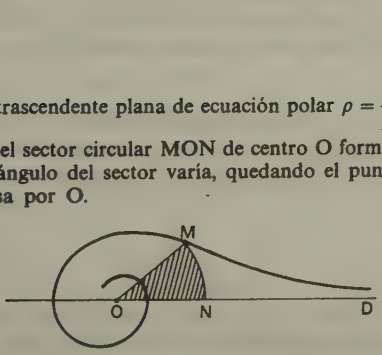
## Littlewood, John Edensor (1885-1977)

V. WARING.

• *Teorema de Littlewood.* — Afirma que $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ cambia de signo una infinidad de veces. Este teorema es notable puesto que Gauss había conjeturado que $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ para todo $x$, lo cual quedaba confirmado por los cálculos que utilizaban los primeros diez millones de números primos.
V. SKEWES.

## Lituus

Curva trascendente plana de ecuación polar $\rho = \frac{a}{\sqrt{\theta}}$. Es el lugar del punto M tal que el sector circular MON de centro O forma un área constante mientras que el ángulo del sector varía, quedando el punto N sobre una recta fija D que pasa por O.



## Ln

Logaritmo neperiano, también simbolizado Log.

## Lobatchevski, Nicolas Ivanovitch (1793-1856)

• *Geometría de Lobatchevski-Bolyai.* — Geometría fundada sobre un sistema de axiomas que son los de la geometría euclídea salvo el quinto postulado de Euclides, reemplazado por un axioma que exige que por un punto exterior a una recta se pueden trazar una infinidad de paralelas a esa recta. Este axioma es equivalente al hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a dos ángulos rectos. Beltrami demostró que la geometría sobre la pseudo-esfera, donde las rectas son las geodésicas de la superficie, constituye un modelo perfecto localmente de la geometría plana de Lobatchevski. Otros modelos han sido dados por Poincaré y Beltrami.
V. BELTRAMI, CAYLEY, GEOMETRÍA (del ángulo agudo), HIPERBÓLICA, IMAGINARIA, PANGEOMETRÍA, POINCARÉ, PSEUDO-ESFERA.

• *Curvas notables en el plano de Lobatchevski.* — V. ENDOCICLO, EXOCICLO, HORICICLO, HIPERCICLO.

## Local

• *Anillo local.* — Anillo conmutativo unitario que no tiene más que un solo ideal maximal; ejemplo: el anillo $\mathbf{Z}_p$ de los enteros $p$-ádicos o el anillo $\mathbf{Z}_{(p)}$ localizado de $\mathbf{Z}$ en $p$ con $p > 0$ entero primo.

• *Cuerpo local.* — Completado, por su valor absoluto, de un cuerpo de un número algebraico. Tal cuerpo es bien $\mathbf{R}$, bien $\mathbf{C}$, bien un cuerpo de números $p$-ádicos.
V. GLOBAL.

• *Extremo local.* — Sinónimo de extremo relativo.

• *Propiedad local.* — Se emplea en análisis y por analogía en otros dominios para designar una propiedad que, para todo punto $x$ de un espacio topológico, no hace intervenir más que los puntos de un entorno de $x$. La continuidad de una función sobre E es una propiedad local, mientras que la continuidad uniforme de una función definida sobre un espacio métrico E es una propiedad global.
V. GLOBAL.

• *Teorema de inversión local.* — Sean un espacio de Banach E y un abierto U de E. Si una aplicación $f$ de U en E es de la clase $C^1$ y admite una diferencial inversible en un punto $a \in U$; entonces existe un entorno conexo V de $a$ y un entorno conexo W de $f(a)$ tales que la restricción de $f$ en V sea un difeomorfismo de V sobre W.

## Localizado

• *Localizado* $\mathbf{Z}$ *en* $p > 0$, *donde p es un número primo.* — Anillo local $\mathbf{Z}_{(p)}$ de las fracciones de $\mathbf{Z}$ en relación al complementario del ideal primo $(p) = p\mathbf{Z}$.

## Localmente

V. Cerrada, Compacto, Conexo, Convexo, Finita, Finito, Orientable.

## Log y log

Notaciones que no deben confundirse. La notación Log designa el logaritmo neperiano (simbolizado a veces ln), mientras que log designa el logaritmo decimal, que también se representa $\log_{10}$.

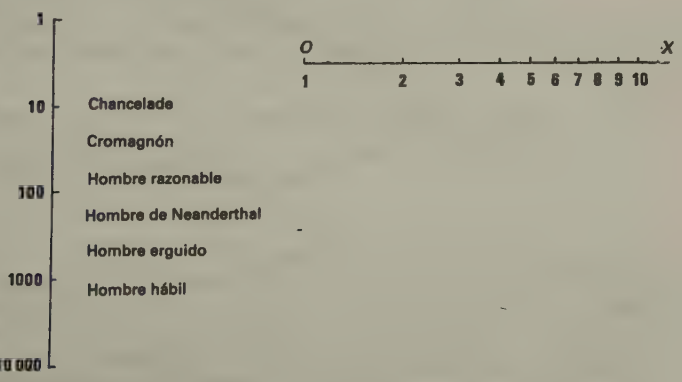
## $\log_a$

Logaritmo de base $a$.

## Logarítmica

• *Derivada logarítmica de una función derivable f de* **R** *en* **R**. — Derivada de la función $\text{Log}|f|$. Si $f'$ es la derivada de $f$, la derivada logarítmica de $f$ es $f'/f$. Facilita ciertos cálculos porque si $f$ y $g$ son dos funciones derivables, la derivada logarítmica de $f/g$ (resp. $fg$) es $f'/f - g'/g$ (resp. $f'/f + g'/g$).

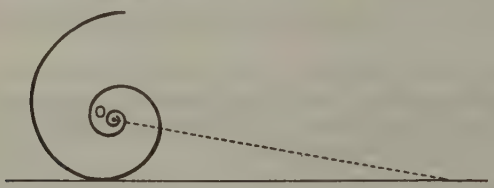
• *Escala logarítmica.* — Escala funcional particular. A todo punto M de una semi-recta OX se asocia el real $t$ tal que Log $t$ sea proporcional a la distancia OM usual (es decir, medida al «doble decímetro»). Entonces, si $d$ es la distancia (usual) que separa los puntos marcados 1 y $t$ y si $d'$ es la distancia que separa los puntos marcados 1 y $t'$ la distancia que separa los puntos marcados 1 y $tt'$ es $d + d'$. Este principio se emplea para la fabricación de reglas de cálculo, para ciertas representaciones gráficas, etc.




*Escala logarítmica de los tiempos en millares de años.*

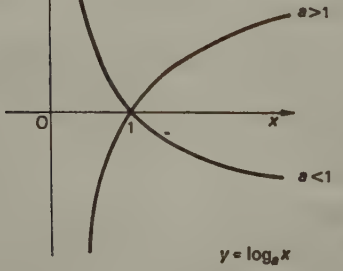
• *Espiral logarítmica.* — Curva plana de ecuación polar $\rho = e^{m\theta}$, donde $m$ es

un número real no nulo. Admite el polo O como punto asíntota. Si rueda sin deslizarse sobre una recta, su punto asintótico describe una recta. También se llama espiral equiángula, o espiral de Bernoulli (Jacques I) (véase esa palabra).




## Logaritmo

• *Logaritmo de base a.* — Si $a$ es un real estrictamente positivo y diferente de 1, la función $x \mapsto a^x$ es un isomorfismo del grupo aditivo de los números reales en el grupo multiplicativo de los reales estrictamente positivos. Su isomorfismo recíproco, que a todo número real $y > 0$ asocia $x$ tal que $y = a^x$ se denomina logaritmo de base $a$ y se representa por $\log_a$. Tenemos, por tanto, $x = \log_a y$ si y solamente si $y = a^x$ y las fórmulas: $\log_a a^x = a^{\log_a x} = x$; $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a(1/x) = -\log_a x$. El logaritmo se llama decimal si $a = 10$ (se escribe $\log x$ por $\log_{10} x$) y neperiano si $a = e$ (se escribe $\operatorname{Log} x$ por $\log_e x$). El primero se emplea a menudo en los cálculos numéricos, mientras que el segundo es una de las funciones fundamentales de las matemáticas. V. Briggs, Característica, Complejo, Decimal, Integral, Mantisa, Módulo, Natural, Neperiano, Vulgar.




## Lógica

La lógica matemática difiere de la lógica formal filosófica. Ciencia de la demostración, la lógica matemática consiste sobre todo en el estudio de las relaciones formales que existen entre las proposiciones (cálculo proposicional) independientemente de toda interpretación que podría darse de ella o de los valores de verdad que se le puedan atribuir. El cálculo proposicional puede

ser definido axiomáticamente como nosotros hacemos aquí (V. PROPOSICIONAL) o estudiado algebraicamente como aplicación de la teoría de las álgebras de Boole. La lógica de los predicados (o cálculos de predicados) «prolonga» el cálculo proposicional introduciendo variables y estudiando la naturaleza profunda de las proposiciones; constituye una herramienta importante para el rigor del razonamiento matemático.
En la actualidad, la lógica se desarrolla apelando a herramientas poderosas y recientes: teorema de la completitud, decidibilidad, *forcing*, recursividad, análisis no estándar, etc., en estrecha relación con los problemas de los fundamentos de las matemáticas y la metamatemática.

• *Adición lógica.* — A veces, la adición en un álgebra de Boole se llama adición lógica.

• *Equivalencia lógica.* — V. EQUIVALENCIA.

## Logística

Arte de contar. En la Antigüedad, la logística era sinónimo de Aritmética. Antiguamente se tomó con frecuencia el sentido de «lógica matemática».

## Log-normal

• *Ley log-normal.* — Sea Y una variable aleatoria normal. La ley de probabilidad de la variable aleatoria $X = e^Y$ se denomina ley log-normal. Su densidad de probabilidad es definida por $f(x) = 0$ para $x \leqslant 0$ y:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[ -\frac{(\operatorname{Log} x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right] \quad \text{para } x > 0.$$

Tenemos $E[X] = e^{\mu+\sigma^2/2}$ y $V[X] = (e^{\sigma^2}-1)(e^{2\mu+\sigma^2})$.
La repartición de los diámetros de los granos de un producto obtenido por trituración obedece generalmente a una ley log-normal.

## Longitud

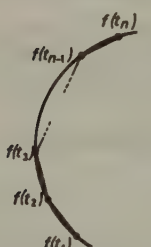
V. ESFÉRICAS (Coordenadas).

## Longitud

• *Longitud de un arco parametrado* $(\mathbf{I}, f)$ *de* $\mathbf{R}^3$, *donde f es una función definida y continua sobre el intervalo cerrado* $\mathbf{I}$ *de* $\mathbf{R}$ *de valores en* $\mathbf{R}^3$. — Sea $\mathscr{P}$ el conjunto de sucesiones finitas crecientes de números reales de $\mathbf{I}$ y sea $\lambda(p)$ la longitud de la línea poligonal $f(t_1)\, f(t_2) \ldots f(t_n)$, donde $p = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un elemento de $\mathscr{P}$. Si el límite superior de los números reales $\lambda(p)$ cuando $p$ describe $\mathscr{P}$ es un número finito L, se dice que el arco es rectificable y que L es su longitud. Si la representación paramétrica del arco $f: t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ es tal que las funciones $x$, $y$, $z$ son derivables sobre $\mathbf{I} = [\![a, b]\!]$ y si la función

$t \mapsto \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ es integrable sobre **I**, entonces el arco es rectificable y

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$




V. CURVILÍNEA (Abscisa).

• *Longitud de una cadena (resp. de un camino, de un ciclo, de un circuito, de un grafo).* — Número de arcos que componen la cadena (resp. el camino, el ciclo, el circuito).

• *Longitud de una cadena* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ *en un conjunto ordenado.* — El entero $n$.

• *Longitud de un intervalo acotado de* **R**. — Distancia $d = |b - a|$ entre los extremos $a$ y $b$ del intervalo.

• *Longitud de un rectángulo.* — V. ANCHURA.

• *Longitud de un segmento* AB. — Distancia entre sus extremidades A y B.

• *Longitud de una sucesión finita indexada por* **I**. — Número de elementos de **I**.

## Longitudinal

• *Aceleración longitudinal.* — Sinónimo de aceleración tangencial. V. TANGENCIAL.

## Lorentz, Henrik Antoon (1853-1928)

• *Forma de Lorentz.* — Forma bilineal simétrica sobre $\mathbf{R}^4$ definida por:

$$f(x, y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 - c\alpha_4\beta_4$$

donde $c$ es un número real estrictamente positivo, $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ e $y = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$. Esta forma interviene en la teoría de la relatividad.

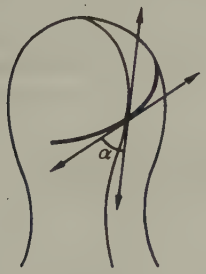
• *Grupo de Lorentz.* — Sub-grupo del grupo de los automorfismos de la forma de Lorentz, constituido por los automorfismos $u$ de determinante 1 tales que el conjunto de los vectores $(x, y, z, t)$ de $\mathbf{R}^4$ que verifican $t > 0$ sea estable por $u$.

## Löwenheim, Leopold (1878-1940)

• (Lógica.). — *Teorema de Löwenheim-Skolem.* — Toda teoría del primer orden que admite un modelo admite un modelo numerable.

## Loxodromía

• *Loxodromía de una superficie de revolución.* — Curva de la superficie que corta todos los meridianos siguiendo un ángulo de medida constante a $\alpha$. Si $\alpha$ no es nulo, tal curva corta igualmente todos los paralelos siguiendo un ángulo de medida constante. Una hélice circular es una loxodromía del cilindro de revolución. Los círculos de Villarceau son loxodromías del toro. Estas curvas intervienen con frecuencia en navegación.




## Lucas, Edouard (1842-1891)

• *Criterio de Lucas.* — Da una condición necesaria y suficiente para que un número de Mersenne $M_q$ sea primo: $M_q$ es primo si y solamente si $M_q$ divide $W_q$, donde $W_q$ es el $q$-ésimo término de la sucesión definida por $W_2 = -4$ y $W_{n+1} = W_n^2 - 2$ para $n \geqslant 3$ (sus primeros términos son $-4$, 14, 194, 37.634, ...). Este criterio permitió el descubrimiento por Lucas en 1876 del número primo $2^{127} - 1$ que se escribe con 39 cifras, y, más recientemente, gracias al ordenador, del número de Tuckermann.

V. MERSENNE, TUCKERMANN.

## Lugar

V. GEOMÉTRICO.

## Lukasiewicz, Jan (1878-1956)

• *Notación de Lukasiewicz.* — V. POLACA.

## Lúnulas

V. HIPÓCRATES.

## Luz

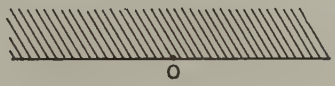
• *Cono de luz.* — Cono isótropo para la forma de Lorentz.

# LL

## Llano

• *Angulo llano.* — Unico ángulo $\bar{\omega}$ del grupo de los ángulos del plano euclídeo tal que $2\,\bar{\omega} = 0$. Su coseno es igual a $-1$. Cualquiera que sea la orientación del plano, su seno es nulo y su medida principal en radianes es $\pi$. El ángulo de un par de dos semirrectas opuestas es llano.

• *Sector angular llano.* — Sector angular en el que los lados son dos semirrectas opuestas.




## Llegada

• *Conjunto de llegada de una aplicación.* — Sinónimo de conjunto final.

## Llena

• *Parte llena de un conjunto* E. — Nombre dado a E para expresar que es la parte más grande de sí mismo por inclusión.

## Lleno

• *Functor lleno.* — Un functor F de una categoría $\mathscr{C}$ en una categoría $\mathscr{D}$ se dice lleno si para todo par (X, Y) de objetos de $\mathscr{C}$, la aplicación $f \mapsto F(f)$ de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$ es suprayectiva.
V. FIEL.

# M

## M

V. MÓDULO.

## Machin, John (1680-1751)

• *Fórmula de Machin.* — Permite obtener buenas aproximaciones de $\pi$ utilizando el desarrollo en serie entera de Arc tg:

$$\pi = 16 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

## Mac Laurin, Colin (1698-1746)

• *Fórmula de Mac Laurin con resto de Lagrange.* — Si las $n$ primeras derivadas de una función numérica $f$ existen y son continuas sobre un intervalo cerrado $[\![0, h]\!]$ de $\mathbf{R}$ y si $f^{(n+1)}$ existe en el intervalo $]\!]0, h[\!]$ entonces existe un número real $c \in ]\!]0, h[\!]$ tal que:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

El número $\mathbf{R} = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ se denomina resto de Lagrange. Si $f^{(n+1)}$ es continua sobre $[\![0, h]\!]$, puede escribirse:

$$\mathbf{R} = \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

• *Fórmula de Mac Laurin con resto de Young.* — Si $f$ es una función numérica definida en un intervalo I de $\mathbf{R}$ que contiene origen y si las $n$ primeras derivadas de $f$ existen en 0, entonces para todo $x$ que pertenezca a I:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \varepsilon(x) \cdot x^n$$

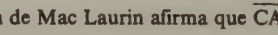
donde $\varepsilon$ es una función, llamada resto de Young, tal que $\varepsilon(x)$ tiende hacia 0 cuando $x$ tiende hacia 0.

• *Fórmula de Mac Laurin para un polinomio* P *de grado n en una indeterminada y de coeficientes reales o complejos.* — Afirma que:

$$P(x) = P(0) + \frac{x}{1!}P'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}P^{(n)}(0).$$

• *Fórmulas de Euler-Mac Laurin.* — V. EULER.

• *Relación de Mac Laurin.* — Dada una división armónica (A, B, C, D), la relación de Mac Laurin afirma que $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot (\overline{CA} + \overline{CB}) = \overline{CD} \cdot \overline{CI}$, donde I es el punto medio de AB.

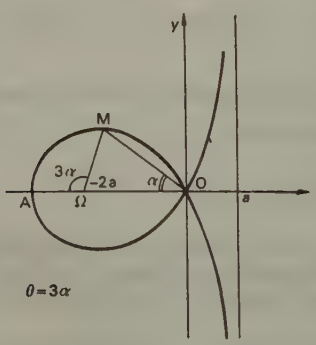



• *Serie de Mac Laurin.* — Sea $f$ una función numérica definida en un entorno de 0 e indefinidamente derivable en 0. La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ se denomina serie de Mac Laurin de $f$. Si $f$ es analítico en 0, existe un intervalo abierto que contiene 0 tal que para todo $x \in I$ la serie de Mac Laurin de $f$ converge hacia $f(x)$.

• *Trisectriz de Mac Laurin.* — Cúbica de ecuación cartesiana:

$$(x - a)y^2 + x^2(3a + x) = 0.$$

Sean $\Omega$ el punto de coordenadas $(-2a, 0)$ y A el punto de la curva de coordenadas $(-3a, 0)$. Para todo punto M de la curva, $\widehat{A\Omega M} = 3\widehat{AOM}$, puede ser, por tanto, utilizada para la trisección de un ángulo, de ahí su nombre. Por relación al sistema de referencias $(\Omega, \Omega x)$ de coordenadas polares, su ecuación polar es $\rho \cos\frac{\theta}{3} = -a$. Su inversa con relación al polo $\Omega$ es un caracol de Pascal.




## Mágico

• *Cuadrado mágico de orden n.* — Cuadro cuadrado de números de $n$ líneas y $n$ columnas en el que están colocados todos los números de 1 a $n^2$ de manera

que la suma S de los números que figuran sobre una misma línea o una misma columna sea constante. Fermat era particularmente hábil en la búsqueda de cuadrados mágicos que tuvieron gran interés en el siglo XVIII. Para ciertos cuadrados mágicos, cada diagonal es tal que la suma de sus números es también igual a la suma S. Existen 8 cuadrados mágicos de orden 3.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 | → 34 |
| 12 | 6 | 7 | 9 | → 34 |
| 8 | 10 | 11 | 5 | → 34 |
| 13 | 3 | 2 | 16 | → 34 |
| ↓ 34 | ↓ 34 | ↓ 34 | ↓ 34 | ↘ 34 |

Cuadrado mágico de orden 4.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 27 | 29 | 2 | 4 | 13 | 36 |
| 9 | 11 | 20 | 22 | 31 | 18 |
| 32 | 25 | 7 | 3 | 21 | 23 |
| 14 | 16 | 34 | 30 | 12 | 5 |
| 28 | 6 | 15 | 17 | 26 | 19 |
| 1 | 24 | 33 | 35 | 8 | 10 |

Cuadrado mágico de orden 6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 39 | 53 | 59 | 42 |
| 57 | 44 | 45 | 47 |
| 46 | 55 | 49 | 43 |
| 51 | 41 | 40 | 61 |

Por extensión, también se llama cuadrado mágico de los cuadros cuadrados como el de la figura adjunta debida al calculador Wim Klein.

• *Cubos mágicos.* — La noción de cuadrado mágico se generaliza en el espacio; se definen los cubos mágicos. El dado tradicional es un cubo mágico de orden 1 y el único. No existe evidentemente cubo mágico de orden 2. Se puede demostrar que no existe cubo mágico de órdenes 3 y 4. Se ignora si existen cubos mágicos de órdenes 5, 6 ó 7. Se conocen cubos mágicos de orden 8.

## Magma

Par (E, *), donde E es un conjunto y * una ley de composición interna sobre E. Si la * es asociativa (resp. conmutativa), el magma se llama asociativo (resp. conmutativo) (V. UNITARIO).

## Mahler, Kurt (1903-1988)

• *Número de Mahler.* — Número trascendente 0,1234567891011121314... Este número (y otros del mismo tipo construidos por Mahler) es un ejemplo explícito de número trascendente que no sea un número de Liouville.

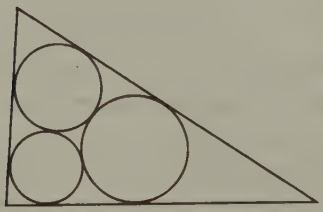
• *Teorema de Mahler.* — Concierne a las aproximaciones diofantianas del número $\pi$: para todo número racional $m/n$ con $n \geqslant 2$, tenemos $\left|\pi - \frac{m}{n}\right| > n^{-21}$

## Mal

• *Estimador mal centrado.* — V. CENTRADO.

## Malfatti, Giovanni Francesco (1731-1807)

• *Problema de Malfatti.* — Inscribir en un triángulo tres círculos tangentes entre sí dos a dos y tangentes cada uno a dos lados del triángulo.



## Mangolt

V. VON MANGOLT.

## Mantisa

• *Mantisa del logaritmo decimal* $\log x$, *donde* $x$ *es un real estrictamente positivo.* — Número real $m$ tal que $0 \leqslant m < 1$ definido por $m = (\log x) - C$, donde C es la característica de $\log x$. Para todo entero racional $k$, los números $\log x$ y $\log(10^k x)$ tienen igual mantisa.

## Mapa

• *Mapa de dimensión n sobre un conjunto* X. — Para $C = (U, \varphi)$, donde $\varphi$ es una biyección de una parte U de X sobre un abierto de $\mathbf{R}^n$. Se dice que U es el dominio del mapa C.

• *Mapa de una variedad diferencial.* — V. DIFERENCIAL.

## Mapas

• *Aplicación «cambio de mapas».* — V. COMPATIBLES.

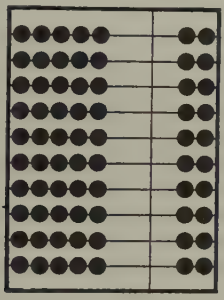
• *Mapas compatibles.* — V. COMPATIBLES.

## Máquina

• *Máquina de Turing.* — V. TURING.

## Marcador

Abaco constituido de varillas a lo largo de las cuales pueden deslizarse unas bolas. Todavía se utiliza en la actualidad en Asia el *swan-pan* (marcador chino) y el *soroban* (marcador japonés).



*Swan-pan*

*Soroban*

## Marginales

• *Leyes marginales.* — Sean X e Y dos variables aleatorias discretas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, y sea $p$ la ley conjunta de X e Y. Las leyes de las variables X e Y se llaman leyes marginales de la ley $p$. La ley marginal de X está determinada por la distribución $f$ de X definida sobre $X(\Omega)$ por $f(x_i) = P(X^{-1}\{x_i\})$. Igualmente, la ley marginal de Y está determinada por la distribución $g$ de Y, definida sobre $Y(\Omega)$ por $g(y_i) = P(X^{-1}\{y_j\})$. Se suele simbolizar por $p_{i.} = f(x_i)$ y $p_{.j} = g(y_j)$. Si X e Y son independientes, el número $p(x_i, y_j)$, simbolizado por $p_{ij}$ es igual a $p_{i.} \times p_{.j}$.
V. CONJUNTA (Ley).

## Marienbad

• *Juego de Marienbad.* — V. NIM.

## Markov, Andreï Andreïevitch (1856-1922)

• *Cadena de Markov.* — Sucesión $X_1, X_2, ..., X_n...$ de variables aleatorias tales que la ley $X_n$ depende únicamente de $X_{n-1}$. Esta noción se aplica a dominios muy variados que van desde la astronomía a la literatura. El propio Markov hizo la primera aplicación de este género a la obra de Pushkin: *Eugenio Oneguin.*

• *Desigualdad de Markov.* — Sea E[X] la esperanza matemática de una variable aleatoria X. La desigualdad de Markov afirma que para todo número real $k > 0$, la probabilidad para que X tome un valor superior a $k$ . E[X] es inferior a $1/k$. Se escribe $P(X \geqslant k \,.\, E[X]) \leqslant \frac{1}{k}$.

• *Teorema de Markov-Post.* — El problema de las palabras no admite solución (1947).
V. PALABRAS (Problema de las).

## Más

• *Más fino.* — V. FINO, FINA.

• *Elemento más grande.* — V. GRANDE.

• *Más infinito.* — V. INFINITO.

• *Elemento más pequeño.* — V. PEQUEÑO.

• *Signo más.* — Símbolo «+» utilizado, en particular, para denotar una suma.

## Mascheroni, Lorenzo (1750-1800)

• *Constante de Mascheroni.* — Nombre dado antiguamente a la constante de Euler.

• *Problema de Napoleón-Mascheroni.* — V. NAPOLEÓN.

• *Teorema de Mohr-Mascheroni.* — V. MOHR.

## Más menos

• *Aproximación a ε más menos.* — V. APROXIMACIÓN.

## Matemática

• *Economía matemática.* — Dominio reciente de las matemáticas, que engloba la econometría y trata de proporcionar modelos dinámicos para la economía. Sus progresos están estrechamente unidos a los de la teoría de los juegos y utiliza tanto la teoría de la medida como la topología.

• *Esperanza matemática de una variable aleatoria* X *(o valor medio).* — Momento de orden 1, si existe, de esa variable; se lo simboliza por E[X] o $\overline{X}$. V. MOMENTO.

• *Información matemática.* — V. INFORMACIÓN.

## Matemáticas, Matemática

¿Matemáticas o Matemática? Desde el punto de vista de este diccionario, los dos sin ninguna duda, las matemáticas que representan una reunión de aspectos locales, la matemática que se funda sobre la creencia o la hipótesis de que existe un aspecto global.

Uno puede sentirse seducido por la célebre definición de Bertrand Russell: «Una ciencia en la que nunca se sabe de qué se habla, ni si lo que se dice es verdadero». Pero, en realidad, se sabe bien de lo que se habla: de relaciones, de estructuras, y uno espera que lo que se dice no sea contradictorio (las matemáticas aplicadas pretenden, además, más allá de la coherencia interna, proporcionar medios para acercar mejor la realidad a las demás ciencias y aumentar el campo y la eficacia de las técnicas). Finalmente, la tesis de Henri Poincaré: «dar el mismo nombre a cosas diferentes», si no basta para que pueda ser propuesta como definición de las matemáticas, ilustra uno de sus mecanismos más importantes por su fecundidad.

Las matemáticas se constituyeron y modelaron bajo la acción de tres fuerzas dispares que jamás han dejado de estar actuando y son indudablemente características del *Homo Sapiens*. La primera es el estudio de la naturaleza y la búsqueda de mejores medios de sacar partido de ella. La segunda se refiere a las relaciones que se derivan de esas investigaciones. La tercera es una sensibilidad estética desinteresada. El sorprendente logro de las matemáticas proviene sin duda del hecho de que, a pesar de las diferencias que separan las dos primeras tendencias, curiosamente y bastante a menudo ocurre que coinciden, a veces incluso se refuerzan mutuamente. Ahora bien, que procedan de los choques con el mundo exterior (del que el psiquismo humano forma parte si su estudio es conducido objetivamente) o de los desafíos que el pensamiento se lanza a sí mismo, ésos son problemas que aseguran la vitalidad de las matemáticas y las constriñen al progreso, y especialmente de los problemas que podrían calificarse, sin connotación peyorativa, de artificiales en el sentido de que son derivados —por simple gusto de juego o de curiosidad— de aquéllos que la necesidad había impuesto.

Así han nacido, ignorando cada una a la otra cuando estaban en la cuna, las dos grandes disciplinas tradicionales sobre cuyo humus se han desarrollado todas las matemáticas: la aritmética (que comprende el cálculo sobre los números) y la geometría (que comprende las técnicas de dibujo de las figuras simples). Debían ser reunidas por disciplinas ya mixtas como el álgebra (en el sentido de teoría de las ecuaciones), la teoría de las funciones, el análisis y, mucho más tarde, el cálculo de probabilidades.

Dos características debían contribuir a dar a las matemáticas una fisonomía que, con el tiempo, no ha hecho más que reforzarse. Por un lado, el paso de la aproximación intuitiva, empírica, en estrecho contacto con lo concreto, que marca sus inicios, a un tratamiento riguroso y deductivo sólo conveniente para temas de reflexión cada vez más abstractos. Por otro lado, el descubrimiento de sorprendentes similitudes entre regiones en apariencia muy disímiles de los dominios explorados. Por ejemplo, las relaciones aritméticas notables que surgen en el estudio de las figuras geométricas elementales, luego una estrecha correspondencia entre la lista de las coordenadas de los puntos de esas figuras y sus propiedades globales, correspondencia afinada por la introducción de la noción de infinitamente pequeño.

El número creciente de estas pasarelas, a veces entrecruzadas, hacía presentir una unidad subyacente tras la multiplicidad original. El advenimiento de la teoría de los conjuntos (ampliada por la teoría de las clases) y de la teoría de las categorías sacó a la luz esta unidad y permitió derivar relaciones y estructuras fundamentales muy generales (leyes o reglas de composición, de orden, combinatorias, topológicas) cuyas asociaciones apuntaban a reconstituir los capítulos tradicionales, a hacer nacer otros nuevos y a hacer perder la S del plural a la palabra Matemáticas.

Pero, al mismo tiempo que podían aparecer a punto de alcanzar la tierra prometida de la unidad, la toma de conciencia, por una lógica matemática renovada y algebrizada, de la naturaleza hipotético-deductiva de la matemática invitaba a construir, a partir de axiomáticas diferentes, otras geometrías, otras aritméticas, otras teorías de conjuntos (o de clases). Así, pero en un sentido muy diferente, la palabra Matemática podía reclamar de nuevo la S del plural. Las relaciones de subordinación de la Matemática y de la Lógica suscitan todavía además la discusión (pero es un debate que la mayoría de los matemáticos y sobre todo de los usuarios de las matemáticas parece no tener en cuenta) según que se considere la matemática como una rama de la Lógica —incluso, en última instancia, como una sintaxis sin semántica— o la Lógica como una rama de la Matemática, o estas dos disciplinas como independientes aunque, evidentemente, muy relacionadas debido a su carácter altamente formalizable.

En la actualidad, con S o sin ella, la (o las) Matemática(s), al tiempo que contribuyen con eficacia a los progresos de las ciencias experimentales y de las aplicaciones técnicas, manifiesta siempre una vitalidad que sabe enriquecerse con las dificultades que encuentra, bien tratando de pegarse al mundo exterior o dirigiéndose sobre los obstáculos que ella misma se forja, y (aunque su no-contradicción no parece demostrable al menos a partir de sus fundamentos) atestigua al mismo tiempo una fuerza interna que tiende a mantener, a reforzar incluso, su unidad o al menos su solidez ante las amenazas de explosión.

F. LL.

## Mathieu, Emile Léonard (1835-1890)

• *Ecuación de Mathieu.* — Ecuación diferencial de la forma:

$$y''(t) + [\lambda - 2h^2 \cos 2t]\, y(t) = 0,$$

caso particular de la ecuación de Hill.

• *Funciones de Mathieu.* — Soluciones de la ecuación de Mathieu.

• *Grupos de Mathieu.* — Grupos simples finitos no conmutativos, en número de cinco, descubiertos por Mathieu en 1860. Estos grupos que no entraban en la clasificación de los grupos simples ya conocidos fueron el punto de partida del estudio de los grupos esporádicos. El primer grupo de Mathieu (el grupo esporádico más pequeño) es de orden 7.920; el quinto es de orden $\simeq 2{,}45 \cdot 10^8$. V. ESPORÁDICOS.

## Matjasevich, Juri Vladimirovic

• *Teorema de Matjasevich.* — Aporta una respuesta negativa al décimo problema de Hilbert: no es posible tener un algoritmo para decidir si una ecuación diofantiana cualquiera, posee o no una solución. Su demostración utiliza desarrollos recientes de la lógica matemática.
V. CHOODNOVSKY.

## Matrices

V. COGRADIENTES, CONGRUENTES, EQUIVALENTES, SEMEJANTES.

• *Matrices conjugadas.* — V. CONJUGADA.

• *Anillo (resp. álgebra) de matrices cuadradas.* — Sea $M_n(K)$ el conjunto de las matrices $(n, n)$, llamadas también matrices cuadradas de orden $n$, de elementos en un cuerpo K. Provisto de la adición y de la multiplicación de matrices, $M_n(K)$ es un anillo unitario; sus elementos inversibles son las matrices cuyo determinante es no nulo. Provisto de las dos leyes precedentes y de la multiplicación de una matriz por un escalar, $M_n(K)$ es un K-álgebra.

• *Producto de dos matrices.* — V. PRODUCTO.

• *Suma de dos matrices.* — V. SUMA.

## Matricial

• *Cálculo matricial.* — Conjunto de los métodos y de las reglas de cálculo que hacen intervenir a las matrices. Es una rama del álgebra lineal.

## Matriz

Sean $n$ y $p$ dos enteros naturales no nulos y los conjuntos $I = \{1, 2, ..., n\}$ y $J = \{1, 2, ..., p\}$. Se llama matriz de $n$ filas y $p$ columnas de elementos en un cuerpo conmutativo K o matriz $(n, p)$ a una aplicación M de $I \times J$ en K. La imagen del par $(i, j)$ se simboliza por $\alpha_{ij}$ y se llama un elemento de la matriz M. Se suele definir una matriz por la lista de sus elementos dispuestos en forma de tabla:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ip} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{np} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij})_{(i,j) \in I \times J}.$$

Para todo $i \in \mathbf{I}$, la $p$-upla $(\alpha_{i1}, ..., \alpha_{ip})$ se llama la $i$-ésima fila de la matriz y para todo $j \in \mathbf{J}$, la $n$-upla $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, ..., \alpha_{nj})$ se llama la $j$-ésima columna de la matriz. Introducida hacia 1850 por Sylvester, la noción de matriz, cuya teoría ha sido desarrollada por Hamilton y Cayley, es una herramienta eficaz en álgebra lineal y en matemáticas aplicadas.

V. ADJUNTA, ANTIHERMITIANA, CARACTERÍSTICA, COMPLEJA, COMPLEJO, CONJUGADA, CONTRAGRADIENTE, CUADRADA, DE PASO, DETERMINANTE, DIAGONAL, DIAGONALIZABLE, DIAGONALIZACIÓN, ESCALAR, ESPECTRO, GRAM, HERMITIANA, JACOBIANA, JORDAN, MINIMAL (Polinomio), NULA, ORTOGONAL, PROPIO (Valor), RANGO, REAL, REGULAR, ROTACIÓN, SIMÉTRICA, SINGULAR, TRANSPUESTA, TRAZA, TRIANGULAR, TRIANGULARIZABLE, UNIDAD, UNIMODULAR, UNITARIO.

• *Matriz asociada a una aplicación lineal.* — Sean E y F dos K-espacios vectoriales de dimensiones respectivas $p \geqslant 1$ y $n \geqslant 1$; sean $\mathrm{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ y $\mathrm{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ bases de E y F y sea $f$ una aplicación lineal de E hacia F. Para todo elemento $j \in \{1, ..., p\}$ tenemos:

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\varepsilon_i \text{ con } \alpha_{ij} \in \mathrm{K}.$$

La matriz $(n, p)$ definida por $\mathrm{M} = (\alpha_{ij})$ se denomina matriz asociada a $f$ relativa a las bases B y B'. Se la representa por $\mathrm{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(f)$.

• *Matriz asociada a un endomorfismo f de un espacio vectorial* E *sobre* K *relativa a una base* B *de* E. — Matriz asociada a la aplicación lineal $f$ de E en E relativa a la base B considerada de E.

• *Matriz asociada a una forma bilineal o sesquilineal.* — Sean E y F dos K-espacios vectoriales, de dimensiones finitas y que admiten por bases:

$$\mathrm{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ y } \mathrm{B}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p\}.$$

Sea $f$ una forma bilineal o sesquilineal $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. La matriz $(\alpha_{ij})$, donde $\alpha_{ij} = f(e_i, \varepsilon_j)$ es una matriz $(n, p)$ llamada matriz asociada a $f$ relativa a las bases B y B'. Se la simboliza por $\mathrm{M}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'}(f)$.

• *Matriz asociada a un grafo de orden n.* — Matriz cuadrada de orden $n$ cuyo elemento $\alpha_{ij}$ es la multiplicidad del par de vértices $(x_i, x_j)$.

• *Matriz columna.* — Matriz $(n, 1)$.

• *Matriz fila.* — Matriz $(1, p)$.

• *Matriz de paso.* — V. PASO.

• *Producto de una matriz por un escalar.* — V. PRODUCTO.

• *Matriz de Sylvester.* — V. RESULTADO de dos polinomios.

• *Vector columna de una matriz.* — Sinónimo de columna de la matriz.

• *Vector fila de una matriz.* — Sinónimo de línea de la matriz.

## Matroide

Se denomina matroide un par $(\mathrm{E}, \mathscr{S})$, donde E es un conjunto finito y $\mathscr{S}$ un conjunto no vacío de partes de E que verifican los axiomas:

$I_1$: todo singleton de E pertenece a $\mathscr{S}$.
$I_2$: cualquiera que sea $X \in \mathscr{S}$, toda parte Y no vacía de E contenida en X pertenece a $\mathscr{S}$.
$I_3$: para toda parte A de E, si X e Y son dos elementos de $\mathscr{S}$ contenidos en A y maximales con esas propiedades, entonces Card X = Card Y.
Se encuentran otras definiciones ligeramente diferentes de un matroide. En algunas, el axioma $I_1$ no es exigido y se conviene que $\phi \in \mathscr{S}$; tales matroides también se llaman pregeometrías. En otras definiciones se exige, además de los axiomas $I_1$, $I_2$, $I_3$ que todo par de E pertenezca a $\mathscr{S}$; tales matroides también se llaman geometrías combinatorias. La teoría de los matroides, introducida por Withney en 1935, conoce actualmente un rápido desarrollo. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo K, E un subconjunto finito de vectores no nulos de V y $\mathscr{S}$ el conjunto de las partes libres de E, el par $(E, \mathscr{S})$ es un matroide asociado a la independencia lineal. Puede asociarse una estructura de matroide a otras nociones y muy diversas tales como la independencia algebraica, los ciclos de un grafo, las particiones de un conjunto, etc.

V. Base, Circuito, Dependiente, Estigma, Independiente, Rango.

## Maupertuis, Pierre Louis Moreau de (1698-1759)

● *Acción de Maupertuis.* — Dado el movimiento de un punto material de masa *m* en un campo de fuerzas, a lo largo de un arco de trayectoria $\Gamma$ de extremos A y B, la integral curvilínea

$$\mathscr{A} = \int_{\Gamma} m \, \vec{v} \cdot d \, \vec{s}$$

donde $\vec{v}$ es el vector-velocidad del punto, se denomina acción de Maupertuis o acción maupertuisiana. El principio de menor acción de Maupertuis afirma que la cantidad $\mathscr{A}$ es minimal con relación a todos los movimientos próximos que pasan por A y B en los mismos instantes y que poseen la misma energía que el movimiento real. A la recíproca, esta condición de acción mínimal permite determinar perfectamente el movimiento.
V. Hamiltoniana.

## Maupertuisiana

● *Acción maupertuisiana.* — V. Maupertuis.

## Maximal

● *Arbol maximal.* — Dado un grafo G, un árbol maximal de G es un elemento maximal del conjunto (ordenado por inclusión) de los sub-grafos de G que son árboles.

● *Elemento maximal de un conjunto ordenado* E. — Un elemento *a* de E se denomina maximal si no existe en E elemento alguno que le sea estrictamente

superior. Si E admite un elemento $a$ mayor, entonces $a$ es el único elemento maximal de E.

• *Ideal maximal de un anillo* A. — Ideal maximal en el conjunto ordenado por inclusión de los ideales de A distintos de A. En Z, los ideales maximales son los ideales $p\mathbf{Z}$ con $p > 0$ entero primo.

• *Espectro maximal de un anillo conmutativo unitario* A. — Conjunto de los ideales maximales de ese anillo; según el teorema de los ceros de Hilbert, la aplicación $(a_1, ..., a_n) \mapsto (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ es una biyección de $\mathbf{C}^n$ sobre el espectro maximal de $\mathbf{C}[X_1, ..., X_n]$.
V. HILBERT.

## Maximorum

• *Maximorum de una función numérica.* — El mayor de sus máximos relativos.

## Maximum

• *Maximum de una función numérica f definida sobre un conjunto* E. — Se dice que $f$ admite un maximum M en un punto $a$ de E si $M = f(a)$ y si $f(x)$ es inferior a $f(a)$ para todo $x \in E$. El número real M es el maximum de Im $f$.
V. ABSOLUTO, RELATIVO.

• *Maximum o elemento maximum de un conjunto ordenado.* — Sinónimo de mayor elemento de ese conjunto.
V. GRANDE.

• *Método del maximum de máxima verosimilitud.* — V. VEROSIMILITUD.

• *Principio del maximum.* — V. CAUCHY (Teoremas de).

## Maxtérmino

• *Maxtérmino de orden n sobre un álgebra de Boole* $(E, +, ., f)$. — Función de Boole de $n$ variables $k:(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto k(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $k(x_1, x_2, ..., x_n)$ tenga por expresión una suma de $n$ términos tomado cada uno de ellos en uno de los pares $\{x_1, \bar{x}_1\}, ..., \{x_n, \bar{x}_n\}$. Por ejemplo, $k$ de $E^3$ en E definida por:

$$(x, y, z) \mapsto \bar{x} + y + z$$

es un maxtérmino de orden 3.

## Mayor

• *Arco mayor.* — V. MENOR.

## Mayorada

• *Función mayorada con valores en un conjunto ordenado* E. — Función que admite un mayorante. Por ejemplo, una sucesión es mayorada si el conjunto de sus términos está mayorado.

• *Parte mayorada de un conjunto ordenado* E. — Parte de E que admite un mayorante.

## Mayorante

• *Mayorante de una función de valores en un conjunto ordenado* E. — Mayorante del conjunto imagen de *f*. Por ejemplo, si *f* es una sucesión, un mayorante de *f* es un mayorante del conjunto de los términos de la sucesión.

• *Mayorante de una parte* A *de un conjunto ordenado* E. — Elemento *a* de E superior a todos los elementos de A. Todo elemento de *b* de E superior a *a* es también un mayorante de A.

## MCD

• MCD *de dos elementos a y b de un anillo* A. — Divisor de *a* y *b* múltiplo de cualquier otro divisor común de *a* y *b*. Si A es un anillo principal (ej.: Z o K[X]) y *d* un MDC de *a* y *b*, existe $(u, v) \in A^2$ tal que $d = au + bv$ (V. Bezout). En el anillo de los enteros Z (o en N) dos enteros *a* y *b* no nulos admiten un sólo MCD positivo notado MCD (*a*, *b*), producto de los factores primos comunes a *a* y *b* afectados por el menor de los dos exponentes que figuran en las descomposiciones de *a* y *b*. Por ejemplo, si:

$$80 = 2^4 \cdot 5 \text{ y } -300 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2,$$

se tiene MCD $(80, -300) = 2^2 \cdot 5 = 20$. Si *a* y *b* son positivos:

$$\text{MCD } (a, b) \cdot \text{MCM } (a, b) = a \cdot b$$

• *MCD de n elementos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de un anillo A.* — Elemento de A definido por recurrencia e igual al MCD de $a_n$ y del MCD de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$:

$$\text{MCD } (a_1, \ldots, a_n) = \text{MCD } (\text{MCD}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

## MCM

• MCM *de dos elementos a y b de un anillo* A. — Múltiplo *m* de *a* y *b*, divisor de cualquier otro múltiplo común a *a* y *b*. En el anillo de los enteros Z(o en N), dos enteros *a* y *b* no nulos admiten un sólo MCM positivo notado MCM(*a*, *b*), producto de los factores primos de *a* o de *b*, afectados cada uno de ellos por el mayor de los dos exponentes que figuran en las descomposiciones de *a* y *b*. Por ejemplo:

si $80 = 2^4 \cdot 5$ y $-300 = (-1) \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, se tiene:

$$\text{MCM } (80, -300) = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3 = 1200$$

Si $a$ y $b$ son positivos: $\text{MCD}(a, b) \cdot \text{MCM}(a, b) = a \cdot b$.

• MCM *de n elementos* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de un anillo* A. — Elemento de A definido por recurrencia e igual al MCM de $a_n$ y del MCM de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$

$$\text{MCM}(a_1, \ldots, a_n) = \text{MCM}(\text{MCM}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

## Mecánica (racional)

Ciencia del movimiento y del equilibrio de los cuerpos. Se la divide tradicionalmente en tres ramas:

— la cinemática, rama esencialmente matemática, que trata el estudio del movimiento desde un punto de vista espacial y temporal sin interesarse por sus causas ni por la naturaleza del móvil;
— la dinámica, que estudia el movimiento en relación con sus causas e introduce la noción de fuerza;
— la estadística, que trata el caso particular del equilibrio.

Según la naturaleza del móvil o las necesidades de la técnica, se distinguen numerosas subdivisiones (mecánica del punto material, del sólido, de los medios continuos, mecánica celeste, mecánica del vuelo, etc.). La mecánica racional clásica, fundada por Galileo a finales del siglo XVI y generalizada por Newton un siglo más tarde, ha permitido explicar numerosos movimientos. V. ANALÍTICA, HAMILTON, LAGRANGE, NEWTON.

## Media

• *Media de números reales.* — V. ARITMÉTICA, ARMÓNICA, CUADRÁTICA, GEOMETRÍA, PROPORCIONAL.

• *Media o valor medio de una variable aleatoria.* — Sinónimo de esperanza matemática.

• *Media estadística de un carácter cuantitativo* X. — Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los valores (distintos o no) tomados por X sobre una muestra de $n$ individuos. Se llama media de X a la media aritmética $\overline{X}$ de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (V. MEDIANA).

• *Convergencia en media de una sucesión o de una serie.* — Convergencia en el sentido de Césaro (V. CÉSARO).

• *Convergencia en media de una sucesión de funciones.* — Convergencia en el espacio $\mathscr{L}^1$ de las funciones reales Lebesgue integrables, en el sentido de la semi-norma de la convergencia en media. Más precisamente la sucesión $(f_n)_{n \geq 0}$ de funciones de $\mathscr{L}^1$ converge en media hacia $f \in \mathscr{L}^1$ si la sucesión de término general

$$\int |f_n(x) - f(x)|\, dx$$

converge hacia 0 cuando $n$ tiende hacia $+\infty$.

● *Convergencia en media cuadrática.* — V. CUADRÁTICA.

● *Curvatura media de una curva izquierda en un punto* M. — Número real $\frac{1}{R_0}$ tal que $\frac{2}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ donde $R_1$ y $R_2$ son los radios de curvaturas principales en M.

● *Fórmulas de la media.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones numéricas integrables sobre el intervalo $I = [a, b]$ de **R**, $m$ y M los extremos inferiores y superiores de $g$ sobre I. Si $f$ tiene un signo constante sobre $[a, b]$, entonces la primera fórmula de la media afirma que existe un número real K del intervalo $[m, M]$ que verifica:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si $f$ es positivo y decreciente sobre $[a, b]$, la segunda fórmula de la media (o fórmula de Bonnet) afirma que existe un número real $\xi$ de I tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx.$$

● *Semi-norma y norma de la convergencia en media.* — Sea $\mathcal{L}^1$ el espacio de las funciones reales integrables en el sentido de Lebesgue. La aplicación de $\mathcal{L}^1$ en **R** definida por

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int |f(x)|\,dx$$

es una semi-norma llamada semi-norma de la convergencia en media. Sobre otros espacios, por ejemplo, el de las funciones continuas sobre un intervalo compacto de **R**, es una norma llamada norma de la convergencia en media.

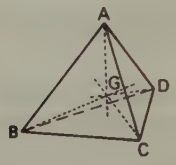
● *Topología de la convergencia en media.* — Topología asociada a la norma de la convergencia en media.

● *Velocidad media entre los instantes $t_1$ y $t_2$ de un móvil puntual* M. — Vector $\frac{1}{t_2 - t_1}\overrightarrow{M_1M_2}$, donde $M_1$ y $M_2$ son las posiciones de M en los instantes $t_1$ y $t_2$.

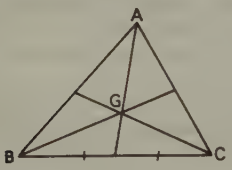
## Mediana

● *Mediana estadística de un carácter cuantitativo* X *que toma los valores $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ sobre una muestra de n individuos.* — Número real $m$ tal que el número de los valores de X inferiores a $m$ sea igual al número de los valores superiores a $m$. Si $n$ es impar, la mediana $m$ es uno de los valores $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$. Si $n$ es par, $m$ es un número escogido entre dos valores bien determinados tomados por X. Por ejemplo, si X toma los valores 3, 7, 1, 5, 4, 5, 1, la mediana es 4. Si X toma los valores 2, 1, 3, 1, 6, 5, todo número real comprendido entre 2 y 3 puede considerarse como mediana. En la práctica, se toma la semi-suma 2,5 de los números 2 y 3. En general, la mediana es diferente de la media.

• *Mediana de un tetraedro.* — Recta que pasa por un vértice del tetraedro y el centro de gravedad de la cara opuesta. Las cuatro medianas de un tetraedro son concurrentes en un punto G, centro de gravedad del tetraedro.




• *Mediana de un triángulo.* — Recta que pasa por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto. Las tres medianas del triángulo son concurrentes en un punto, centro de gravedad del triángulo.



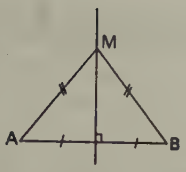

• *Teorema de la mediana.* — Caso particular del teorema de Stewart. Afirma que, si I es el punto medio del lado BC de un triángulo ABC, la longitud del segmento AI dado por la mediana que parte de A verifica la igualdad $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$.

## Mediano

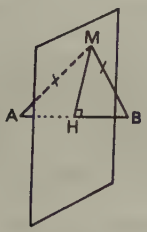
• *Triángulo mediano de un triángulo* ABC. — Sinónimo de triángulo complementario.

## Mediatriz

• *Plano mediatriz de un segmento de* $\mathbf{R}^3$ *de extremos distintos* A *y* B. — Conjunto de los puntos de $\mathbf{R}^3$ equidistantes de A y B. Es un plano perpendicular al segmento en su punto medio.




• *Mediatriz de un triángulo.* — Mediatriz de un lado de ese triángulo. Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes en un punto, centro del círculo circunscrito al triángulo.




• *Mediatriz de un segmento del plano* **R** *de extremos distintos* A *y* B. — Conjunto de los puntos del plano que equidistan de A y B. Es una recta perpendicular al segmento en su punto medio.

## Medible

• *Aplicación medible de un espacio medible* (E, $\mathscr{B}$) *en otro* (E', $\mathscr{B}'$). — Aplicación $f$ de E en E' tal que la imagen recíproca por $f$ de toda parte medible de E' sea una parte medible de E. Si $E = E' = \mathbf{R}$ y si $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ es la tribu de Borel de **R**, una función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es medible si y solamente si la imagen recíproca de un intervalo de **R** es un boreliano. En particular, toda función continua es medible.

• *Cardinal medible.* — Un cardinal $\alpha$ se denomina medible si existe un conjunto E de cardinal $\alpha$ y una función $\mu$ definida sobre $\mathfrak{P}(E)$ con valores en $\{0, 1\}$ tal que:

*a*) $\mu(E) = 1$;
*b*) $\mu$ es nula sobre los singletones.
*c*) $\mu(E - X) = 1 - \mu(X)$;
*d*) si $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de partes de E tal que Card I < Card E y si $\mu(X_i) = 0$ para todo $i \in I$ entonces $\mu(\bigcup_{i \in I} X_i) = 0$.

Esta noción proviene de un problema formulado por Banach. Se ignora si existen cardinales medibles.
V. MEDIBLES.

• *Espacio medible.* — Par (E, $\mathscr{B}$), donde E es un conjunto y $\mathscr{B}$ una tribu de partes de E.

• *Parte medible de un espacio medible* (E, $\mathscr{B}$). — Elemento de $\mathscr{B}$. Las partes medibles de **R** para la medida de Lebesgue son los borelianos de **R**.

## Medibles

• *Axiomas de los cardinales medibles.* — Afirma que existen cardinales medibles. Se ignora si es consistente con los demás axiomas de la teoría de los conjuntos. Este axioma es muy fuerte, puesto que no se le conoce cardinal medible y puesto que todo cardinal inferior o igual al cardinal más pequeño fuertemente inaccesible es no medible (Ulam y Tarski).

## Medida

• *Medida sobre un espacio de Riesz* $\mathscr{R}$ *de funciones numéricas definidas sobre* E. — Forma lineal $\mu$ sobre $\mathscr{R}$ que satisface las condiciones siguientes:

1) para toda función positiva $f \in \mathscr{R}$, existe un número real positivo M tal que $|\mu(g)| \leqslant M$ cuando $g \in \mathscr{R}$ verifica $|g(x)| \leqslant f(x)$ para todo $x \in E$;
2) para toda sucesión decreciente $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de funciones positivas de $\mathscr{R}$ que convergen hacia 0 tenemos $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = 0$.

V. DIRAC, RADON, REAL.

• *Medida sobre un conjunto no vacío* E *(o sobre una tribu* $\mathscr{B}$*).* — Aplicación $\sigma$-aditiva $\mu$ definida sobre una tribu $\mathscr{B}$ de E con valores en $\overline{\mathbf{R}}$ y no idénticamente igual a $+\infty$.
V. STIELTJES.

• *Medida abstracta.* — V. ABSTRACTA.

• *Medida algebraica de un segmento.* — V. ALGEBRAICA.

• *Medida de un ángulo* $\theta$ *del grupo de los ángulos de un plano vectorial orientado.* — Sean cos y sen las funciones coseno y seno de **C** en **C**. Todo número real $x$ tal que $\cos x = \operatorname{Cos}\theta$ y $\operatorname{sen} x = \operatorname{Sen}\theta$ se llama una medida en radianes del ángulo $\theta$. Existe una única medida $x \in ]-\pi, \pi]$ llamada medida principal o determinación principal de $\theta$; se escribe $x = \operatorname{med}(\theta)$. Si $x$ es una medida en radianes de $\theta$, el número real

$$y = \frac{180x}{\pi}\left(\text{resp. } z = \frac{200x}{\pi}\right)$$

se denomina medida en grados sexagesimales (resp. grados centesimales) de $\theta$. Las medidas principales, en radianes, del ángulo llano y del ángulo nulo son, respectivamente, $\pi$ y 0.

• *Medida de un ángulo no orientado de semi-rectas (resp. de rectas) de un plano euclídeo.* — Sea $\theta$ el ángulo no orientado de dos semi-rectas (resp. de dos rectas) de vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se llama medida en radianes de $\theta$ al número real $\alpha \in [\![0, \pi]\!]$ (resp. $[\![0, \pi/2]\!]$ definido por:

$$\alpha = \operatorname{Arc\,cos}\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\left(\text{resp. } \alpha = \operatorname{Arc\,cos}\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right).$$

Los números reales $\beta = \frac{180\alpha}{\pi}$ y $\gamma = \frac{200\alpha}{\pi}$ son, respectivamente, las medidas en grados y grados centígrados de $\theta$.

• *Medida de un arco de círculo.* — Dado un arco $\overset{\frown}{AB}$ de un círculo C de centro O, se denomina medida en radianes (resp. grados sexagesimales, grados centesimales) de ese arco a la medida en radianes (resp. grados sexagesimales, grados centesimales) del sector angular de vértice O cuya intersección con C es el arco $\overset{\frown}{AB}$. Un arco de círculo de 1 radián tiene una longitud igual al radio del círculo.

• *Medida de Lebesgue.* — V. LEBESGUE.

• *Medida de un sector angular.* — Dado un sector angular saliente de lados Ox y Oy, se denomina medida en radianes (resp. grados sexagesimales, grados centesimales) de ese sector, la medida en radianes (resp. grados sexagesimales, grados centesimales) del ángulo no orientado $\widehat{xOy}$; es un número real $\alpha \in [\![0, \pi]\!]$ (resp. un número real $\beta \in [\![0, 180]\!]$, un número real $\gamma \in [\![0, 200]\!]$). La medida del sector angular entrante de lados Ox y Oy es el número real $2\pi - \alpha$ (resp. $360 - \beta$, $400 - \gamma$).

• *Problema de la medida universal.* — V. UNIVERSAL.

• *Teoría de la medida.* — Rama reciente de las matemáticas que estudia las formas lineales sobre ciertos espacios vectoriales de funciones numéricas. El concepto de medida es mucho más general que el de medida en el sentido usual utilizado en metrología en las demás ciencias experimentales y técnicas y que consiste en asignar a ciertos sub-conjuntos de un conjunto E un número real positivo que satisfaga a ciertas condiciones (medida de un segmento, de un ángulo, etc.). La teoría de la medida es hoy prácticamente sinónima de teoría de la integración. Comprende como aplicación importante la teoría de las probabilidades.
V. INTEGRACIÓN.

• *Unidad de medida de los ángulos, de los arcos de círculos y de los ángulos sólidos.* — V. ESTEREORADIÁN, GRADO, RADIÁN, SEXAGESIMAL (Grado), SEXAGESIMAL (Minuto, segundo).

• *Espacio de medida.* — Triplete $(E, \mathscr{B}, \mu)$, donde $(E, \mathscr{B})$ es un espacio medible y $\mu$ una medida positiva sobre $\mathscr{B}$.

## Medio

• *Medio de un arco de curva.* — Punto que lo divide en dos arcos isométricos. Tal punto no existe necesariamente.

• *Medio de un segmento* AB. — Unico punto M de la recta AB equidistante de los extremos A y B del segmento. Los segmentos AM y MB son entonces isométricos. Si $a$ y $b$ son las abscisas de A y B sobre un eje que pasa por A y B, la abscisa de M es igual a $(a + b)/2$. El punto M es también el isobaricentro de A y B.

## Medios

Expresión no matemática empleada para designar los términos $b$ y $c$ en la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se dice que el producto $ad$ de los extremos es igual al producto $bc$ de los medios.
V. EXTREMOS.

## Mega

V. MÚLTIPLE.

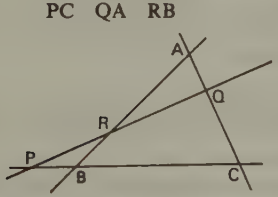
## Membranas

• *Ecuación de las membranas vibrantes.* — V. VIBRANTES.

## Menelao de Alejandría (Finales del siglo I)

• *Teorema de Menelao de Alejandría.* — Sean tres puntos P, Q y R respectivamente sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC. Una condición necesaria y suficiente para que P, Q y R estén alineados es que:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$




## Meneliana

• *Meneliana de un triángulo* ABC. — Recta que encuentra las tres rectas AB, BC y CA.

## Menelianas

• *Problemas de las menelianas.* — Sean un triángulo de área 3S y todas las rectas que cortan ese triángulo en dos superficies de áreas S y 2S. Existe en el triángulo una parte en la que ninguna de esas rectas pasa por ella. Este problema fue resuelto por V. E. Hoggatt Jr en 1962.

## Menor

Dado una matriz cuadrada $M = (\alpha_{ij})$ de orden $n$ con elementos en un cuerpo conmutativo K, se llama menor asociado al elemento $\alpha_{ij}$ al determinante de la matriz cuadrada $M_{ij}$ de orden $n - 1$ obtenida al suprimir la $i$-ésima línea y la $j$-ésima columna de la matriz M en «la intersección» de las cuales se encuentra $\alpha_{ij}$.

• *Arco menor.* — Entre los dos arcos de círculo determinados por dos puntos A y B no diametralmente opuestos sobre el círculo, el arco de más pequeña longitud se llama el arco menor, el otro se llama el arco mayor de extremos A y B.

## Menos

• *Menos fino.* — V. FINA, FINO.

• *Menos infinito.* — V. INFINITO.

• *Signo menos.* — Símbolo «−» utilizado en particular para representar una sustracción o un número negativo.

## Mentiroso

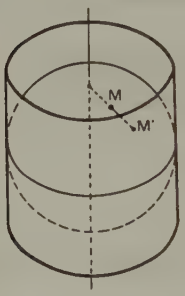
• *Paradoja del mentiroso o de Epiménides.* — Si se considera como axioma la frase A: «Epiménides dice que está mintiendo», la afirmación P: «Epiménides está mintiendo» ¿es verdadera o falsa? Si se supone P falsa, entonces Epiménides dice la verdad y según A está mintiendo, por tanto, P es verdadera. Si, por el contrario, se supone P verdadera, entonces Epiménides miente; según A, no está mintiendo, por tanto, dice la verdad y, en ese caso, P es falsa. Esta paradoja ilustra el hecho de que las frases del lenguaje corriente se prestan mal al tratamiento lógico sin precauciones. En lógica matemática, la paradoja desaparece porque, en una fórmula de un sistema formal no se puede tener una ocurrencia de ese mismo sistema.

## Mercator, Gerardus (1512-1594) (Su verdadero nombre, Gérard KRÉMER)

• *Proyección de Mercator.* — Proyección de gran uso en geografía, que permite representar la Tierra sobre un mapa plano según el principio simbolizado en la figura inferior; todo punto M de la superficie terrestre es proyectado en M′ sobre un cilindro de revolución tangente a lo largo del ecuador. Si M tiene por coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi)$, el punto M′ se escoge de forma que sus coordenadas cartesianas en el plano obtenido desenrollando el cilindro sean:

$$x = \rho\theta \quad \text{e} \quad y = \rho \operatorname{Log}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Sobre el mapa así obtenido, los meridianos son representados por rectas paralelas, las paralelas por otras rectas perpendiculares a las precedentes; las loxodromas se representan por rectas.

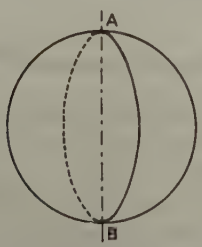



## Meridiana

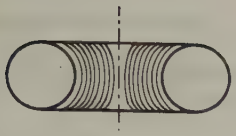
• *Meridiana de una superficie de revolución.* — Curva plana obtenida por sección de la superficie con un plano que pasa por su eje de revolución. Una superficie de revolución es perfectamente definida dando su eje y dando una de sus meridianas (V. MERIDIANOS).

## Meridianos

• *Meridianos de una esfera.* — Sean A y B dos puntos de la esfera diametralmente opuestos. La esfera es una superficie de revolución de eje AB cuyas meridianas son los círculos máximos que pasan por A y B. Se llaman meridianos de la esfera relativos a A y B. Los meridianos terrestres son los meridianos de la esfera terrestre relativos a los polos Norte y Sur.




• *Meridianos de un toro.* — El toro es una superficie de revolución. Sus meridianas son círculos que no encuentran el eje de revolución y se llaman meridianos del toro.



## Meromorfo

• *Función meromorfa.* — Una función numérica $f$ de variable compleja se llama meromorfa en un abierto conexo U de C si está definida y es analítica en un abierto U' obtenido al quitar a U un conjunto de puntos aislados, cada uno de los cuales es un polo de $f$. Toda función meromorfa en U es, en el entorno de cada punto de U, igual al cociente de dos funciones analíticas.

## Mersenne (El Padre) Marin (1588-1648)

• *Números de Mersenne.* — Números de la forma $2^p - 1$, donde $p$ es un número primo. Si $2^n - 1$ es un número primo, entonces $n$ es un número primo. La recíproca conjeturada por Mersenne es falsa: si $p$ es primo, $2^p - 1$ no es necesariamente primo. Se ignora si el conjunto de los números primos de Mersenne es finito o infinito. En 1979, el 26 número de Mersenne es $2^{44.497} - 1$.

V. GRANDES (Números), LUCAS, PRIMO (Número), TUCKERMAN.

## Mertens, Franz Carl Joseph (1840-1927)

• *Fórmula de Mertens.* — Sean $x$ un número real positivo y $p$ un número entero primo; cuando $x$ tiende hacia el infinito tenemos:

$$\prod_{p \leqslant x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-C}}{\operatorname{Log} x}$$

donde C es la constante de Euler.

• *Teorema de Mertens.* — Sean $\Sigma u_n$ una serie numérica absolutamente convergente de suma U y $\Sigma v_n$ una serie numérica convergente de suma V. El teorema de Mertens afirma que el producto de Cauchy de las dos series es una serie convergente de suma UV.

## Metalenguaje

Designa en lógica el lenguaje ordinario por oposición al lenguaje formalizado. Por ejemplo, el signo = es utilizado en los artículos de lógica de esta obra como un término del metalenguaje.

## Metalógico

Que sirve de base a la lógica; estudia propiedades de los diferentes sistemas lógicos, que de este modo se convierten a su vez en objetos de estudios.

## Metamatemática (o meta-matemática)

Considerada como un dominio de la lógica por algunos y como una ciencia autónoma por otros, la metamatemática es, según Hilbert, la teoría de las demostraciones formalizadas. Su parte central concierne a la no-contradicción de las teorías matemáticas.
V. COHEN, GÖDEL.

## Método

- *Método de la banda de papel.* — V. BANDA.
- *Método del descenso infinito.* — V. INFINITO.
- *Método de Gauss.* — V. GAUSS.
- *Método de Hörner.* — V. HÖRNER.
- *Método intrínseco.* — V. INTRÍNSECO.
- *Método de Lagrange.* — V. LAGRANGE.
- *Método del máximum de verosimilitud.* — V. VEROSIMILITUD.
- *Método de los menores cuadrados.* — V. MENORES.
- *Método de Monte Carlo.* — V. MONTE CARLO.
- *Método de Newton.* — V. NEWTON.
- *Método de Poncelet.* — V. PONCELET.
- *Método de Simpson.* — V. SIMPSON.
- *Método de los trapecios.* — V. TRAPECIOS.

## Métodos

- *Métodos de Euler.* — V. EULER.
- *Métodos de los menores cuadrados.* — V. MENORES.

## Métrica

- *Métrica sobre un conjunto* E. — Sinónimo de distancia sobre E.
V. DISTANCIA.

- *Escala métrica.* — Procedimiento de dibujo que consiste en asociar a todo punto M de una semirrecta OX un número real $x$ positivo tal que $x$ sea

proporcional a la distancia OM usual (es decir, medida con un «doble decímetro»).

• *Espacio métrico.* — Par (E, *d*), donde *d* es una distancia sobre E. Todo espacio métrico es topológico y separado (V. TOPOLOGÍA asociada a una distancia) y en tal espacio, cada punto posee un sistema fundamental numerable de entornos formado por las bolas de radios $1/n$ con $n \in \mathbf{N}^*$. La noción de espacio métrico fue introducida por Fréchet bajo el nombre de espacios abstractos.
V. ABSTRACTOS, COMPLETO, ISOMÉTRICOS, METRIZABLE, PRECOMPACTO, ULTRAMÉTRICO.

• *Geometría métrica.* — Estudio del grupo de las isometrías afines de un espacio afín asociado a un espacio vectorial euclídeo.

• *Propiedad métrica.* — Teorema de la geometría métrica.

• *Sub-espacio métrico de un espacio métrico* (E, *d*). — Parte A de E provista de la restricción de *d* en $A^2$.

## Metrizable

• *Espacio topológico metrizable.* — Espacio topológico E que puede ser provisto de una distancia cuya topología asociada es la topología dada sobre E. Un espacio vectorial normado es metrizable; la recíproca no es cierta.

## Metsänkylä, Tauno

• *Teoremas de Metsänkylä.* — Conciernen a los números primos irregulares:

1) Para todo entero $n \geqslant 3$ y todo sub-grupo H de $\mathbf{Z}\ n\mathbf{Z}$ existe una infinidad de enteros primos irregulares *p* cuyas clases módulo *n* no están en H.

2) Existe una infinidad de enteros primos irregulares *p* que verifican una de las dos congruencias $p \equiv 1 \pmod 3$ o $p \equiv 1 \pmod 4$. Se ignora si cada clase de congruencia contiene una infinidad de enteros primos irregulares.

## Meusnier, Jean Baptiste Marie, general (1754-1793)

• *Teoremas de Meusnier:*

1) Si dos curvas trazadas sobre una misma superficie son tangentes en un mismo punto M y tienen igual plano osculador en M, entonces tienen el mismo centro de curvatura en M.

2) Sea $\Gamma$ una curva trazada sobre una superficie $\Sigma$ y sea C el centro de curvatura de $\Gamma$ en un punto M. El punto C es la proyección sobre el plano osculador en M a $\Gamma$ del centro de curvatura en M de la sección normal de $\Sigma$ que contiene la tangente en M a $\Gamma$.

## Micro

V. MÚLTIPLE.

## Miembro

• *Miembro de la ecuación* $f(x) = g(x)$ *(o de la inecuación* $f(x) \leqslant g(x)$*).* — Término no matemático que designa cada una de las expresiones $f(x)$ (primer miembro) y $g(x)$ (segundo miembro) situados a una y otra parte del signo $=$ (o $\leqslant$).

## Mil millones

V. DECIMAL (Sistema).

## Mili

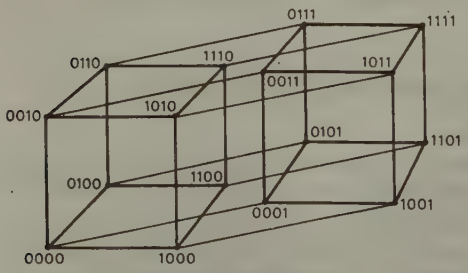
V. MÚLTIPLE.

## Millón

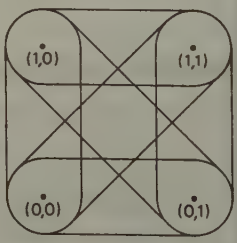
V. DECIMAL (Sistema).

## Mini-geometría

Sean $p$ un entero primo y $n$ un entero estrictamente positivo. El conjunto $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión $n$ sobre el cuerpo $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ y todo espacio afín asociado a este espacio vectorial tiene un número finito de puntos igual a $p^n$. La geometría afín sobre tal espacio se llama a veces mini-geometría. En tal espacio afín, el número de rectas, de planos y, más generalmente, el número de variedades afines de dimensión dada es finita.




El espacio afín $(Z/2Z)^4$.




Los 4 puntos y 6 rectas del plano afín.

## Minimal

• *Elemento minimal de un conjunto ordenado* E. — Un elemento $a \in E$ se denomina minimal si no existe en E elemento que le sea estrictamente inferior. Si E admite un elemento más pequeño $a$, entonces $a$ es el único elemento minimal de E.

• *Polinomio minimal de un elemento $\alpha$ algebraico sobre un cuerpo* K. — Polinomio irreductible y unitario de K[X] que admite $\alpha$ por raíz.

• *Polinomio minimal de un endomorfismo $f$ de un* K*-espacio vectorial* E. — Los polinomios P con coeficientes en K tales que $P(f) = 0$ constituyen un ideal principal I de K[X]. Si I es no nulo, todo polinomio que lo engendra se denomina un polinomio minimal de $f$ y sus raíces constituyen el espectro de $f$.

• *Polinomio minimal de una matriz cuadrada* M *de orden n con elementos en un cuerpo* K. — Polinomio minimal del endomorfismo $f$ de $K^n$ del que M es la matriz en relación a la base canónica de $K^n$. Las raíces del polinomio minimal de M constituyen el espectro de M.

## Minimax

• *Teorema del minimax.* — Teorema fundamental de la teoría de juegos establecido por J. von Neumann en 1928. Este teorema expresa el hecho de que en un juego finito, de dos jugadores, existe un valor medio que representa la suma que un jugador A puede esperar ganar contra el jugador B si los dos jugadores juegan de forma razonada. A menudo es útil en informática para exploraciones de árbol.

## Minimorum

• *Minimorum de una función numérica.* — El más pequeño de sus mínimos relativos.

## Mínimos

• *Métodos de los mínimos cuadrados.* — Métodos particulares de ajuste. Dados $n$ puntos $A_i$ de coordenadas $(x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, ..., n$, se distinguen dos métodos de ajuste por una curva algebraica $\Gamma$ de ecuación $y = P(x)$, donde P es un polinomio desconocido de grado $k$.

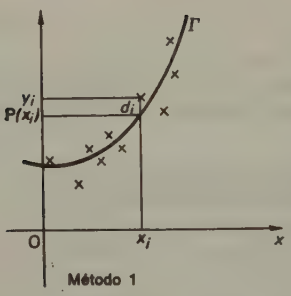
*Método I:*

Se busca $\Gamma$ de forma que $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ sea minimum con $d_i = |y - P(x_i)|$.

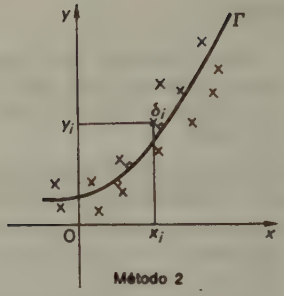
*Método II:*

Se busca $\Gamma$ de forma que la suma de los cuadrados de las distancias $\delta_i$ de los puntos $A_i$ a $\Gamma$ sea minimum.

V. REGRESIÓN (Rectas de).



Método 1



Método 2

## Minimum

• *Minimum de una función numérica f definida sobre un conjunto* E. — Se dice que $f$ admite un minimum $m$ en un punto $a$ de E si $m = f(a)$ y si $f(x)$ es superior a $f(a)$ para todo $x \in E$. El número real $m$ es el minimum de Im$f$. V. ABSOLUTO, RELATIVO.

• *Minimum o elemento minimum de un conjunto ordenado.* — Sinónimo de elemento más pequeño de ese conjunto.
V. PEQUEÑO.

## Minkowski, Hermann (1864-1909)

• *Desigualdad de Minkovsky o de convexidad.* — Afirma que si $p \geqslant 1$ es un número real, entonces:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

para $a_i$ y $b_i$ números reales positivos y que:

$$\left[\int_0^1 (f(x) + g(x))^p \, dx\right]^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 f^p(x) \, dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 g^p(x) \, dx\right)^{1/p}$$

donde $f$ y $g$ son funciones reales positivas integrables sobre $[0, 1]$.

• *Desigualdad triangular de Minkowski en un espacio vectorial normado* E. — Para todo $(x, y) \in E^2$, tenemos $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. En particular, el módulo de la suma de dos números complejos $a$ y $b$ es inferior a la suma de su módulo: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Se deduce de la desigualdad triangular de Minkowski la desigualdad: $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\|$.

## Minorada

• *Función minorada con valores en un conjunto ordenado* E. — Función que admite un minorante. Por ejemplo, una sucesión es minorada si el conjunto de sus términos es minorado.

• *Parte minorada de un conjunto ordenado* E. — Parte de E que admite un minorante.

## Minorante

• *Minorante de una función con valores en un conjunto ordenado* E. — Minorante del conjunto imagen de $f$. Por ejemplo, si $f$ es una sucesión, un minorante de $f$ es un minorante del conjunto de los términos de la sucesión.

• *Minorante de una parte* A *de un conjunto ordenado* E. — Elemento $a$ de E inferior a todos los elementos de A. Todo elemento $b$ de E inferior a $a$ es también un minorante de A.

## Mintérmino

• *Mintérmino de orden n sobre un álgebra de Boole* (E, +, ·, $f$). — Función de Boole de $n$ variables $h:(x_1, x_2, ..., x_n)\mapsto h(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $h(x_1, x_2, ..., x_n)$ tenga por expresión un producto de $n$ factores tomado cada uno en uno de los pares $\{x_1, \bar{x}_1\}$, ..., $\{x_n, \bar{x}_n\}$. Por ejemplo, $h$ de $E^3$ en E definida por $(x, y, z)\mapsto \bar{x}\cdot y\cdot \bar{z}$ es un mintérmino de orden 3.

## Minuto

• *Minuto sexagesimal.* — V. SEXAGESIMAL.

## Místico

• *Hexagrama místico.* — Esta expresión, que significa literalmente «hexágono misterioso», se emplea a veces para designar el hexágono cuyos 6 vértices están sobre una cónica que hace referencia al teorema de Pascal. A partir de la figura que se puede construir uniendo de todas las maneras posibles esos 6 puntos se definen 60 rectas de Pascal que pasan 3 por 3 por 20 puntos de Steiner que determinan 4 por 4. 15 rectas de Plücker. Pueden definirse luego 60 puntos de Kirkman, 20 rectas de Cayley, 15 puntos de Salmon y otros objetos o propiedades estudiadas por Giuseppe Veronese y Luigi Cremona.

## Mixto

• *Producto mixto de n vectores* $x_1, x_2, ..., x_n$ *de un espacio vectorial euclídeo orientado* E *de dimensión n.* — Determinante de esos $n$ vectores relativos a una base ortonormada directa. Es independiente de la base ortonormada directa escogida. Se lo simboliza por $\det(x_1, x_2, ..., x_n)$ o a veces por $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Cuando se cambia la orientación de E, el valor del producto mixto se cambia en su opuesto. Si $E=\mathbf{R}^3$, verifica la fórmula $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})=\vec{U}\cdot(\vec{V}\wedge\vec{W})$, de ahí el calificativo de «mixto» dado a este producto.

## **Möbius,** Augustus Ferdinand **(o Moebius)** (1790-1868)

• *Anillo, banda, cinturón, cinta o superficie de Möbius.* — Ejemplo importante en topología de superficie globalmente no orientable que no admite más que un solo lado y una sola cara. Se la puede materializar pegando los bordes extremos de una banda regular de papel tras haberla torcido una vez. Puede ser representado paramétricamente en $\mathbf{R}^3$ por las ecuaciones:

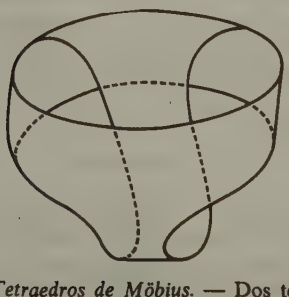
$$x = (a + \alpha \cos \varphi) \cos 2\varphi, \qquad y = (a + \alpha \cos \varphi) \operatorname{sen} 2\varphi$$

y $$z = \alpha \operatorname{sen} \varphi,$$

donde $a$ es un real positivo, donde $\varphi$ describe $\mathbf{R}$ y donde $\alpha$ describe el intervalo $[\![-l, l]\!]$ con $0 < 1 < a$.
En química, las reglas de Woodward-Hoffmann demuestran que el cierre de una molécula poliémica para formar una cinta debe hacerse térmicamente en la forma de una cinta de Möbius. También se encuentran cintas de Möbius en los cristales líquidos.
V. CRUZADO (Gorro).

• *Función de Möbius.* — Función $\mu: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definida por:
$\mu(1) = 1$;
$\mu(n) = (-1)^k$ si $n$ es el producto de $k \geqslant 1$ enteros primeros distintos;
$\mu(n) = 0$ en todos los demás casos.
Se destaca que $\mu(n) = 0$ si y solamente si $n$ es divisible por un cuadrado distinto de 1.

• *Slip de Möbius.* — Superficie no orientable dibujada inmediatamente a continuación (según Gourmelin) que se puede materializar fácilmente con papel.



• *Tetraedros de Möbius.* — Dos tetraedros $T_1$ y $T_2$ se llaman tetraedros de Möbius si cada vértice de $T_1$ pertenece a una cara de $T_2$ y si cada vértice de $T_2$ pertenece a una cara de $T_1$.

## mod

Abreviatura de módulo.

## Moda

Sea X un carácter cuantitativo. En el caso en que el carácter X sea discreto, se llama moda a un valor tomado por X que presenta la frecuencia más elevada. La moda puede no ser única. En el caso de un carácter X continuo cuyos valores son reagrupados en clases de igual amplitud, se llama moda al centro de una clase que presenta la frecuencia más elevada. Tal clase se llama clase modal.

## Modal

• *Clase modal.* — V. MODA.

## Modelo

• *Modelo de Beltrami:* — V. BELTRAMI.

• *Modelo de un conjunto* $\Sigma$ *de fórmulas de un lenguaje* L. — Toda realización de L que haga válido cada elemento de $\Sigma$.

• *Modelo de Poincaré.* — V. POINCARÉ.

• *Modelo de una teoría.* — Estructura que realiza los axiomas de esa teoría. Por ejemplo, el grupo $(\mathbf{Z}, +)$ es un modelo de la teoría de los grupos.

## Moderna

• *Algebra moderna.* — Se llamaba así hacia 1930 al estudio de las estructuras algebraicas por oposición a los cálculos sobre las ecuaciones. Ese término tiende en adelante a desaparecer en beneficio del de álgebra.

## Modular

• *Grupo modular aritmético.* — Grupo de las permutaciones del semi-plano de Poincaré de la forma $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d$ son enteros racionales tales que $ad - bc = 1$.

• *Retículo modular.* — Retículo $(E, \leqslant)$ tal que para todo triplete $(x, y, z)$ de elementos de E que verifican $x \leqslant z$ tengamos $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$.

## Módulo

• *Módulo sobre un anillo conmutativo unitario* A. — Grupo abeliano E provisto de una acción $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ de A sobre E tal que para todo par $(\alpha, \beta)$ de elementos de A y todo par $(x, y)$ de elementos de E:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$$
$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$
$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$
$$1 \cdot x = x.$$

Un módulo sobre un cuerpo conmutativo K es un K-espacio vectorial. V. BASE, COCIENTE, FINITO (Tipo), LIBRE, SIMPLE, SUB-MÓDULO, TOPOLÓGICO, TORSIÓN.

• *Módulo de los logaritmos decimales.* — Logaritmo decimal del número de Néper *e*; es simbolizado por M y su inverso 1/M es el logaritmo neperiano de 10. Los números M y 1/M permiten definir el logaritmo decimal a partir del logaritmo neperiano y recíprocamente; $\log x = M \cdot \ln x$ y $\ln x = \frac{1}{M} \log x$ para todo número real $x > 0$. M = 0,434 294 481 9...; 1/M = 2,302 585 093...

• *Módulo de un número complejo* $z = a + ib$. — Número real positivo simbolizado $|z|$ definido por $|z|^2 = a^2 + b^2$. La aplicación de C en R que a $z \in C$ asocia su módulo es una norma sobre C. Si $\bar{z}$ es el conjugado de $z$, tenemos $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

• *Módulo de un vector x de un espacio vectorial normado.* — Expresión que se utiliza a veces para designar la norma del vector $x$.

## Módulo

V. CONGRUENCIA, CONGRUENTE, EQUIVALENCIA (Clase de), EQUIVALENTES, RESIDUAL (Clase).

## Módulos

• *Complejo de módulos.* — V. COMPLEJO.

## Modus ponens, Modus tollens

Reglas de deducción (o de inferencia) que juegan un papel crucial en la teoría del silogismo hipotético.
*Regla I: Modus ponens* (frecuentemente llamado también: Regla de separación):

De A y $A \Rightarrow B$, puede deducirse B.

*Regla II: Modus tollens:*

De $\overline{B}$ y $A \Rightarrow B$, puede deducirse $\overline{A}$.

En latín, las palabras «ponens» y «tollens» significan, respectivamente, «se pone», «se suprime».
El *modus ponens* es una de las reglas de inferencia fundamentales en las presentaciones axiomáticas corrientes del cálculo proposicional y del cálculo de predicados: si A y $A \Rightarrow B$ son enunciados demostrables, B es demostrable. V. SILOGISMO.

## Moebius, Augustus Ferdinand

V. MÖBIUS.

## Mohr, Georg (1640-1697)

• *Teorema de Mohr-Mascheroni.* — Afirma que toda construcción posible con la regla y el compás es posible sólo con el compás.

## Moivre, Abraham (de) (1667-1754)

• *Fórmula de Moivre.* — Para todo entero $n \in \mathbf{N}$ afirma que:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

También se escribe $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$. Es un caso particular de la fórmula $e^{nz} = (e^z)^n$ verificada para todo complejo $z$ y todo entero $n$. Permite calcular los valores de $\cos n\theta$, $\operatorname{sen} n\theta$, $\cos\theta/n$, $\operatorname{sen}\theta/n$ conociendo los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

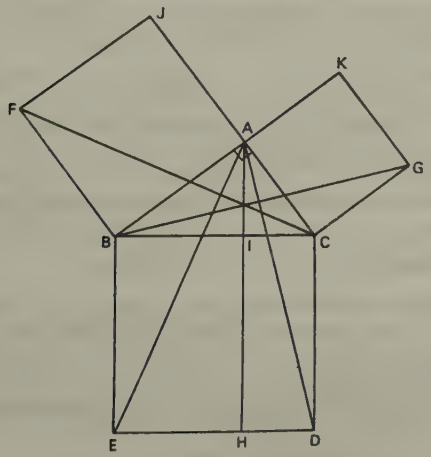
• *Teorema de Moivre-Laplace.* — Teorema central del límite relativo a las variables de Bernoulli $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ mutuamente independientes y de igual ley. Para $n \geqslant 1$, las sumas $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ siguen una ley binomial de parámetros $p$ y $n$. El teorema de Moivre-Laplace afirma que la sucesión $(S_n^*)$ converge en ley hacia una variable normal reducida, donde:

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

es la variable centrada reducida asociada a $S_n$.

## Molino de viento

Nombre dado a la figura de Vecten construida a partir de un triángulo rectángulo que sirvió durante mucho tiempo para demostrar el teorema de Pitá-



goras y que se encuentra tanto en los matemáticos griegos como chinos. La demostración consiste en establecer que los triángulos BFC y BAE son isométricos y que el doble de su área es igual por un lado al área del cuadrado ABFJ y por otro al área del rectángulo BIHE. Igualmente, el cuadrado AKGC tiene igual área que el rectángulo CIHD. Se deduce el teorema de Pitágoras de él, que puede enunciarse así: el área del cuadrado BCDE es igual a la suma de los cuadrados ABFJ y ACGK.

## Momento

• *Momento de un bipunto* (A, B) *con relación a un punto* O *de* $\mathbf{R}^3$. — Vector $\vec{\mathcal{M}}$ definido por $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$. Se emplea a veces, erróneamente, la expresión «momento del vector AB con relación a O» que es incorrecta, puesto que el momento varía cuando se consideran diversos bipuntos que representan el vector $\overrightarrow{AB}$.

• *Momento centrado de orden* $r \in \mathbf{N}^*$ *de una variable aleatoria o de un carácter cuantitativo.* — V. CENTRADO.

• *Momento cinético.* — V. CINÉTICO.

• *Momento de inercia.* — V. INERCIA.

• *Momento de orden* $r \in \mathbf{N}^*$ *de un carácter cuantitativo* X *que toma los valores* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. — Número real $M_r[X]$ definido por $m_r[X] = x_1^r f_1 + \cdots + x_n^r f_n$, donde $f_i$ es la frecuencia del valor tomado por $x_i$.

• *Momento de orden* $r \in \mathbf{N}^*$ *de una variable aleatoria absolutamente continua* X. — Número real $M_r[X]$ definido, cuando existe, por la integral

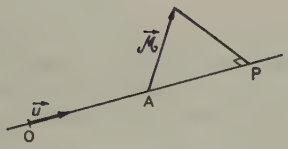
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\,dt,$$

donde $f(t)$ es la densidad de probabilidad de X en $t$. El momento de orden 1, simbolizado por E[X], se llama la esperanza matemática en X.

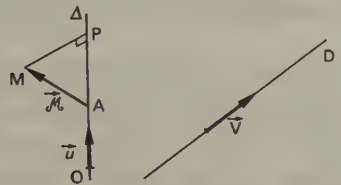
• *Momento de orden* $r \in \mathbf{N}^*$ *de una variable aleatoria discreta* X *que toma los valores* $(x_i)_{i \in I}$ *con las probabilidades* $(p_i)_{i \in I}$. — Se dice que X admite un momento de orden $r$ si la familia $(x_i^r \cdot p_i)_{i \in I}$ es sumable; el momento de orden $r$, simbolizado por $M_r[X]$, es definido entonces por $M_r[X] = \sum_{i \in I} x_i^r p_i$. El momento de orden 1, simbolizado por E[X] se denomina la esperanza matemática de X.

• *Momento resultante de un torsor.* — V. RESULTANTE.

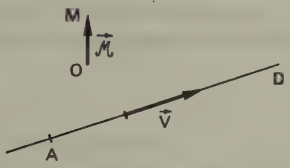
• *Momento de un torsor con relación a un eje* Δ. — Sea A un punto de Δ. La medida algebraica $\overline{AP}$ de la proyección sobre Δ del momento resultante del torsor con relación a A es independiente del punto A y se denomina el momento del torsor en relación a Δ.
Es igual a la suma de los momentos con relación a Δ de cada vector deslizante perteneciente al torsor.




• *Momento de un vector deslizante* (D, $\overline{V}$) *con relación a un eje* Δ. — La medida algebraica $\overline{AP}$ de la proyección sobre Δ del momento del vector deslizante con relación a un punto A de ese eje es independiente del punto A. El número $\overline{AP}$ se llama el momento del vector deslizante con relación a Δ.




• *Momento de un vector deslizante* (D, $\overline{V}$) *con relación a un punto* O. — Siendo A un punto de D, el vector $\vec{\mathcal{M}}$ definido por $\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overline{V}$ es independiente de la elección de A sobre D; se le llama momento del vector deslizante (D, $\overline{V}$) con relación a O.



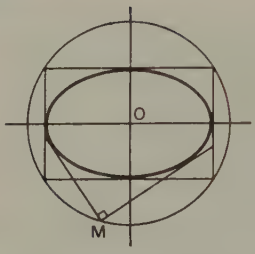

## Momentos

• *Campo de momentos.* — Un campo de vectores $\overline{V}$ definido sobre un abierto U de $\mathbf{R}^3$ es un campo de momentos si existe un torsor T tal que en todo punto M de U el momento $\overline{MK}$ de T por relación a M es igual a $\overline{V}(M)$. En cada instante, el campo de las velocidades de un sólido en un movimiento es un campo de momentos.

V. EQUIPROYECTIVIDAD.

## Monge, Gaspard (1746-1818)

• *Círculo de Monge de una cónica de centro de excentricidad* $e \leqslant \sqrt{2}$. — Lugar de los puntos de los que se pueden trazar dos tangentes perpendiculares a la cónica. Su centro es el de la cónica.




• *Esfera de Monge de un elipsoide.* — Lugar de los vértices de los triedros trirrectángulos cuyas caras son tangentes al elipsoide. Su centro es el del elipsoide.

• *Notaciones de Monge.* — Sea $f$ una función de dos variables reales, de valores reales, y dos veces continuamente diferenciable. Las notaciones de Monge consisten en representar las derivadas parciales de $f$ por las letras siguientes:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x};\quad q = \frac{\partial f}{\partial y};\quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x};\quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Al no generalizarse para un número mayor de variables, estas notaciones caen en desuso.

• *Superficie de Monge.* — Superficie engendrada por una curva plana cuyo plano rueda sin deslizar sobre una superficie desarrollable.

• *Teorema de Monge.* — Los ejes radicales de tres círculos coplanarios cuyos centros no están alineados se cortan en un mismo punto llamado centro radical.

## Monógena

• *Función monógena.* — Una función compleja $f$ definida sobre un abierto U de **C** se califica a veces de monógena en $z_0 \in U$ si es derivable en $z_0$.

## Monógeno

• *Grupo monógeno.* — Grupo engendrado por uno de sus elementos. Tal grupo es necesariamente conmutativo, isomorfo a **Z**, si es infinito, a $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si es finito de cardinal $n \geqslant 1$.
V. CÍCLICO.

## Monoide

Magma asociativo unitario. Si la ley es conmutativa, el monoide se denomina conmutativo.
V. ADITIVO, LIBRE, MULTIPLICATIVO, SIMETRIZACIÓN.

## Monomio

Polinomio cuyos coeficientes todos, salvo uno, son nulos. Los polinomios $7iX^2$ ó $5\sqrt{2}$ son monomios de $\mathbf{C}[X]$. Todo polinomio se escribe como suma finita de monomios; de esta manera, se define un polinomio en la enseñanza secundaria.

## Monomorfismo

• *Monomorfismo en una categoría* $\mathscr{C}$. — Morfismo $u$ de $\mathscr{C}$ tal que para todo morfismo $f$ y todo morfismo $g$ de $\mathscr{C}$ la igualdad $u \circ f = u \circ g$ implica $f = g$. Esta noción es dual de la de epimorfismo.
V. EPIMORFISMO.

## Monótona

• *Función monótona por trozos.* — V. TROZOS.

• *Función monótona de un conjunto ordenado en otro.* — Función creciente o función decreciente.

• *Función estrictamente monótona de un conjunto ordenado en otro.* — Función estrictamente creciente o función estrictamente decreciente.

• *Sucesión monótona de elementos de un conjunto ordenado.* — Sucesión creciente o sucesión decreciente.

• *Teorema de la convergencia monótona.* — Teorema de Beppo Lévi (V. LÉVI).

## Monotonía

Propiedad de ser monótona.

## Monstruo

• *Monstruo y bebé monstruo de Fischer.* — V. FISCHER.

## Montañés

• *Relación del montañés.* — Sobre una superficie cerrada de característica de Euler-Poincaré $\chi$ los números de puertos $c$, de cimas $s$ y de fondos $f$ están ligados por la relación llamada del montañés:

$$f - c + s = \chi.$$

## Monte Carlo

• *Método de Monte Carlo.* — Método estadístico y probabilista de simula-

ción, muy utilizado en la práctica para la resolución aproximada de problemas variados que van de la teoría de números a la física matemática y a la producción industrial. Modernizada por J. von Neumann y S. Ulam, consiste en determinar los resultados numéricos buscados por un gran número de estimaciones aleatorias, aumentando la precisión del resultado con el número de experiencias efectuadas. Por ejemplo, utilizando el método de Monte Carlo se pueden efectuar buenas aproximaciones de $\pi$ o la solución aproximada del problema de Dirichlet. Su empleo se ha desarrollado haciendo ejecutar los juegos y los cálculos por ordenadores.

V. AZAR, DIRICHLET (Problema de).

## Montgomery, Hugh L.

V. GLEASON.

## Mordell, Louis Joël (1888-1972)

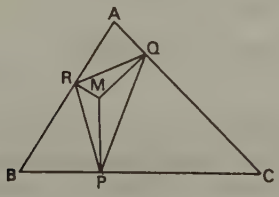
• *Teorema de Mordell.* — Para $k$ entero finito, la ecuación diofantiana $y^2 = x^3 + k$ no tiene más que un número finito de soluciones en $\mathbf{Z}$ (1923). Más recientemente, Baker ha probado (1967) que:

$$\max(|x|, |y|) \leqslant \exp(10^{10} \cdot |k|^{10000}).$$

• *Teorema de Erdös-Mordell.* — Sea M un punto interior a un triángulo ABC y sea PQR el triángulo podario de M en relación a ABC. El teorema de Erdös-Mordell afirma que:

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} \geqslant 2(\overline{MP} + \overline{MQ} + \overline{MR});$$

además, la igualdad se alcanza si y solamente si el triángulo es equilátero. Conjeturado por Erdös en 1935, este teorema fue demostrado por Mordell en 1937, luego por Kazarinoff en 1945.




## Morera, Jacinto (1856-1909)

• *Teorema de Morera.* — Sea $f$ una función de valores complejos definida y continua en un abierto D de C. Si la forma diferencial $f(z)\,dz$ es cerrada entonces la función $f$ es holomorfa en D.

## Morfismo

Utilizado a veces en lugar de homomorfismo.

- *Morfismo de una categoría.* — V. CATEGORÍA, FUENTE, META.
- *Morfismo functorial.* — V. FUNCTORIAL.
- *Compuesto de dos morfismos.* — V. CATEGORÍA.

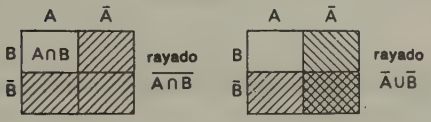
## Morgan, Augustus de (1806-1871)

- *Fórmulas de de Morgan o leyes de de Morgan.* — Fórmulas del álgebra de Boole utilizadas principalmente en lógica donde se expresan por:

no-(P y Q) = (no-P) o (no-Q)
no-(P o Q) = (no-P) y (no-Q).

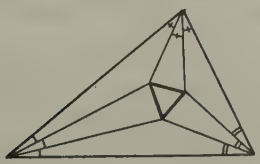
y en teoría de conjuntos por:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$




## Morley, Frank (1860-1937)

- *Teorema de Morley.* — Las semirrectas que dividen cada ángulo de un triángulo en tres ángulos iguales (o trisectrices) se cortan en los vértices de un triángulo equilátero llamado triángulo de Morley.



- *Triángulo de Morley.* — V. MORLEY (Teorema de).

## Mosca

- *Mosca de La Hire.* — V. LA HIRE.

## Movimiento

Un cuerpo se dice en movimiento (resp. en reposo) si su posición en relación a un sistema de referencia considerado como fijo varía (resp. no varía) en función del tiempo. El estudio de los movimientos y reposos es el objeto de la mecánica.
V. ABSOLUTO, ACELERADO, ARRASTRE, BASE, CANTIDAD, CENTRAL (Aceleración), CIRCULAR, DECELERADO, HELICOIDAL, PERIÓDICO, RECTILÍNEA, RELATIVO, RETARDADO, RODANTE, ROTACIÓN, SINUSOIDAL, TANGENTES, TRANSLACIÓN, TRAYECTORIA, UNIFORME, VARIADO (Uniformemente).

## Muda

• *Variable muda.* — Sinónimo de variable ligada.
V. LIGADA (Variable), MUTIFICADOR.

## Mudo

• *Indice mudo.* — Sinónimo de índice ligado.
V. MUTIFICADOR.

## Muestra

Parte de una población sobre la que se efectúa un estudio estadístico.

## Multiforme

• *Función multiforme de un conjunto* E *hacia un conjunto* F. — Terminología antigua que designa una correspondencia de E hacia F, por ejemplo, el logaritmo complejo. Esta apelación desusada es ambigua, puesto que tal correspondencia no es necesariamente una función en el sentido que hoy se le da.

## Multigrafo

Grafo no orientado.
V. ORIENTADO.

## Multilineal

• *Aplicación multilineal.* — Dado un K-espacio vectorial F y $n$ espacios vectoriales $E_1, ..., E_n$ sobre K, una aplicación $f$ de $\prod_{i=1}^{n} E_i$ en F se llama multilineal o $n$-lineal si para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y para todo $(n-1)$-upla $(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$ de $E_1 \times ... \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times ... \times E_n$, la aplicación $h$ de $E_i$ en F definida por $h(x) = f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)$ es lineal.

Para $n = 2$, $f$ se llama bilineal; para $n = 3$, $f$ se llama trilineal. Si $F = K$, la aplicación multilineal se denomina una forma multilineal.
V. ALTERNADA, LINEAL.

• *Forma multilineal.* — V. MULTILINEAL (Aplicación).

## Multilinearidad

• *Multilinearidad de una aplicación.* — Propiedad de la aplicación de ser multilineal.

## Multinomial

• *Ley multinomial.* — Generalización de la ley binomial. Sea una experiencia E que comporta $k$ sucesos posibles $A_1, A_2, ..., A_k$ incompatibles y sea $p_i$ la probabilidad de $A_i$ (los números reales $p_i$ verifican $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$). Se efectúan $n$ experiencias independientes repitiendo la experiencia E y se simboliza por $X_i$ la variable aleatoria que asocia, a una sucesión de $n$ experiencias, el número $n_i$ de realizaciones de $A_i$. Para todo $k$-upla $(n_1, n_2, ..., n_k)$ de enteros tales que $n_1 + ... + n_k = n$, la probabilidad para que al término de las $n$ experiencias los valores tomados por $X_1, X_2, ..., X_k$ sean respectivamente $n_1, n_2, ..., n_k$ es igual a:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}.$$

Se dice que el $k$-upla $(X_1, X_2, ..., X_k)$ obedece a una ley multinomial.

## Múltiple/o

• *Múltiplo en un monoide* (M, .) *o en un anillo* (M, +, .). — Sean $x$ e $y$ dos elementos de M. Si $x$ es divisor a izquierda de $y$, se dice que $y$ es múltiplo a derecha de $x$. Inversamente, si $x$ es divisor a derecha de $y$, se dice que $y$ es múltiplo a izquierda de $x$. Si el monoide o el anillo es conmutativo, se dice que $y$ es múltiplo de $x$, si $x$ es divisor de $y$.

• *Múltiplo y sub-múltiplo decimal de una unidad.* — A partir de ciertas unidades de base, se definen unos múltiplos (resp. sub-múltiplos) de esas unidades multiplicándolas por una potencia de 10 de exponente entero positivo (resp. negativo). Por ejemplo, a partir del metro se definen el decámetro, que vale 10 m, el hectómetro, el decímetro, etc. El cuadro que va a continuación indica las significaciones de los diferentes prefijos utilizados para nombrar los sub-múltiplos (a izquierda) y los múltiplos (a derecha):

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| deci | d | $10^{-1}$ | décimo | deca | da | 10 | diez |
| centi | c | $10^{-2}$ | centésimo | hecto | h | $10^2$ | cien |
| milli | m | $10^{-3}$ | milésima | kilo | k | $10^3$ | mil |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| micro | $\mu$ | $10^{-6}$ | millonésima | mega | M | $10^{6}$ | millón |
| nano | n | $10^{-9}$ | milmillonésima | giga | G | $10^{9}$ | mil millones |
| pico | p | $10^{-12}$ | millonésima de millonésima | tera | T | $10^{12}$ | millón de millones |
| femto | f | $10^{-15}$ | millonésima de milmillonésima | peta | P | $10^{15}$ | millón de mil millones |
| atto | a | $10^{-18}$ | milmillonésima de milmillonésima | exa | E | $10^{18}$ | mil millones de mil millones. |

• *Integral múltiple.* — Sea $f$ una función numérica definida y continua sobre un dominio D de $\mathbf{R}^2$. Se subdivide D en dominios $D_i$, de áreas $a_i$ y de diámetro $d_i$. Dado un punto cualquiera $A_i$ de $D_i$, si las sumas de Riemann $S = \sum_i f(A_i)\,.\,a_i$ convergen hacia un número I cuando el máximum de los diámetros $d_i$ tiende hacia 0, se dice que $f$ es integrable sobre D. El número real I se llama la integral de $f$ sobre D y se simboliza:

$$I = \iint_D f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

El procedimiento precedente se generaliza a un dominio de $\mathbf{R}^n$, con $n \geqslant 3$, y permite definir la integral múltiple de una función $f$ definida y continua sobre un dominio D de $\mathbf{R}^n$ que se simboliza por:

$$I = \iint \dots \int_D f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)\ \ dx_1\,dx_2 \dots dx_n.$$

En el caso $n = 3$, se habla de integral triple.

• *Mínimo común múltiplo.* — V. MCM.

• *Punto múltiple de orden k de una curva representada paramétricamente por las ecuaciones* $x = f(t)$, $y = g(t)$ *y* $z = h(t)$, *donde* $t \in I$. — Punto M de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ tal que existe $k$ valores distintos $t_1, t_2, \dots, t_k$ del intervalo I que verifican:

$$x_0 = f(t_1) = \dots = f(t_k);\quad y_0 = g(t_1) = \dots = g(t_k);$$
$$z_0 = h(t_1) = \dots = h(t_k).$$

• *Raíz múltiple de un polinomio.* — Raíz cuyo orden de multiplicidad es estrictamente superior a uno.
V. MULTIPLICIDAD.

• *Sucesión múltiple.* — Dado un entero $p \geqslant 2$, se llama sucesión múltiple de elementos de un conjunto E a una aplicación de $\mathbf{N}^p$ en E. Si $p = 2$, la sucesión se llama doble.

## Multiplicación

Nombre dado a ciertas leyes de composición internas no necesariamente con-

mutativas simbolizadas «.» o « × », por oposición a las leyes conmutativas simbolizadas con preferencia aditivamente.
V. ARABE, EGIPCIA, PRODUCTO, RUSA.

• *Multiplicación en los conjuntos de números.* — En N, la multiplicación es definida, por recurrencia, por: $0 \cdot x = 0$; $1 \cdot x = x$ y para $n \geqslant 0$ por:

$$(n + 1) \cdot x = n \cdot x + x.$$

También se la puede definir por (Card A) (Card B) = Card (A × B). La multiplicación en los conjuntos de números usuales (Z, Q, R, C) se define para prolongar la de N. Si la multiplicación en Z aparece como una adición iterada:

$$nx = x + x + ... + x \text{ «}n \text{ veces»} \text{ si } n \geqslant 1,$$

no ocurre lo mismo en R o en C. Más generalmente, en un anillo (A, +, . ), la ley « . » se llama multiplicación del anillo.

## Multiplicativa

• *Función multiplicativa.* — Función $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{C}$ tal que $f(1) = 1$ y $f(mn) = f(m)f(n)$ cuando $m$ y $n$ son extraños. Ejemplo: el indicador de Euler o la función de Möbius.
V. ADITIVA ARITMÉTICA (Función).

• *Notación multiplicativa.* — Por oposición a la adición aditiva, reservada preferentemente a las leyes conmutativas, es frecuente utilizar una notación multiplicativa: $(a, b) \mapsto a \cdot b$ para las leyes no necesariamente conmutativas.

## Multiplicativo

• *Grupo multiplicativo.* — Grupo cuya ley se simboliza multiplicativamente. Si (K, +, . ) es un cuerpo (K*, . ) es un grupo multiplicativo.

• *Monoide multiplicativo.* — Monoide cuya ley es simbolizada multiplicativamente. Si (A, +, . ) es un anillo unitario (A, . ) es un monoide multiplicativo.

## Multiplicidad

• *Multiplicidad de un par (x, y) de vértices de un grafo.* — Número de arcos que admiten $x$ como extremo inicial e $y$ como extremo terminal.

• *Orden de multiplicidad de un polo de una función.* — V. POLO.

• *Orden de multiplicidad u orden de una raíz $a \in K$ de un polinomio $P \in K[X]$, donde K es un cuerpo.* — El entero $k \in \mathbf{N}^*$ tal que $(X - a)^k$ divide P en K[X], mientras que $(X - a)^{k+1}$ no lo divide. Esto equivale a afirmar que:

$$P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-2)}(a) = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ y } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

V. DOBLE (Raíz), MÚLTIPLO (Raíz), RAÍZ, SIMPLE (Raíz).

## Multívoco

• *Correspondencia multívoca de un conjunto* E *hacia un conjunto* F. — Término poco utilizado que designa por oposición a unívoco una correspondencia tal que al menos un elemento $x$ de E posee varias imágenes en F.

## Mutificador

El lenguaje matemático utiliza reuniones donde figuran letras que pueden representar variables, índices, parámetros, constantes, etc. Una letra (índice o variable) que figura en una reunión se denomina muda o ligada si no figura necesariamente en otra escritura de la reunión; se denomina libre en el caso contrario. Por ejemplo, para $a \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} a^i$ admite otra escritura $\frac{a - a^{n+1}}{1 - a}$

en la que $i$ no aparece, la variable $i$ es muda, mientras que $a$ y $n$ son variables libres. Los símbolos como $\Sigma$, $\forall$, $\exists$, etc., que tienen por efecto hacer mudas ciertas letras de una reunión, se denominan mutificadores o mutificantes.

V. LIBRE (Variable), LIGADA (Variable).

## Mutificante

• *Símbolo mutificante.* — V. MUTIFICADOR.

## Mutuamente

• *Curvas mutuamente enlazadas.* — Sinónimo de curvas entrelazadas.

• *Sucesos mutuamente independientes.* — V. INDEPENDIENTES.

# N

## N

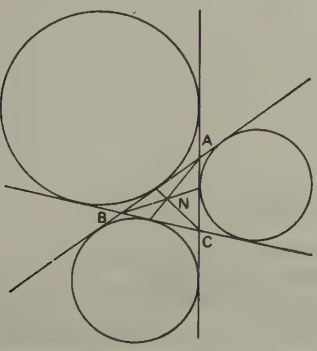
Conjunto de enteros naturales.

## Nabla $\nabla$

Medio mnemotécnico que permite hallar la expresión de los principales operadores diferenciales; se considera $\nabla$ como un «vector» de coordenadas $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$. Entonces: $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \nabla f$; div $\overrightarrow{\nabla} = \nabla \overrightarrow{\nabla}$ (producto escalar); rot $\overrightarrow{\nabla} = \nabla \wedge \overrightarrow{\nabla}$ (producto vectorial) y $\nabla f = \nabla^2 f$. Otras apelaciones desusadas: atled (delta invertido) y del.

## Nagel, W. (1870-1911)

• *Punto de Nagel.* — Punto de concurrencia N de las cevianas que desembocan en los puntos de contacto de los lados de un triángulo con los tres círculos exinscritos.




## Nand

V. SHEFFER.

## Nano

V. MÚLTIPLE.

## Napa

Usualmente, se llama napa a una parte conexa de una superficie. Por ejemplo, los componentes conexos de un hiperboloide se denominan napas del hiperboloide. Según los casos, admite una napa o dos napas. Para un cono C de vértices S, el vértice S delimita dos partes conexas llamadas napas del cono.

- *Napa geométrica.* — V. GEOMÉTRICA.
- *Napa parametrada.* — V. PARAMETRADA.

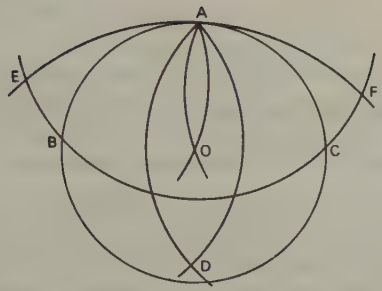
## Napier, John

V. NÉPER.

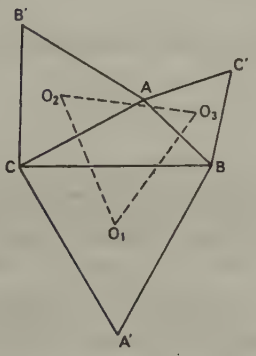
## Napoleón Bonaparte (1769-1821)

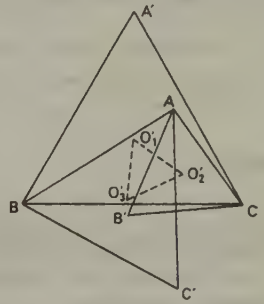
- *Problema de Napoleón-Mascheroni.* — Construcción del centro de un círculo dado únicamente con la ayuda de un compás y en un número finito de operaciones. Este problema es posible con seis arcos de círculo solamente:

1) dados un punto A del círculo, un arco de radio cualquiera de donde los puntos B y C;
2) arco de círculo de centro C y de radio AB;
3) arco de círculo de centro B y de radio AB, de donde el punto D;
4) arco de círculo de centro D y de radio DA, de donde E y F;
5) arco de círculo de centro E, de radio EA;
6) arco de círculo de centro F, de radio EA, de donde el punto O buscado.




• *Triángulo de Napoleón de un triángulo.* — A partir de un triángulo ABC se trazan los tres triángulos equiláteros que tienen un lado común con el triángulo ABC y tales que cada triángulo equilátero y el triángulo ABC sean de una y otra parte de su lado común. El triángulo $O_1O_2O_3$, cuyos vértices son los centros de gravedad de cada triángulo equilátero, es un triángulo exterior de Napoleón. Igualmente se define el triángulo interior de Napoleón considerando los tres triángulos equiláteros con un lado común con el triángulo ABC y situados del mismo lado que el triángulo ABC con relación al lado común.




## *n*-aria

• *Operación n-aria sobre un conjunto* E. — Toda aplicación de $E^n$ en E. Para $n = 2$ (respectivamente, $n = 3$) se dice que es binaria (respectivamente, ternaria). Una ley de composición interna sobre un conjunto E es una operación binaria.

• *Relación n-aria sobre un conjunto* E. — Relación de $E^i$ hacia $E^j$, donde $i$ y $j$ son enteros no nulos tales que $i + j = n$. Su grafo es una parte de $E^n$. En el caso $n = 2$, la relación se llama binaria y ternaria en el caso $n = 3$. Una ley de composición interna sobre un conjunto E es una relación ternaria sobre E.

## Natural

Empleado a veces como sinónimo de número entero natural.

• *Logaritmo natural.* — Empleado a veces como sinónimo de logaritmo neperiano.

• *Morfismo $\Phi_X$ natural en* X. — V. FUNCTORIAL (Morfismo).

• *Número entero natural.* — Cardinal de un conjunto finito. Su conjunto N (que es infinito) verifica los axiomas de Peano. Existe sobre N una adición y una multiplicación (distributiva en relación a la adición) tales que (N, +) y (N, . ) sean monoides conmutativos unitarios de elemento neutro respectivo 0 y 1. Se define igualmente sobre N un buen orden compatible con la adición y la multiplicación; 0 es entonces el elemento más pequeño de N que no admite elemento más grande.
Los enteros naturales pueden ser descritos en diferentes sistemas de numeración; el más utilizado es la numeración de posición en base diez. Permite escribir todo natural con la ayuda de los diez símbolos, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (V. NUMERACIÓN). El estudio matemático de los números naturales se remonta principalmente a la época pitagórica. Tuvo a menudo huellas de misticismo, incluso en un pasado reciente: «Dios hizo los números enteros, todo el resto es obra del hombre» (Kronecker). Los enteros naturales se identifican a los enteros positivos: elementos positivos del anillo Z de los enteros (V. ENTERO).
V. PREDECESOR, PRIMO, SUCESOR.

• *Transformación natural.* — Sinónimo de morfismo functorial.
V. FUNCTORIAL.

## Necesaria

• *Condición necesaria.* — Si la proposición $P \Rightarrow Q$ es verdadera, se dice que la proposición Q es una condición necesaria para que la proposición P sea verdadera. Una condición necesaria para que un entero diferente de 2 sea primo es que sea impar; esta condición no es evidentemente suficiente: el número impar 9 no es primo.

• *Condición necesaria y suficiente.* — Si la proposición $P \Leftrightarrow Q$ es verdadera, se dice que la proposición Q es una condición necesaria y suficiente para que la proposición P sea verdadera. Por ejemplo, una condición necesaria y suficiente para que el grupo cíclico $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sea simple es que $n$ sea un entero primo.

## Nefroide

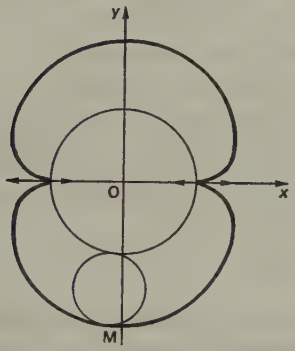
Epicicloide de dos puntos de retroceso cuya forma es la de un riñón, de ahí su nombre. Es engendrada por una circunferencia de radio $a$ que gira exteriormente sin deslizar sobre una circunferencia de radio $2a$ y de centro O. En relación a un sistema de referencias ortonormado de origen O, admite la ecuación cartesiana:

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4 y^2$$

y está representado paramétricamente por:

$$x = a(3\cos t - \cos 3t) \quad \text{e} \quad y = a(3\ \text{sen}\, t - \text{sen}\, 3t)$$

Su longitud es $24a$ y su área $12\pi a^2$.
Sea un espejo esférico sobre el que caen rayos paralelos al eje. La envolvente de los radios reflejados en un plano que contiene el eje es un trozo de nefroide.




## Negación

Conector simbolizado por ¬ (se lee «no»).

| A | ¬A |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

La proposición ¬A es verdadera si y solamente si la proposición A es falsa. V. PROPOSICIONAL (Cálculo), VERDAD.

- *Negación alternada.* — V. SHEFFER.
- *Doble negación.* — V. PEIRCE.

## Negativa

- *Forma cuadrática negativa.* — Forma cuadrática $q$ sobre un R-espacio vectorial E tal que $q(x) \leqslant 0$ para todo $x \in E$. La forma $q$ es definida negativa si $q(x) < 0$ para todo vector no nulo $x$ de E.

- *Forma sesquilineal hermitiana negativa.* — Forma sesquilineal hermitiana compleja $\varphi$ sobre un C-espacio vectorial E tal que $\varphi(x, x)$ sea un número real negativo para todo $x \in E$. La forma $\varphi$ es definida negativa si $\varphi(x, x) < 0$ para todo vector no nulo $x$ de E. Una forma definida negativa es una forma negativa no degenerada.

• *Función numérica negativa definida sobre un conjunto* E. — Función $f$ tal que $f(x)$ sea negativo para todo $x \in E$.

• *Función bilineal simétrica negativa.* — Forma bilineal simétrica $\varphi$ sobre un R-espacio vectorial E tal que $\varphi(x, x) \leqslant 0$ para todo $x \in E$. La forma $\varphi$ es definida negativa si $\varphi(x, x) < 0$ para todo vector no nulo $x$ de E. Una forma definida negativa es una forma negativa no degenerada.

• *Homotecia negativa.* — Homotecia de razón negativa.

• *Inversión negativa.* — Inversión de potencia negativa.

• *Isometría afín negativa.* — Isometría afín retrógrada.

• *Ley binomial negativa.* — Sea $n \in \mathbf{N}^*$, sean $p$ y $q$ dos números reales estrictamente positivos tales que $p + q = 1$ y sea X una variable aleatoria discreta cuyo conjunto de valores tomados es N. La ley de probabilidad de X se denomina ley binomial negativa de orden $n$ y de parámetro $p$ si su función de distribución es definida por:

$$P(X = k) = \binom{n + k - 1}{n - 1} p^n q^k.$$

Tenemos $E[X] = nq/p$ y $V[X] = nq/p^2$. En una sucesión de repeticiones independientes de una prueba que conduce a dos sucesos A y $\overline{A}$ de probabilidades respectivas $p$ y $q$, $P(X = k)$ es la probabilidad para que A se realice para la $n$-ésima vez a la $(n + k)$-ésima prueba. Para $n = 1$ se obtiene la ley geométrica o ley de Pascal.

• *Podaria negativa.* — Sinónimo de antipodaria.

• *Superficie de curvatura total negativa o de curvatura negativa.* — Superficie cuya curvatura total en cada punto es negativa. Ejemplos: la hiperboloide de una napa y la seudoesfera.

## Negativo

• *Angulo recto negativo.* — V. RECTO.

• *Automorfismo negativo.* — Automorfismo retrógrado.

• *Número negativo.* — Número real inferior a cero. El opuesto de un número negativo es un número positivo y a la recíproca. El único número positivo y negativo es 0.

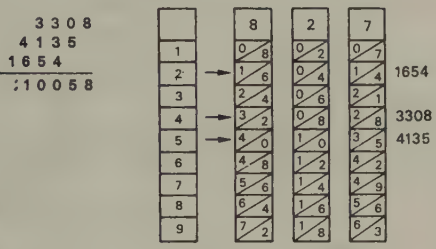
• *Sentido negativo.* — Sea un eje $(O, D, \vec{i})$ orientado por $\vec{i}$. Una base $\vec{j}$ de la recta vectorial engendrada por $\vec{i}$ es retrógrada si y solamente si existe un real estrictamente negativo $\alpha$ tal que $\vec{j} = \alpha\vec{i}$. Se dice que $\vec{j}$ tiene un sentido negativo.
Más generalmente, se dice a veces que una base retrógrada tiene un sentido negativo.

## Neil, William (1637-1670)

• *Parábola de Neil.* — Parábola semi-cúbica de ecuación $y = |a \cdot x^{3/2}$.

**Néper,** John **(o Napier),** barón de Merchiston (1550-1617)

• *Barras, tablillas o regletas de Néper.* — Barras imaginadas por Néper para efectuar las operaciones numéricas. Cada regleta es una columna de la tabla de Pitágoras de la multiplicación (V. ARABE). El esquema que representamos a continuación indica sumariamente cómo la multiplicación de 827 por 254 se remite a la adición siguiente:




• *Fórmulas de Néper.* — Sean A, B y C las medidas de los ángulos y *a*, *b*, *c* las distancias esféricas de un triángulo esférico. Las fórmulas de Néper se enuncian:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

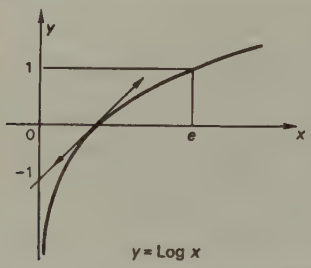
V. DELAMBRE.

• *Número de Néper.* — Base del logaritmo neperiano, simbolizado por *e* (inicial de la palabra exponencial).
V. «*e*».

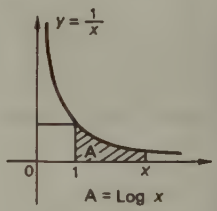
## Neperiano

• *Antilogaritmo neperiano.* — Nombre que se da a veces a la función exponencial $x \mapsto e^x$, función recíproca del logaritmo neperiano.

• *Logaritmo neperiano.* — Logaritmo de base $e$ representado por Log o ln. Ocupa un lugar fundamental en matemática, en particular en análisis, porque su derivada en $x$ es $1/x$.




$y = \text{Log } x$




$A = \text{Log } x$

V. DESARROLLO (en serie entera), LOGARITMO.

## n-ésima

• *Derivada n-ésima.* — Derivada de orden $n$.
V. DERIVADA.

• *Ecuación general del n-ésimo grado.* — Ecuación de la forma:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde los coeficientes $a_i$ son complejos. Según la teoría de Galois, para $n \geqslant 5$ tal ecuación no es necesariamente resoluble por radicales, mientras que las ecuaciones de grado $n < 5$ lo son (V. RESOLUBLE).
V. CARDAN, CUARTO, GALOIS, PRIMO, QUINTO, SEGUNDO, TERCERO.

• *Potencia n-ésima.* — V. POTENCIA.

• *Raíz n-ésima.* — V. RAÍZ.

• *Radical n-ésima.* — V. RADICAL.

## Neumann, Janos (o Johann) (1903-1957)

V. CONJUNTO.

## Neumann, Carl Gottfried (1832-1925)

• *Funciones de Neumann.* — Son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel. La función de Neumann $N_\lambda$ de índice $\lambda \in \mathbf{R}$ es definida por:

$$N_\lambda(x) = \frac{\cos \lambda\pi J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)}{\operatorname{sen} \lambda\pi}$$

para $\lambda$ no entero y par:

$$N_n(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} N_{n+\varepsilon}(x)$$

para $n$ entero, donde $J_\lambda$ es la función de Bessel de índice $\lambda$.
V. BESSEL, HANKEL.

• *Problema de Dini-Neumann.* — V. DINI.

• *Teorema de Neumann.* — Toda función $f$ holomorfa en el disco $|z| < R$ puede ser desarrollada en serie bajo la forma:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n J_n(z)$$

donde $J_n$ es la función de Bessel de índice $n$.
Esta serie converge absoluta y uniformemente en todo disco compacto $|z| \leqslant R_1 < R$.

## Neutro

• *Elemento neutro a izquierda (resp. a derecha) para una ley $*$ sobre un conjunto* E. — Elemento $e$ de E tal que, para todo $x \in E$, tengamos $e * x = x$ (resp. $x * e = x$). Para la exponenciación $(x, y) \mapsto x^y$ definida sobre $\mathbf{R}_+^*$, el número real 1 es neutro a derecha pero no a izquierda: para todo número real $x > 0$, tenemos $x^1 = x$ pero $1^x \neq x$.

• *Elemento neutro para una ley de composición interna $*$ sobre un conjunto* E. — Elemento $e$ de E neutro a izquierda y a derecha, es decir, tal que $e * x = x * e = x$ para todo $x \in E$. En N, Z, Q, R, el elemento neutro para la adición es 0 y el elemento neutro para la multiplicación es 1. La aplicación idéntica $I_E$ sobre un conjunto E es el elemento neutro de la ley de composición de las aplicaciones sobre el conjunto de las biyecciones de E sobre E. Para una ley dada sobre un conjunto, no existe necesariamente un elemento neutro; cuando existe uno, es único.

## Newton, Isaac (1642-1727)

• *Recta de Newton.* — Recta que pasa por los puntos medios de las tres diagonales de un cuadrilátero completo.

• *Fórmula o binomio de Newton.* — Fórmula que da el desarrollo de $(a + b)^n$, donde $a$ y $b$ son elementos de un anillo A conmutativo y donde $n \in \mathbf{N}^*$:

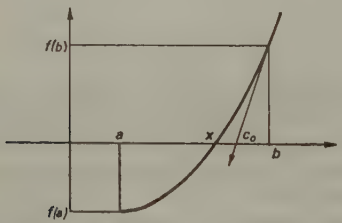
$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Los números $\binom{n}{p}$ se llaman coeficientes binomiales.
V. BINOMIAL, COMBINACIÓN.

• *Mecánica de Newton.* — La mecánica de Newton estudia en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ el movimiento de sistemas mecánicos definidos por su energía

potencial y las masas de sus puntos. Utiliza el principio de determinismo de Newton que afirma que el movimiento de un sistema está perfectamente determinado por su posición inicial y el campo de sus velocidades iniciales; en particular, la aceleración es función de la posición y de la velocidad iniciales. La mecánica de Newton permite estudiar completamente los movimientos de aceleración central y muchos otros movimientos importantes.

• *Método de Newton.* — Sea $f$ una función real continua, dos veces derivable sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}$ y que admite una raíz $x$ y una sola en el intervalo $]\!]a, b[\![$. El método de Newton permite obtener un valor aproximado de $x$. Si en $b$, por ejemplo, el producto $f(b) \cdot f''(b)$ es positivo, la tangente a la curva en el punto de abscisa $b$ se encuentra con el eje de las abscisas en un punto de abscisas $c_0$ comprendido entre $x$ y $b$. Al repetir el procedimiento a partir del intervalo $[\![a, c_0]\!]$ se define una sucesión $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ de aproximaciones de $x$ cada vez más precisas. Método también llamado Método de Newton-Cotes.




• *Notaciones de Newton.* — La derivada de una función numérica $f$ se simboliza frecuentemente desde Newton $f'$ o $f^{(1)}$ y la derivada $n$-ésima de $f$ se representa $f^{(n)}$. También se designa $f^{(0)} = f$. Sea $g$ una función de $n$ variables:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto g(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Su $k$-ésima derivada parcial se simboliza por $g'_{x_j}$, la $j$-ésima derivada parcial de $g'_{x_k}$ se representa $g''_{x_k x_j}$, y así sucesivamente. V. LEIBNIZ (Notaciones de).

• *Relación de Newton.* — Si cuatro puntos A, B, C, D de un eje forman una división armónica y si I es el punto medio de AB, la relación de Newton afirma que:

$$\overline{AI}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

• *Tridente de Newton.* — Curva de la forma: $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.

## Newtoniana

• *Mecánica de Newton.*

## Newtoniano

• *Potencial newtoniano.* — Sea un sólido S y un punto A de coordenadas

cartesianas $(a, b, c)$: se llama potencial newtoniano de S con relación a A a la integral de superficie:

$$\iiint_S \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)}\, dx\, dy\, dz$$

donde $r(x, y, z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ es la distancia de A al punto de S de coordenadas $(x, y, z)$ y donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad en ese mismo punto.

## n-grafo

V. GRAFO.

## Ni

V. PEIRCE.

## Nicomedes (siglo II a. de C.)

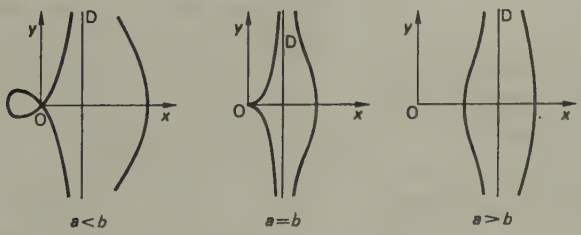
• *Concoide de Nicomedes.* — Concoide de una recta D en relación a un punto O situado a la distancia $a > 0$ de la recta. En coordenadas polares donde O es el polo, su ecuación es de la forma:

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} \pm b,$$

y en relación a un sistema de referencias cartesiano de origen O admite por ecuación:

$$(x-a)^2 y^2 = x^2(b + a - x)(b - a + x).$$

Es una curva circular imaginada por Nicomedes para la resolución del problema de la trisección del ángulo y el de la duplicación del cubo. Reviste diferentes aspectos según los casos $b < a$, $b = a$ o $b > a$.




## Nielsen, Jakob (1890-1959)

• *Teorema de Nielsen-Schreier.* — Todo sub-grupo de un grupo libre es un grupo libre.

## Nilpotente

• *Elemento nilpotente de un anillo* A. — Elemento $a$ de A tal que existe un entero $n > 0$ que verifica $a^n = 0$. En Z/8Z, el elemento 2 es nilpotente, puesto que $2^3 = 0$.

• *Endomorfismo nilpotente de un* K*-espacio vectorial* E. — Elemento nilpotente del anillo de los endomorfismos de E.

• *Matriz nilpotente.* — Elemento nilpotente de un anillo de matrices cuadradas. Ejemplo: la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; los valores propios de tal matriz son nulos.

## Nim

• *Juego del Nim.* — Este juego de dos jugadores utiliza $n$ objetos repartidos en $p$ montones no necesariamente iguales. A cada jugada, cada jugador escoge un montón y quita de él tantos objetos como desea (al menos debe coger uno, está permitido coger todo el montón). El jugador que gana es aquél que recoge el (o los) objetos del último montón. Una estrategia permite a uno de los dos jugadores ganar con toda seguridad. Consiste en jugar de forma que deje al adversario una repartición de objetos que verifique la propiedad siguiente: estando escritos los números de objetos de cada montón en el sistema binario, la suma de las cifras de igual rango de esos números debe ser 0 ó 2. Si el jugador no puede realizar ese reparto, está en posición de perdedor; por el contrario, si puede realizarla, lo podrá igualmente para todas las jugadas siguientes y ganará. Por ejemplo, si un jugador tiene ante él tres montones de quince, ocho y once objetos, la situación es favorable para él; puede coger, por ejemplo, doce objetos del montón 1.

| | *Antes de tirar* | | *Después de tirar* | |
|---|---|---|---|---|
| | *Sistema decimal* | *Binario* | *Sistema decimal* | *Binario* |
| Primer montón..... | 15 | 1111 | 3 | 11 |
| Segundo montón ..... | 8 | 1000 | 8 | 1000 |
| Tercer montón ..... | 11 | 1011 | 11 | 1011 |
| | | ↓↓↓↓ | | ↓↓↓↓ |
| Suma de las cifras..... | | 3122 | | 2022 |

Desde la película *El año pasado en Marienbad*, donde los personajes lo practican, el juego de Nim es conocido por el gran público bajo el nombre de juego de Marienbad.

## Nivel

• *Curvas de nivel de una superficie de ecuación cartesiana* $z = f(x, y)$. — Secciones de la superficie mediante planos de ecuaciones $z = a$, $a \in \mathbf{R}$.
V. PENDIENTE (Líneas de).

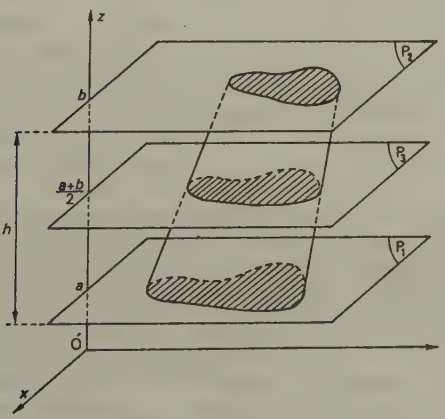
• *Superficies de nivel.* — Sea $f$ una función real definida y diferenciable sobre un abierto de $\mathbf{R}^3$. Se llama superficies de nivel a las superficies de ecuaciones $f(x, y, z) = a$, $a \in \mathbf{R}$.

## Niveles

• *Fórmula de los tres niveles.* — Sean un sólido limitado por una superficie $\Sigma$ y dos planos paralelos $P_1$ y $P_2$ de lados $a$ y $b$ con relación a un plano $(xOy)$ de referencia y sea P un plano cualquiera de cota $z (a \leqslant z \leqslant b)$ paralelo a $P_1$ y $P_2$. Si el área $S(z)$ de la sección del sólido por P es una función polinómica de grado inferior o igual a 3, el volumen del sólido viene dado por la fórmula:

$$V = \frac{h}{6}\left[ S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

donde $h$ es la distancia que separa $P_1$ y $P_2$ y donde $S(a)$, $S(b)$ y $S\left(\frac{a+b}{2}\right)$ son respectivamente las áreas de las secciones por los planos $P_1$, $P_2$ y el plano $P_3$ equidistante de $P_1$ y $P_2$.




## n-lineal

V. MULTILINEAL.

## No

Designa, en lógica, el conector «negación» simbolizado por ¬.

## No creciente

• *Función o sucesión no creciente.* — Sinónimo desusado e ilógico de función o sucesión decreciente.

## Nodal

• *Cúbica nodal.* — Cúbica que admite un punto doble en el que las tangentes son distintas. El folium de Descartes, la trisectriz de Mac Laurin y la cúbica de Tschirnhausen son cúbicas nodales.

## No decreciente

• *Función o sucesión no decreciente.* — Sinónimo desusado e ilógico de función o sucesión creciente.

## No degenerada

• *Forma sesquilineal no degenerada.* — V. DEGENERADA.

• *Forma bilineal no degenerada.* — V. DEGENERADA.

## No descompuesta

• *Cuádrica no descompuesta.* — V. ESPECIE.

## No estándar

• *Análisis no estándar.* — Skolem mostró en 1934 que ningún sistema axiomático dado en un lenguaje del primer orden puede caracterizar la aritmética clásica de forma categórica; se puede construir un anillo $^*\mathbf{Z}$ conteniendo $\mathbf{Z}$, que verifique los axiomas de $\mathbf{Z}$ y que posea elementos «infinitamente grandes». Desarrollado a partir de 1960 por A. Robinson y W. A. Luxemburg, el análisis no estándar permite un cálculo sobre infinitamente pequeños y sobre infinitamente grandes a la manera de Leibniz. Puede obtenerse un modelo no estándar $^*\mathbf{R}$ de $\mathbf{R}$ definiendo, por ejemplo, $^*\mathbf{R}$ como una ultrapotencia de $\mathbf{R}$. De este modo se obtiene un cuerpo ordenado no arquimediano que contiene $\mathbf{R}$, elementos infinitamente pequeños y elementos infinitamente grandes. Para algunos problemas, es más sencillo trabajar en $^*\mathbf{R}$ que en $\mathbf{R}$; especialmente $f: {}^*\mathbf{R} \to {}^*\mathbf{R}$ es continua en $a \in {}^*\mathbf{R}$ si para todo $\varepsilon$ infinitamente pequeño $f(a+\varepsilon) - f(a)$ es un infinitamente pequeño; esto parece traducir la continuidad de forma más «intuitiva» que la definición estándar para las funciones

numéricas. El análisis no estándar se aplica desde ahora en matemáticas, en teoría de la medida y en probabilidad.
V. ESTÁNDAR (Elemento), GRANDES (Infinitamente), NO ESTÁNDAR (Elementos), PEQUEÑOS (Infinitamente), ULTRAPOTENCIA.

• *Demostración no estándar de una propiedad.* — Demostración de esa propiedad en $^*\mathbf{Z}$ o en $^*\mathbf{R}$.

• *Elemento no estándar de* $^*\mathbf{Z}$ *o de* $^*\mathbf{R}$. — Elementos de $^*\mathbf{Z} - \mathbf{Z}$ o de $^*\mathbf{R} - \mathbf{R}$.

• *Enteros no estándar.* — Elementos de $^*\mathbf{Z} - \mathbf{Z}$.

• *Números reales no estándar.* — Elementos de $^*\mathbf{R} - \mathbf{R}$.

## Noetheriano (procede de Nöther, Emmy) (1882-1935)

• *Anillo noetheriano a derecha (resp. a izquierda).* — Anillo unitario del que todo ideal a derecha (resp. a izquierda) admite una familia generatriz finita, es decir, si toda sucesión creciente de ideales a derecha (resp. a izquierda) es estacionaria. Si A es conmutativo se habla de anillo noetheriano. Todo anillo principal es noetheriano, así como $A[X_1, ..., X_n]$ si A es noetheriano (Hilbert) o $\mathbf{Z}[i\sqrt{5}]$.
V. ARTINIANO.

## No euclídiana

• *Geometría no euclídea.* — Geometría para la que el quinto postulado de Euclides relativo a las paralelas es reemplazado por otro postulado.
Como nuevo postulado, si se exige que por un punto exterior a una recta no se pueda trazar ninguna paralela a esa recta, se obtiene la geometría no euclídea de Riemann llamada también elíptica. Si por el contrario, se exige que por un punto exterior a una recta se puedan trazar dos paralelas distintas, se demuestra entonces que por ese punto se puede trazar una infinidad de paralelas y se obtiene la geometría no euclídea de Lobatchevsky-Bolyai, llamada hiperbólica. La geometría proyectiva rechaza el quinto postulado de Euclides pero no lo reemplaza por ningún otro. Debido a ello, en general no es calificada de no euclídea, aunque sea distinta de la geometría euclídea. Existen muchas otras geometrías diferentes de la geometría euclídea (geometrías no arquimédicas, no legendrianas, semi-euclídeas, etcétera); se las obtiene al modificar o al suprimir uno o varios de los axiomas de Hilbert de la geometría euclídea.
V. EUCLIDEA, LOBATCHEVSKI, RIEMANN.

F. LL.

## No focal

V. FOCAL.

## Nomografía

Técnica de cálculo numérico que utiliza sistemas de curvas que generalizan los antiguos ábacos y se llaman nomogramas.

## Nomograma

Sistema de curvas que permiten mediante simple lectura y ayudándose de una regla efectuar ciertos cálculos numéricos. Sea una relación entre $n$ variables. A cada una de ellas se hace corresponder una familia de puntos o de curvas llamadas isópletas y a cada isópleta se une un valor numérico de tal forma que, si se conocen los valores de $(n - 1)$ de las variables que entran en la relación, el valor de la $n$-ésima aparece por una simple lectura. Por ejemplo, la tabla de multiplicación puede representarse a partir de la relación $z = xy$ por un nomograma que admite tres familias de isópletas. En ciertos casos se puede transformar ventajosamente por anamorfosis las isópletas curvas en isópletas rectas. Los nomogramas se utilizan sobre todo en aplicaciones científicas, técnicas, industriales o económicas, pero su construcción deriva de trabajos matemáticos.

## No o

V. PEIRCE.

## No orientable

• *Superficie no orientable.* — Superficie que no se puede orientar. En ciertos casos, semejante superficie puede ser orientada localmente, no obstante. La cinta de Möbius es no orientable. Intuitivamente, una figura F asimétrica dibujada sobre una superficie de esa clase se encuentra invertida tras un deslizamiento efectuado siempre en el mismo sentido hasta su retorno a la región inicial ocupada por F.
V. KLEIN, MÖBIUS, ORIENTABLE.

## No orientado

• *Angulo no orientado.* — V. ORIENTADO.

• *Grafo no orientado.* — V. ORIENTADO.

## Norma

• *Norma sobre un espacio vectorial real o complejo* E. — Aplicación que se simboliza por $x \mapsto ||x||$ de E en $\mathbf{R}_+$ que posee las siguientes propiedades:

1) Para que el vector $x$ de E sea nulo, es preciso y suficiente que $||x|| = 0$ (axioma de separación).
2) Para todo vector $x$ de E y todo escalar $\alpha$, tenemos $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$.
3) Para todo par $(x, y)$ de vectores de E, tenemos $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (desigualdad triangular).

Sobre el espacio de las funciones reales continuas sobre $[\![0, 1]\!]$ la aplicación $f \mapsto ||f||_1$ definida por:

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

es una norma.
V. DISTANCIA EUCLÍDEA, HERMITIANA.

• *Norma de la convergencia en media.* — V. MEDIA.

• *Norma de la convergencia en media cuadrática.* — V. CUADRÁTICA.

• *Norma de la convergencia uniforme.* — V. UNIFORME.

## Normado

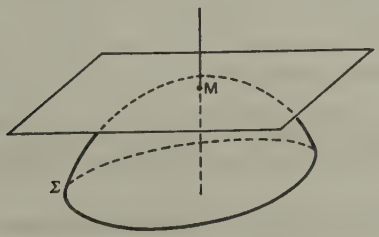
• *Espacio vectorial normado.* — Espacio vectorial provisto de una norma.
V. METRIZABLE (Espacio).

• *Vector normado.* — Se dice a veces de un vector $x$ tal que $||x|| = 1$.

## Normal

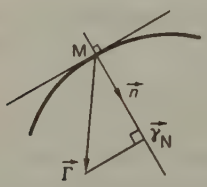
• *Normal de una curva* C *en un punto* M *de* C. — Recta que pasa por M y está contenida en el plano normal en M a la curva.
V. BINORMAL, PRINCIPAL.

• *Normal de una superficie (resp. una hipersuperficie)* $\Sigma$ *en un punto* M *de* $\Sigma$. — Recta perpendicular en M al plano (resp. al hiperplano) tangente en M de $\Sigma$.
$\Sigma$.
V. NORMAL (Vector).




• *Aceleración normal de un móvil puntual* M. — Componente $\gamma_N$ del vector aceleración $\vec{\Gamma}$ sobre el vector normal $\vec{n}$ del triedro de Frenet. Su valor es $\gamma_N = \frac{v^2}{R}$, siendo $v$ la velocidad de M y R el radio de curvatura en M de la

trayectoria. El vector $\vec{\gamma}_N = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ está siempre dirigido hacia el centro de curvatura. Se dice que es centrípeto.




• *Convergencia normal de una serie en un espacio vectorial normado* E. — Se dice que una serie de término general $U_n \in E$ es normalmente convergente si la serie de números reales de término general $||U_n||$ converge en **R**. Si E es igual a **R** o a **C** provisto de la norma $z \mapsto |z|$, las series normalmente convergentes son las series absolutamente convergentes. Si E es completo, toda serie normalmente convergente es convergente.
V. WEIERSTRASS.

• *Curvatura normal.* — Sean $(\vec{t}, \vec{\gamma}, \vec{v})$ los tres vectores del triedro de Darboux en un punto M de una curva $\Gamma$ trazada sobre una superficie $\Sigma$ del espacio orientado $\mathbf{R}^3$. El número real:

$$c_n = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} = -\vec{t} \cdot \frac{d\vec{v}}{ds}$$

(donde $s$ es la abscisa curvilínea sobre $\Gamma$) se llama curvatura normal de $\Gamma$ en M.

• *Derivada normal.* — Sea $f$ una función real definida sobre $\mathbf{R}^n$, sea $\Sigma$ una superficie orientada de $\mathbf{R}^n$ y sea $\vec{n}$ el vector unitario normal en M de $\Sigma$ que indica la orientación escogida sobre $\Sigma$. Se llama derivada normal de $f$ en M a la derivada, representada $\frac{df}{dn}$, de $f$ en M en la dirección de $\vec{n}$. Tenemos $\frac{df}{dn} = \overrightarrow{\text{grad}}\ f \cdot \vec{n}$.

• *Ecuación en forma normal de Euler de una recta.* — V. EULER.

• *Endomorfismo normal.* — Dado un K-espacio vectorial E provisto de una forma sesquilineal hermitiana (o bilineal simétrica) no degenerada $\varphi$, se llama endomorfismo normal de E a un endomorfismo $u$ de E que conmuta con su adjunto: $u \circ u^* = u^* \circ u$.

• *Espacio normal.* — Espacio topológico E separado en el sentido de Hausdorff y que verifica el axioma $[T_4]$ de separación:

$[T_4]$: para todo par de cerrados disjuntos $F_1$ y $F_2$ existen dos abiertos disjuntos $U_1$ y $U_2$ tales que $F_1 \subset U_1$ y $F_2 \subset U_2$.
V. SEPARACIÓN, URYSHON.

● *Forma normal de Legendre de una integral elíptica.* — V. LEGENDRE.

● *Forma normal de un juego.* — Un juego se juega en la forma normal cuando cada jugador escoge en el punto de partida una estrategia. La presentación de un juego en forma normal se utiliza en teoría. En la práctica, es raro que un juego sea jugado en esa forma.
V. EXTENSIVA (Forma).

● *Ley normal o ley de Gauss o ley de Laplace-Gauss.* — Sean $\mu$ y $\sigma$ dos números reales. Se denomina ley normal de parámetros $\mu$ y $\sigma$ la ley de probabilidad, simbolizada por $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, de una variable aleatoria X absolutamente continua cuya densidad de probabilidad viene definida sobre **R** por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Tenemos $E[X] = \mu$ y $V[X] = \sigma^2$.
V. CENTRADO (Teorema del límite).

● *Ley normal centrada reducida.* — Ley normal $\mathcal{N}(0, 1)$. Es la ley de una variable centrada reducida X asociada a una variable aleatoria normal. Su densidad de probabilidad está definida por:

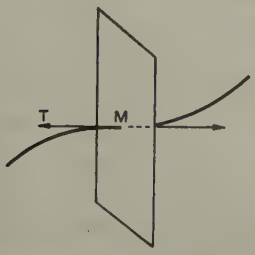
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

y está representada gráficamente por la curva de Gauss.
V. GAUSS.

● *Matriz normal.* — Matriz cuadrada M de elementos complejos tal que $M^*M = MM^*$, donde $M^*$ designa la adjunta de M. Por ejemplo, toda matriz hermitiana es normal.

● *Número normal.* — V. NORMALES.

● *Plano normal en un punto* M *de una curva que admite una tangente* T *en* M. — Plano perpendicular en M a la tangente T.



• *Sub-grupo normal.* — Sinónimo de sub-grupo distinguido.

• *Variable aleatoria normal.* — Variable aleatoria cuya ley de probabilidad es una ley normal.

• *Vector normal en un punto* M *de un arco geométrico* $\Gamma$ *de clase* $C^k(k \geqslant 2)$ *sin puntos estacionarios.* — Vector director de la normal principal en M. El vector $\vec{n}$ de la base $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ del triedro de Frenet es normal. Sea $\sigma$ la abscisa curvilínea, sobre la indicatriz esférica, del punto P tal que $\overrightarrow{OP} = \vec{t}$; el vector $\frac{d\vec{t}}{d\sigma}$ es un vector unitario normal en M.
V. BINORMAL.

• *Vector normal en un punto* M *de una hipersuperficie* $\Sigma$ *de* $\mathbf{R}^n$. — Vector director de la normal en M al hiperplano tangente en M de $\Sigma$. Si la ecuación de la hipersuperficie $\Sigma$ es $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ con $F \in \mathbf{R}[X_1, X_2, ..., X_n]$, el vector:

$$\vec{V}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(M) ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}(M)\right)$$

es un vector normal al punto $M(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma$.
V. TANGENTE (Hiperplano).

• *Vector normal en un punto* M *de una superficie.* — Vector director de la normal en M a la superficie.

## Normales

• *Números normales.* — Nombres dados a los productos por 100 de aproximaciones (desviación maximal 1,3 %) de los términos de las series de Renard (V. RENARD). Las aproximaciones 3,15 y 1,40 escogidas respectivamente para $\sqrt[10]{10^5}$ y $\sqrt[20]{10^3}$ son utilizadas como aproximaciones de $\pi$ y de $\sqrt{2}$. Estos números utilizados para cálculos aproximados rápidos evitan la utilización de logaritmos; la idea de base descansa, como para los logaritmos, en una correspondencia entre una progresión geométrica y una progresión aritmética.

Números normales utilizados en la industria

| *Indice* | $R_5$ | *Indice* | $R_{10}$ | *Indice* | $R_{20}$ | *Indice* | $R_{40}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | | | | | | 1 | 1,06 |
| | | | | 1 | 1,12 | 2 | 1,12 |
| | | | | | | 3 | 1,18 |
| | | 1 | 1,25 | 2 | 1,25 | 4 | 1,25 |
| | | | | | | 5 | 1,32 |
| | | | | 3 | 1,40 | 6 | 1,40 |
| | | | | | | 7 | 1,50 |
| 1 | 1,60 | 2 | 1,60 | 4 | 1,60 | 8 | 1,60 |
| | | | | | | 9 | 1,70 |
| | | | | 5 | 1,80 | 10 | 1,80 |
| | | | | | | 11 | 1,90 |
| | | 3 | 2,00 | 6 | 2,00 | 12 | 2,00 |
| | | | | | | 13 | 2,12 |
| | | | | 7 | 2,24 | 14 | 2,24 |
| | | | | | | 15 | 2,36 |

| Indice | $R_8$ | Indice | $R_{32}$ | Indice | $R_{80}$ | Indice | $R_{40}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 16 | 2,50 |
| | | | | | | 17 | 2,65 |
| | | | | 9 | 2,80 | 18 | 2,80 |
| | | | | | | 19 | 3,00 |
| | | 5 | 3,15 | 10 | 3,15 | 20 | 3,15 |
| | | | | | | 21 | 3,35 |
| | | | | 11 | 3,55 | 22 | 3,55 |
| | | | | | | 23 | 3,75 |
| 3 | 4,00 | 6 | 4,00 | 12 | 4,00 | 24 | 4,00 |
| | | | | | | 25 | 4,25 |
| | | | | 13 | 4,50 | 26 | 4,50 |
| | | | | | | 27 | 4,75 |
| | | 7 | 5,00 | 14 | 5,00 | 28 | 5,00 |
| | | | | | | 29 | 5,30 |
| | | | | 15 | 5,60 | 30 | 5,60 |
| | | | | | | 31 | 6,00 |
| 4 | 6,30 | 8 | 6,30 | 16 | 6,30 | 32 | 6,30 |
| | | | | | | 33 | 6,70 |
| | | | | 17 | 7,10 | 34 | 7,10 |
| | | | | | | 35 | 7,50 |
| | | 9 | 8,00 | 18 | 8,00 | 36 | 8,00 |
| | | | | | | 37 | 8,50 |
| | | | | 19 | 9,00 | 38 | 9,00 |
| | | | | | | 39 | 9,50 |
| 5 | 10,00 | 10 | 10,00 | 20 | 10,00 | 40 | 10,00 |

## Normalizador

• *Normalizador de una parte* H *de un grupo* (G, ·). — Conjunto de elementos $x \in G$ tales que $x^{-1}Hx = H$, donde $x^{-1}Hx$ designa el conjunto de elementos de la forma $x^{-1}yx$ con $y \in H$. El normalizador de un sub-grupo H de G es el mayor sub-grupo de G en el que H es distinguido.
V. SYLOW (Teoremas de).

## Normalmente

• *Familia normalmente sumable.* — V. SUMABLE.

• *Serie normalmente convergente.* — V. NORMAL (Convergencia).

## Normas

• *Normas equivalentes.* — V. EQUIVALENTES.

• *Normas sobre* $\mathbf{R}^n$. — Todas las normas sobre $\mathbf{R}^n$ son equivalentes. Se suele representar $\| \ \|_\infty$ y $\| \ \|_p$, para todo número real $p \geqslant 1$, las normas definidas sobre $\mathbf{R}^n$ por:

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_{i \in [1,n]} |x_i|,$$

y

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

En particular:

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

y

$$\|(x_1, x_2, ..., x_n\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

## Notables

• *Identidades notables.* — V. IDENTIDAD.

## Notación

V. ADITIVA, FACTORIAL, HARDY, LANDAU, LEIBNIZ, MONGE, MULTIPLICATIVA, NEWTON, POLACA.

• *Notación de Lukasiewicz.* — Notación polaca.

## No y

V. SHEFFER.

## NPL (New Programming Language)

Nombre dado en sus inicios al lenguaje de programación PL1.

## Nube

• *Nube de puntos.* — Representación de una serie estadística doble. Sean X e Y los dos caracteres estudiados sobre una muestra de N individuos $u_1$, $u_2$, ..., $u_N$. Para $i = 1, 2, ..., N$, se llevan al plano referido a un sistema de referencia cartesiano los puntos de coordenadas $(x_i, y_i)$, donde $x_i$ e $y_i$ son los valores tomados por X e Y para el individuo $u_i$. El aspecto de la nube informa sobre la correlación entre X e Y. Cuando X e Y no son independientes, la nube afecta la forma de una elipse tanto más aplastada cuanto más fuerte es la correlación.
V. REGRESIÓN.

## Núcleo

• *Núcleo en análisis funcional.* — Sea $[\![a, b]\!]$ un intervalo de **R**. Se denomina núcleo a una función $K:(s, t) \mapsto K(s, t)$ definida sobre $D = [\![a, b]\!] \times [\![a, b]\!]$ de valores en **R** que es integrable y de cuadrado integrable sobre el dominio D. Los núcleos intervienen en particular en el estudio de ciertas ecuaciones integrales.
V. DEGENERADA, DIRICHLET, FEJER, FREDHOLM, GOURSAT, POISSON, VOLTERRA.

• *Núcleo de una ecuación integral.* — V. INTEGRAL.

• *Núcleo de una forma bilineal simétrica (resp. de una forma sesquilineal hermitiana) $\varphi$ sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Núcleo de la forma lineal (resp. semilineal) asociada a $\varphi$. Es la ortogonal de E para $\varphi$.

• *Núcleo de una aplicación semi-lineal f de un* K*-espacio vectorial* E *en un* K*-espacio vectorial* F. — Conjunto $\mathrm{Ker}\, f$ de los vectores de E cuya imagen es el vector nulo de F. Es un sub-espacio vectorial de E.

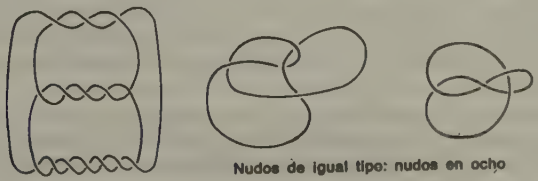
• *Núcleo de un homomorfismo de anillos f de* A *en* B. — Ideal, simbolizado por $\mathrm{Ker}\, f$ de los elementos de A cuya imagen por $f$ es nula.

• *Núcleo de una aplicación lineal f de un* A*-módulo* E *en un* A*-módulo* F. — Sub-A-módulo de E, simbolizado por $\mathrm{Ker} f$, de los vectores de E cuya imagen por $f$ es nula. La aplicación $f$ es inyectiva si y solamente si $\mathrm{Ker} f = 0$.
V. CO-IMAGEN, CONÚCLEO, IMAGEN, ISOMORFISMO (Teorema de).

• *Núcleo de un homomorfismo de grupo f de* G *en* H. — Subgrupo distinguido en G, simbolizado por $\mathrm{Ker} f$, de los elementos $x$ de G cuya imagen por $f$ es el elemento neutro de H. Así, el núcleo del homomorfismo canónico del grupo lineal afín $GA(\mathbf{R}^3)$ en el grupo lineal $GL(\mathbf{R}^3)$ es el grupo de translaciones de $\mathbf{R}^3$.

## Nudo

El sentido matemático de este término difiere del sentido en el lenguaje corriente (navegación, embalajes). Se llama nudo a un sub-espacio N de $\mathbf{R}^3$ homeomorfo a un círculo tal que todo punto $x$ de N posea un entorno $\Omega$ en $\mathbf{R}^3$ para el que $(\Omega, \Omega \cap N)$ es homeomorfo a la figura formada por una bola y uno de sus diámetros. Intuitivamente, se obtiene un nudo tomando un bramante (eventualmente enmañarado) y volviendo a pegar sus dos extremidades. No existe definición analítica general correcta de un nudo.
V. ENCAJADO, GÉNERO, HOPPE, REFLEXIVO, TIPO, TRÉBOL, TRIVIAL.



Nudos de igual tipo: nudos en ocho

• *Grupo de un nudo.* — Se llama grupo de un nudo N el grupo de Poincaré G de $R^3 - N$. Es, en general, no conmutativo. Esta noción es debida a Dehn (1915). Dos nudos de igual tipo tienen igual grupo, pero la recíproca no es cierta.

• *Invariantes de un nudo.* — Propiedades de un nudo o número afectado a un nudo que quedan iguales para todos los nudos de igual tipo. El grupo y el género de un nudo son invariantes. El número mínimal de agujeros *n* de un toro de *n* agujeros sobre el que se puede dibujar el nudo sin que haya crecimientos es igualmente un invariante.

• *Nudo de un grafo.* — Vértice que admite más de dos arcos incidentes.

## Nudos

• *Nudos equivalentes.* — Nudos de igual tipo.
V. TIPO.

• *Teoría de los nudos.* — Rama de la topología de la que Dehn y Alexander fueron los principales fundadores. Consiste en reconocer los nudos de igual tipo y en clasificar los tipos a partir de invariantes geométricos y topológicos. El compuesto de dos nudos se define abriéndolos y uniendo entre sí los extremos libres. Esta ley induce, sobre el conjunto de los tipos de nudos, una ley de composición interna, que goza de propiedades análogas a la multiplicación de los enteros y que permite desarrollar una «aritmética de nudos» introduciendo las nociones de divisores de un nudo, de nudo primo, etcétera.

## Nueve

• *Círculo de los nueve puntos.* — Sinónimo de círculo de Euler.

## Nula

• *Aplicación nula sobre un conjunto* E *de valores en un conjunto* F *donde figura un elemento nulo* 0. — Aplicación constante de E en F que a todo elemento *x* de E hace corresponder 0.

• *Hipótesis nula.* — V. TEST (de hipótesis).

• *Juegos de suma nula.* — Juegos para los que los intereses de los jugadores que conciernen a los resultados del juego son opuestos. En tales juegos, la ganancia de un jugador se obtiene únicamente a expensas de otros jugadores que participan en el juego. Al final de un juego de este tipo, la suma de las ganancias es nula (siendo una pérdida una ganancia negativa). El juego de ajedrez es un juego de suma nula. Un juego de negociación (cliente-comerciante, por ejemplo) no es de suma nula (en caso de desacuerdo, los dos jugadores pierden).

• *Matriz nula.* — Matriz cuyos elementos todos son nulos. En el conjunto de las matrices (*n*, *p*) de elementos en un cuerpo K, la matriz nula (*n*, *p*) es elemento neutro de la adición de las matrices.

• *Superficie de curvatura total nula o de curvatura nula.* — Superficie cuya curvatura total es nula en cada punto. Ejemplos: un plano, un cilindro.

## Nullstellensatz

V. HILBERT (Teorema de los ceros de).

## Nulo

Igual a cero.
V. CERO.

• *Angulo nulo.* — Elemento neutro del grupo de ángulos.

• *Elemento nulo de un retículo* (E, $\leqslant$). — Elemento de E, simbolizado por 0 tal que $0 \leqslant x$ para todo $x \in E$. Tal elemento no existe necesariamente. El retículo ($\mathfrak{P}(E)$, $\subset$) admite $\phi$ como elemento nulo.
V. UNIVERSAL (Elemento).

• *Polinomio nulo.* — Polinomio cuyos coeficientes todos son nulos. Es el elemento neutro para la adición de polinomios.

• *Vector nulo de un A-módulo.* — Elemento neutro del grupo aditivo de ese módulo. En un módulo libre es el vector cuyas componentes todas son nulas sobre cualquier base.

## Numerable

• *Conjunto numerable.* — Conjunto equipotente a una parte de N. Todo conjunto infinito numerable es equipotente a N; es el caso del cuerpo de los números racionales. Por el contrario, el cuerpo R de los números reales es infinito pero no numerable.

• *Potencia del numerable.* — Potencia de N. El conjunto Q tiene la potencia del numerable. Se suele simbolizar $\aleph_0$ ($\text{Aleph}_0$).

## Numeración

• *Base de un sistema de numeración de posición.* — V. POSICIÓN.

• *Sistema de numeración.* — Conjunto de los métodos y convenciones que permiten escribir y nombrar a todo número entero natural, y por extensión a los demás números, así como efectuar cálculos sobre ellos. Aunque los números naturales sean definidos de manera intrínseca como cardinales finitos, se pueden imaginar numerosos sistemas de escritura. El más «simple» consistiría en asociar un signo a cada número entero. Las diferentes civilizaciones han propuesto sistemas muy variados. Ya los Babilonios utilizaban un sistema próximo al sistema sexagesimal. Un primer progreso consistió en la introducción de sistemas aditivos: por ejemplo, en el sistema egipcio: $\mathcal{C}$ designa 100,

⋂ designa 10 y | la unidad. Pero también ahí se necesitan muchos símbolos. El progreso decisivo fue marcado por la numeración de posición y del cero. Desde el punto de vista de las matemáticas puras, la mejor base de un sistema de numeración de posición sería un número primo (distinto de 1), por ejemplo: 7, 11, 13 ó 17, porque conduciría a algoritmos aritméticos de mayor uniformidad. Por el contrario, desde el punto de vista práctico y sobre todo para la vida corriente y las actividades comerciales o sociales, una buena base debe tener muchos divisores. Aunque sea el más utilizado, el sistema decimal quizá no sea el más práctico. Algunos proponen el sistema duodecimal (que tiene más divisores que 10), que ya se utiliza en las manipulaciones por docenas de objetos. Para los ordenadores que trabajan en binario, una potencia de 2 es el ideal. El sistema octal convendría a la vez a los ordenadores y a las capacidades mentales humanas y por esa razón se considera a veces como un sistema de futuro.

V. BINARIO, DECIMAL, DUODECIMAL, OCTAL, POSICIÓN, SEXAGESIMAL.

## Numerador

V. FRACCIONARIO (Escritura).

## Numérica

Que se representa por un número. Para las sucesiones o las series, numérica quiere decir con coeficientes en **C** (o **R**) por oposición a sucesión o serie de funciones.

• *Alea numérica.* — Sinónimo de variable aleatoria.

• *Análisis o cálculo numérico.* — Métodos y técnicas prácticas (cálculo numérico), generalmente programables sobre ordenador, que permiten la resolución aproximada de problemas de orígenes diversos y que se expresan, por ejemplo, mediante la resolución de ecuaciones diferenciales o el cálculo de integrales. Se busca un resultado no teórico, sino cifrado, acompañado de una estimación en la precisión. Los problemas teóricos planteados por el análisis numérico conciernen a numerosas ramas de las matemáticas y contribuyen permanentemente a su desarrollo.

• *Cálculo numérico.* — En general, sinónimo de análisis numérico. Se emplea a veces por oposición a cálculo literal.

• *Recta numérica.* — Conjunto ordenado de los números reales **R**.
V. ACABADA.

• *Función numérica.* — Función de valores reales.
V. NEGATIVA, POSITIVA, PRODUCTO, SUMA, TANGENTES.

• *Tabla numérica.* — Correspondencia entre listas de números. El caso más frecuente es la correspondencia entre dos listas, utilizada, por ejemplo, para indicar los valores tomados por una función numérica cuando la variable toma valores decimales: funciones trigonométricas, logaritmos, funciones hiperbólicas, etc. Las tablas de Pitágoras de leyes definidas sobre conjuntos de números constituyen tablas numéricas entre tres listas de números.

## Número

Entre los griegos, un número era una cantidad o una medida representadas, bien por un entero natural, bien por una relación de dos enteros naturales.
Puede considerarse un número como una abstracción ligada a conjuntos de objetos y que se escinde, por consideración de los conjuntos infinitos, en dos conceptos diferentes.
En la actualidad, en matemática, se define un número como elemento de un conjunto de números que deben verificar ciertas propiedades. Así es como se han definido los conjunto N, Z, Q, R o C cuya construcción se hace por etapas sucesivas a partir del conjunto N de enteros naturales.
Ciertos números intervienen frecuentemente en numerosos dominios de las matemáticas; se les reserva una notación particular: $e$, $\pi$ (pi), $i$, $j$, C, etc. (V. NÚMEROS).
V. ABUNDANTE, ALGEBRAICO, BELL, C, CARDINAL, CARMICHAËL, CERO, CICLOMÁTICO, COCICLOMÁTICO, COMA, COMPLEJO, COMPUESTO, CROMÁTICO, DECIMAL, DEFICIENTE, DERIVADO, $e$, ENTERO, ESTABILIDAD, EXPONENCIAL, FERMAT, FIGURADO, FOLKMAN, GÖDEL, HETERÓMECO, $i$, IMAGINARIO, IMPAR (Entero), IRRACIONAL, IRREGULAR (Primo), $j$, MAHLER, MÓDULO (M), NATURAL (Entero), NEGATIVO, NÉPER, OBLONGO, ORDINAL, ORO, PAR (Entero), PERFECTO, PI, POSITIVO, PRIMARIO, PRIMO, PSEUDOPRIMO, RACIONAL, RAÍZ, REAL, REGULAR (Primo), RELATIVO (Entero), SKEWES, TRANSCENDENTE, TUCKERMAN, UNIMODULAR (Complejo).

• *Número de aplicaciones de un conjunto finito en otro.* — Sean E un conjunto que tiene $p$ elementos y F un conjunto que tiene $n$ elementos. El número de aplicaciones de E en F es $n^p$. Si $p \leqslant n$, el número de aplicaciones inyectivas de E en F es $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$. Si $p \geqslant n$, el número de aplicaciones sobreyectivas de E sobre F es $n!\,\sigma_p^n$, donde $\sigma_p^n$ es un número de Stirling de segunda especie. Si $p = n$, el número de aplicaciones biyectivas de E sobre F es $n!$.

• *Número de variaciones.* — V. VARIACIÓN.

• *Número de combinaciones.* — V. COMBINACIÓN.

• *Número de partes de un conjunto finito.* — Hay $2^n$ partes en un conjunto con $n$ elementos.

• *Número de permutaciones sobre un conjunto finito.* — V. PERMUTACIÓN.

## Números

• V. ADITIVA (Teoría), ALGEBRAICAMENTE (Dependientes, independientes), ALEATORIOS, AMABLES, AZAR, BERNOULLI, CATALÁN, CAYLEY, COMPLEJOS, CULLEN, DECIMALES, FIBONACCI, FRACCIONARIAS, GEMELOS (Primos), GENOCCHI, GRANDES, HAMILTON, HETEROGÉNEOS, HOMOGÉNEOS, LIOUVILLE, MERSENNE, NORMALES, $p$-ÁDICOS, PIRAMIDALES, PITAGÓRICOS, PISOT, POLIGONALES, PROPORCIONALES, RACIONALES, REALES, STIRLING.

• *Números aleatorios o números fortuitos.* — Números al azar.

• *Números amistosos.* — Números amigos.

• *Números cuadrados, hexagonales, pentagonales, triangulares.* — V. POLIGONALES (Números).

• *Números fastos.* — Números afortunados.

• *Números pseudo-aleatorios.* — V. AZAR (Números del).

• *Cuerpos de números algebraicos.* — V. ALGEBRAICOS.

• *Designación y escritura de los números.* — Los primeros números encontrados y utilizados por la humanidad fueron pequeños enteros. Mientras las colecciones de objetos que representaban no excedían de los diez dedos de la mano era fácil (después de la invención de la palabra) distinguirlos dando a cada uno un nombre diferente y (después del nacimiento de la escritura) escribiéndolos en numeración monaria.
Cuando, debido a los progresos materiales e intelectuales de las civilizaciones, esos usos se manifestaron insuficientes, diversos sistemas de numeración hicieron su aparición y el sistema decimal (numeración de posición de base 10 con el cero) terminó por imponerse.
V. NUMERACIÓN.
Nuevos progresos —tanto en matemáticas puras como en las ciencias experimentales, las técnicas e incluso algunas actividades corrientes— hicieron necesaria la invención de nuevos sistemas de escritura por la representación de grandísimos enteros. El *Arenario* de Arquímedes pretendía dar cuenta (suponiendo que puedan contarse) del número de granos de arena de una playa mediante la notación exponencial. El mismo procedimiento era válido no sólo para dominios comparables (todas las gotas de agua de los océanos, todos los átomos del conjunto de las galaxias observables, ...) y para dominios más vastos donde penetraban los ordenadores más potentes. Los extremos superiores de las capacidades de los ordenadores han sido franqueados con ocasión de números que aparecen en matemáticas puras, en combinatoria sobre todo. La escritura de estos números en notación exponencial podría exigir exponentes cuya superposición en escalones superaría —si hubiera que imprimirlos con los caracteres de este diccionario— la mayor distancia astronómica conocida. Es necesario dar nuevos pasos en la escritura de tales números.

V. KNUTH.

• *Ley de los grandes números.* — V. GRANDES.

• *Teoría de números.* — Parte de la aritmética elemental —con la que, en el lenguaje corriente, está tomada como sinónimo—; la teoría de números chocó en sus inicios con los mecanismos de la divisibilidad antes de vincularse a las ecuaciones diofantianas. Fue fecundada por el estudio de las funciones elípticas y modulares y, más recientemente, por la teoría de los grupos, por la geometría algebraica y por la introducción de los números *p*-ádicos que ponen al desnudo la participación de todas las grandes estructuras sub-yacentes de otras ramas de las matemáticas puras. Los sectores más tradicionales de la teoría de números, donde todavía subsisten conjeturas célebres, apasionan siempre a los aficionados que sospechan mal las dificultades en las que rápidamente se desemboca y que no son abordables sino al precio de un altísimo tecnicismo.

F. LL.

## n-upla

Sean $n$ conjuntos $E_1, E_2, ..., E_n$ ($n \geqslant 2$). Los elementos del producto cartesiano $\prod_{i=1}^{n} E_i$ de la familia $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ se llaman $n$-uplas. Un $n$-upla de elementos tomados respectivamente en $E_1, E_2, ..., E_n$ es, por tanto, una aplicación $f$ de $I = \{1, 2, ..., n\}$ en $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ tal que $f(i)$ pertenezca a $E_i$ para todo $i \in I$. Una $n$-upla se representa $(a_1, a_2, ..., a_n)$, donde $a_i = f(i)$. Una 2-upla es un par. Una 3-upla se llama triplete y una 4-upla cuadruplete.

## n-uplete

Sinónimo de $n$-upla.

## Nutación

- *Angulo de nutación.* — V. EULER.

## O

En el lenguaje corriente, esta palabra tiene dos sentidos bien distintos: un sentido exclusivo como en la afirmación «el menú propone frutas o helados», y un sentido inclusivo como en la frase, «los suizos hablan el francés, el alemán o el italiano». En el primer caso significa «bien frutas, bien helado», en el segundo caso no está excluido que algunos suizos hablen dos lenguas, incluso tres. Es en ese sentido inclusivo en el que «o» se utiliza la mayor parte de las veces en matemática y en lógica. Cuando se utiliza en su sentido exclusivo, por lo general, se precisa.

V. DISYUNCIÓN, EXCLUSIVO, INCLUSIVO, SIMÉTRICA (Diferencia).

## Objeto

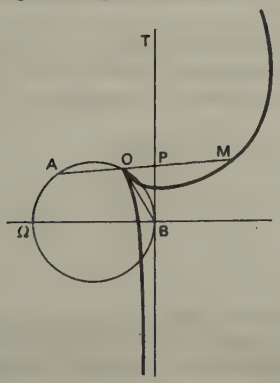
V. CATEGORÍA (Objeto de una), FRACTAL (Objeto).

## Oblicua/o

Sinónimo de recta oblicua.

• *Afinidad oblicua.* — Afinidad cuya dirección no es ortogonal al eje.

• *Cisoide oblicua.* — Cúbica circular unicursal que tiene un punto de retroceso. Se la puede engendrar a partir de una tangente T a una circunferencia de



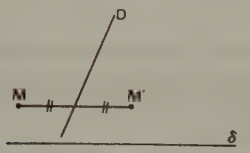
radio $a$ y de un punto O de la circunferencia. La construcción es la siguiente: toda recta que pasa por O y no paralela a T corta la circunferencia en A y la tangente en P; cuando A describe la circunferencia, el punto M tal que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AP}$ describe una cisoide oblicua de la que O es el punto de retroceso. En un sistema de referencia ortonormado cuyo origen es O y cuyo eje de abscisas coincide con OB, su ecuación cartesiana es $(x^2 + y^2)\ (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) = 2ay^2$, donde $\alpha$ es el ángulo $(\widehat{B\Omega}, \widehat{BO})$. La podaria de una parábola con relación a uno de sus puntos O es una cisoide oblicua que admite O como punto de retroceso.
V. DIOCLES, RECTA.

● *Recta oblicua en relación a otra.* — Utilizado por oposición a recta perpendicular a otra.

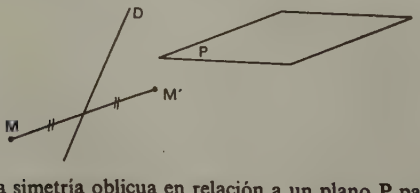
● *Proyección oblicua.* — Sinónimo de proyección utilizado por oposición a las proyecciones particulares que son las proyecciones ortogonales en el caso de un espacio euclídeo.

● *Estrofoide oblicua.* — Inversa de una hipérbola por una inversión de la que el centro O está sobre la hipérbola. Es una cúbica circular de punto doble O. En el caso en que O sea un vértice de la hipérbola, la estrofoide admite un eje de simetría y se llama estrofoide recta.
V. RECTA.

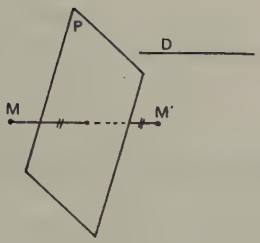
● *Simetría oblicua en un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Sinónimo de simetría utilizado por oposición a las simetrías particulares que son las simetrías ortogonales en el caso en que $\mathcal{E}$ es euclídeo (V. SIMETRÍA).
En $\mathbf{R}^2$, la simetría oblicua de dirección $\delta$, con relación a una recta D que no tiene la dirección $\delta$, asocia a todo punto M de $\mathbf{R}^2$ el punto M′ tal que el segmento MM′ sea de dirección $\delta$ y tenga su punto medio sobre D. Es una afinidad particular.




En $\mathbf{R}^3$, la simetría oblicua con relación a una recta D y paralelamente a un plano P no paralelo a D asocia a todo punto M de $\mathbf{R}^3$ el punto M′ tal que el segmento MM′ coincida con una paralela a P, que corte a D y tenga su punto medio sobre D.




En $\mathbf{R}^3$, la simetría oblicua en relación a un plano P paralelamente a una recta D no paralela a P asocia a todo punto M de $\mathbf{R}^3$ el punto M′ tal que el segmento MM′ está sobre una paralela a D y tenga su punto medio en P.

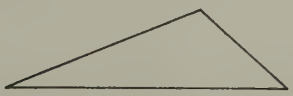



## Oblongo

• *Número oblongo o número heterómeco.* — Entero de la forma $n(n + 1)$, donde $n \in \mathbb{N}$.

## Obtusángulo

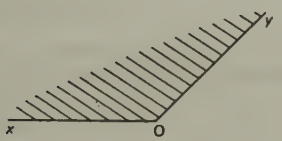
• *Triángulo obtusángulo.* — Triángulo del que uno de los ángulos es obtuso. Un triángulo obtusángulo siempre puede ser cortado en siete triángulos acutángulos. Igualmente, siempre puede ser recortado en ocho triángulos acutángulos isósceles.



## Obtuso

• *Angulo obtuso.* — Angulo cuyo coseno es estrictamente negativo.
V. AGUDO, GEOMETRÍA DEL, RECTO.

• *Sector angular obtuso.* — Sector angular saliente (Ox, Oy) tal que el ángulo $\widehat{(Ox, Oy)}$ sea obtuso.




## Octaedro

Poliedro de ocho caras. Existe un octaedro regular: admite seis vértices, doce aristas y sus ocho caras son triángulos equiláteros isométricos. En función de la longitud de la arista $a$ la superficie del octaedro es:

$$S = 2\sqrt{3}\,a^2 = 3{,}4641\,.\,a^2$$

y su volumen es:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3 = 0{,}4714\,.\,a^3.$$

Véase en VOLÚMENES estas medidas en función del radio de la esfera circunscrita.

• *Octaedro de Bricard.* — V. BRICARD.

## Octal

• *Sistema octal.* — Sistema de numeración de base ocho considerado por algunos como un sistema del futuro.

## Octavas

• *Octavas u octavas de Cayley.* — V. CAYLEY.

## Octica

Curva algebraica plana de orden 8.

## Octógono

Polígono plano de ocho lados.

Octógono convexo regular.

## Octonión

• *Octonión u octonión de Cayley.* — V. CAYLEY.

## Ocurrencia

• *Ocurrencia de un símbolo en un ensamblaje.* — Cada aparición de ese símbolo.

## Of

• *Of de un espacio topológico.* — Se dice a veces de una parte abierta y cerrada.

## Oficiales

• *Problema de los 36 oficiales de Euler.* — Colocar en un tablero cuadrado 36 oficiales representando 6 grados en 6 regimientos de manera que cada fila contenga todos los grados y todos los regimientos. Es el problema de los cuadrados greco-latinos de orden 6. Euler constató (1782) y G. Tarry demostró (1900) que este problema no tiene solución.
V. EULER (Conjetura de).

## Olvidado

• *Functor olvidado.* — Sea $\mathscr{D}$ una subcategoría de una categoría $\mathscr{C}$. El functor que a todo objeto X de $\mathscr{D}$ hace corresponder X objeto de $\mathscr{C}$ y a todo morfisma $u$ de $\mathscr{D}$ hace corresponder $u$ morfismo de $\mathscr{C}$ se denomina functor olvidado de $\mathscr{D}$ en $\mathscr{C}$. El functor olvidado de Gr en Cto asocia a un grupo el conjunto de sus elementos y a un homomorfismo de grupo $f$ la aplicación $f$. Este functor admite un adjunto a izquierda: el functor «grupo libre engendrado por un conjunto».
V. ADJUNTOS, FUNCTOR, LIBRE (Grupo).

## Ombligo

Punto M de una superficie para el que las secciones por un plano normal en M tienen todas el mismo radio de curvatura. Intuitivamente, en el entorno de semejante punto, la superficie tiene la forma de una esfera. Todos los puntos de una esfera son ombligos.

## ω (omega minúscula)

Notación utilizada para el ordinal correspondiente a N provisto de su orden usual; es el ordinal infinito más pequeño. Es un cardinal también simbolizado por $\aleph_1$.
V. CARDINAL, ORDINAL.

## Ω (omega mayúscula)

Notación utilizada para el ordinal no numerable más pequeño. Es un cardinal también representado por $\aleph_i$.
V. CARDINAL, ORDINAL.

## Ondas

• *Ecuación de ondas (no amortiguadas).* — Ecuación de derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Generalización en $\mathbf{R}^3$ de las ecuaciones de las cuerdas y de las membranas vibrantes, interviene en el estudio de la propagación de las vibraciones de débil amplitud en un fluido compresible o también en la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio no conductor de electricidad.

## Operación

Ley de composición en un conjunto de números. Este término se emplea a veces en el sentido más general de ley de composición interna.
V. *n*-ARIO, PRUEBA.

## Operador

Elemento de un dominio de operadores o de un grupo de operadores.
V. ACCIÓN, OPERADORES.

En la enseñanza elemental, se da a este término el sentido intuitivo de «máquina» para insistir en la idea de transformación, por ejemplo, el «operador multiplica por 4».
V. DIFERENCIAL, LINEAL.

## Operadores

• *Dominio de operadores.* V. ACCIÓN.

• *Grupo de operadores.* — Si un grupo G opera sobre un conjunto E, se dice que G es un grupo de operadores sobre E.

## Operante

• *Grupo operante sobre un conjunto.* — Un grupo $(G, *)$ opera sobre un conjunto E si existe una acción o ley externa de G sobre E representada $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, tal que si $x \in E$:

*i*) para todo par $(\alpha, \beta)$ de elementos de G tengamos $\alpha(\beta x) = (\alpha * \beta)x$;
*ii*) si $\varepsilon$ es el elemento neutro de G, entonces $\varepsilon x = x$.

Esta noción, fundamental en geometría, fue uno de los puntos de partida de la teoría de los grupos.
V. FIELMENTE, GRUPO, LIBREMENTE, TRANSITIVAMENTE.

## Operar

V. OPERANTE.

## Operatorio

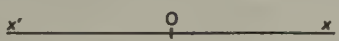
• (Lógica.) *Signo operatorio de un lenguaje.* — V. LENGUAJE.

## Optimum

El valor más favorable de un conjunto de datos numéricos. Esta noción interviene a menudo en investigación operacional y en economía matemática. Ligado al sentido dado a la palabra favorable, un optimum no se trata necesariamente de un maximum o un minimum.
V. MAXIMUM, MINIMUM.
V. PARETO.

## Opuestas

• *Semi-rectas opuestas.* — Dos semi-rectas Ox y Ox' de igual origen O se denominan opuestas si coinciden con una misma recta y si su frontera común se reduce al punto O.




## Opuesto

• *Opuesto de un elemento g de un grupo aditivo* G. — Sinónimo de simétrico de ese elemento. Se le representa por $-g$. La aplicación de G en G definida por $x \mapsto -x$ es involutiva. En (Z, +), por ejemplo, $-(-3) = 3$; el opuesto de un número negativo es un número positivo y a la inversa.
V. OPUESTOS.

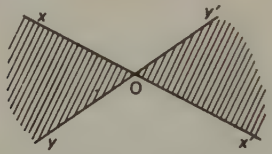
## Opuestos

• *Angulos opuestos por el vértice.* — Empleado abusivamente en lugar de sectores angulares opuestos por el vértice.

• *Elementos opuestos de un grupo aditivo* G. — Elementos $x$ e $y$ de G que verifican $x + y = 0$. El elemento $x$ es el opuesto de $y$ recíprocamente. Ejemplos: dos ángulos del grupo de ángulos se denominan opuestos si su suma es el ángulo nulo; dos matrices M y N de $n$ líneas y $p$ columnas y de elementos en un cuerpo K son opuestos si M + N es la matriz nula, etc.

• *Puntos de circunferencia diametralmente opuestos.* — Puntos M y N de una circunferencia tales que MN sea un diámetro de la circunferencia.

• *Sectores angulares opuestos por el vértice.* — Dos sectores angulares se denominan opuestos por el vértice si tienen igual vértice O y si sus lados son semi-rectas opuestas dos a dos.




## Orbita

Sea (G, •) un grupo que opera sobre un conjunto E. Se denomina órbita de un elemento $x \in E$, el conjunto de los elementos $\alpha x \in E$, donde $\alpha$ describe G. Las órbitas son las clases de la relación de equivalencia $\mathcal{R}$ definida sobre E por $x\mathcal{R}y$ si y solamente si existe $\alpha \in G$ que verifica $y = \alpha x$.

## Orden

• *Orden sobre un conjunto.* — Sinónimo de relación de orden.

• *Orden de una curva algebraica de ecuación cartesiana* $f(x, y) = 0$. — Grado del polinomio $f$.

• *Orden de contacto en* M *de dos superficies (o de dos curvas).* — Número de puntos comunes a las dos superficies confundidas en M y que admiten en ese punto un mismo plano tangente (o una misma recta tangente).

• *Orden de una derivada.* — V. DERIVADA.

• *Orden de una derivada parcial.* — V. PARCIALES (Derivadas).

• *Orden del determinante de una matriz cuadrada.* — Orden de esa matriz.

• *Orden de un desarrollo limitado.* — V. LIMITADO.

• *Orden de una ecuación en derivadas parciales.* — Máximo de los órdenes de las derivadas parciales que figuran en la ecuación.

• *Orden de una ecuación diferencial* $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. — El entero $n$.

• *Orden de un elemento g de un grupo.* — Orden del subgrupo engendrado por $g$.

• *Orden de un grafo o de un hipergrafo.* — Número de sus vértices.

• *Orden de un grupo.* — Cardinal del conjunto de sus elementos.

• *Orden de una matriz cuadrada.* — Número de sus líneas (o de sus columnas).

• *Orden de un momento de una variable aleatoria.* — V. MOMENTO.

• *Orden de multiplicidad.* — V. MULTIPLICIDAD, POLO.

• *Orden de un punto múltiple.* — V. MÚLTIPLE.

• *Orden de un polo.* — V. POLO.

• *Orden de una reducida.* — V. REDUCIDAS.

• *Orden de una superficie algebraica de ecuación cartesiana* $f(x, y, z) = 0$. — Grado del polinomio $f$.

• *Relación de orden sobre un conjunto* E. — Relación binaria sobre E que es reflexiva, transitiva, antisimétrica. La relación de inclusión es una relación de orden sobre $\mathfrak{P}_1(E)$.
V. BUENO, ESTRICTO, LEXICOGRAFÍA, PARCIAL, TOTAL.

• *Tipo de orden.* — V. TIPO.

## Ordenable

Que puede ser ordenado en el sentido de la estructura considerada. El cuerpo C no es un cuerpo ordenable.

## Ordenada

• *Ordenada de un punto* M *en un sistema de referencia cartesiano.* — Segunda coordenada de M en el sistema de referencia.
V. DESCRIPTIVA.

• *Par ordenado.* — Empleado a veces como sinónimo de par.

## Ordenadas

• *Eje de las ordenadas.* — V. CARTESIANO (Sistema de referencia).

## Ordenado

• *Anillo ordenado.* — Anillo (A, +, . ) provisto de una relación de orden $\leqslant$ tal que (A, +) sea un grupo ordenado y tal que, para todo elemento $a \in A$ positivo, $x \leqslant y$ implique $a \,.\, x \leqslant a \,.\, y$ y $x \,.\, a \leqslant y \,.\, a$.

• *Cuerpo ordenado.* — Cuerpo que, en tanto que anillo, es un anillo ordenado. Los cuerpos **Q** y **R** son cuerpos ordenados por su orden usual, pero **C** no es un cuerpo ordenable.

• *Conjunto ordenado.* — Conjunto provisto de una relación de orden.
V. CADENA, FILTRANTE, INTERVALO.

• *Conjunto bien ordenado.* — Conjunto provisto de un buen orden.

• *Conjunto parcialmente ordenado.* — Conjunto provisto de un orden parcial.

• *Conjunto totalmente ordenado.* — Conjunto provisto de un orden total.

• *Grupo ordenado.* — Grupo (G, . ) provisto de una relación de orden tal que $x \leqslant y$ implica $g \,.\, x \leqslant g \,.\, y$ y $x \,.\, g \leqslant y \,.\, g$ para todo $g \in G$.

• *Red ordenada.* — Sinónimo de retículo.

## Ordenador

Calculadora electrónica programable de gran capacidad.

## Ordinal

Extensión de la noción de número que traduce el orden, el rango de un elemento considerado en un conjunto bien ordenado.
Consideremos el conjunto $E = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$. En éste, la pertenencia goza de dos propiedades notables: es un buen orden y todo elemento de E es una parte de E.
Así, $\{\phi, \{\phi\}\} \in E$ y $\{\phi, \{\phi\}\} \subset E$, puesto que $\phi \in E$ y $\{\phi\} \in E$.

Se llama ordinal a todo conjunto $\alpha$ que posee las mismas propiedades: la pertenencia es un buen orden en $\alpha$ y todo elemento de $\alpha$ es una parte de $\alpha$ (se dice que $\alpha$ es un conjunto transitivo). No existe conjunto cuyos elementos sean todos los ordinales.

El orden entre dos ordinales $\alpha$ y $\beta$ está definido por $\alpha \leqslant \beta$ si y solamente si $\alpha \subset \beta$. Para dos ordinales $\alpha$ y $\beta$ distintos, tenemos $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$. Además, todo conjunto formado por ordinales está bien ordenado.
Se representa 0, resp. 1, 2, 3, ..., el ordinal $\phi$ resp. $\{\phi\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$, $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$, ...
Esos son ordinales finitos (V. FINITO) y cardinales (V. CARDINAL).
Para todo ordinal $\alpha$, el conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$ es el ordinal más pequeño estrictamente superior a $\alpha$. Se le representa por $\alpha + 1$ y se le llama el sucesor de $\alpha$, que es a su vez el predecesor de $\alpha + 1$. Los ordinales no vacíos que no son sucesores (es decir, que no tienen predecesores) se denominan ordinales límites; ejemplo: el ordinal infinito más pequeño (V. INFINITO). Para cada conjunto bien ordenado E, existe un isomorfismo, y uno sólo, de conjuntos ordenados de E sobre un ordinal que entonces se denomina ordinal de E.
Los ejemplos que damos a continuación ayudarán al lector a comprender lo que son los ordinales infinitos. Para decir que es el ordinal de N provisto de su buen orden usual, se escribe $\omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Entonces:

$$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, ..., \omega\},$$
$$\omega + 2 = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1\},$$
$$2\omega = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\}$$
$$2\omega + 1 = \{0, 1, 2, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2, ..., 2\omega\}$$
$$\omega^2 = \omega \cup 2\omega \cup 3\omega \cup ...$$

Observamos que $\operatorname{Card}\omega = \operatorname{Card}(\omega + n) = \operatorname{Card}(n\omega) = \operatorname{Card}\omega^n = \aleph_0$. Todos estos ordinales son distintos, pero tienen el mismo cardinal $\aleph_0$. Por el contrario, su conjunto es infinito no numerable y su cardinal es el cardinal más pequeño $\aleph_1$ estrictamente superior a $\aleph_0$.
V. CARDINAL, ENTERO, FINITO, INFINITO, OMEGA, TRANSFINITO.

## Ordinal

• *Suma ordinal.* — Dados dos ordinales $\alpha$ y $\beta$, la suma ordinal es definida, por inducción transfinita, de la forma siguiente:

$$\alpha + 0 = \alpha; \quad \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

si $\beta = \gamma + 1$ se pone $\alpha + \beta = (\alpha + \gamma) + 1$, y si $\beta$ es un ordinal límite, es decir, si:

$$\beta = \bigcup_{i \in I} \beta_i \text{ con } \beta_i < \beta,$$

entonces $\alpha + \beta = \bigcup_{i \in I} (\alpha + \beta_i)$.

Esta suma tiene propiedades distintas de la suma cardinal: por ejemplo, mientras que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ tenemos $\omega + \omega > \omega$; si $1 + \omega = \omega$ por el contrario, $\omega + 1 > \omega$.

## Ordinario

• *Punto ordinario o regular de un arco parametrado* $(I, f)$ de $\mathbf{R}^3$ *de clase* $C^k$ $(k \geqslant 2)$. — Punto M del arco tal que en ese punto los vectores $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = f'(t)$ y $\frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2} = f''(t)$ no sean nulos.

## Organización

• *Organización del trabajo.* — V. TRABAJO.

## Orientable

• *Superficie orientable.* — Superficie que puede orientarse. La esfera es orientable; la cinta de Möbius no es orientable.
V. KLEIN, MÖBIUS, NO ORIENTABLE, ORIENTACIÓN.

• *Superficie localmente orientable.* — Una superficie $\Sigma$ es localmente orientable en $M_0$ si existe una parte de $\Sigma$ abierta y orientable que contiene $M_0$. La cinta de Möbius y la botella de Klein son superficies localmente orientables.

## Orientación

• *Orientación de un arco geométrico* $\Gamma$. — Sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia sobre el conjunto de las representaciones paramétricas de $\Gamma$, definida por $(I, f)\mathcal{R}(I, g)$ si y solamente si existe una biyección creciente $\varphi$ que verifica $g = f \circ \varphi$. Las dos clases de equivalencias de $\mathcal{R}$ constituyen las dos orientaciones posibles de $\Gamma$. Orientar $\Gamma$ es escoger una de esas clases que se simboliza por $\Gamma_+$, simbolizándose la otra por $\Gamma_-$. La orientación de $\Gamma$ se hace en la práctica mediante la elección de una representación paramétrica de $\Gamma$.

• *Orientación de un arco geométrico en el sentido de las abscisas crecientes (resp. decrecientes).* — V. CURVILÍNEA (Abscisa).

• *Orientación de un espacio vectorial* E *real de dimensión finita* $n \geqslant 1$. — Sean dos bases $B_1$ y $B_2$ de E y $M(B_1, B_2)$ la matriz de paso de $B_1$ a $B_2$. La relación $\mathcal{R}$ definida por $B_1 \mathcal{R} B_2$ si y solamente si $\det M(B_1, B_2) > 0$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las bases de E. Orientar el espacio vectorial E es escoger una de las dos clases de equivalencia de esa relación. Las bases que pertenecen a la clase escogida se denominan bases directas. Las otras se denominan bases retrógradas. Dos bases de una misma clase se denominan de igual sentido, dos bases de clases diferentes se denominan de sentido contrario. Si, además, E es euclídeo, los desplazamientos (resp. los antidesplazamientos) transforman toda base ortonormada en una base ortonormada de igual sentido (resp. de sentido contrario).

• *Orientación de una superficie* Σ. — Sea una superficie Σ que admite en todo punto un plano tangente. Se dice que Σ es orientable si para cada punto M de Σ se puede escoger un vector unitario normal $\vec{V}_M$ de manera que la aplicación $f$ de Σ en $\mathbf{R}^3$ definida por $M \mapsto \vec{V}_M$ sea continua. La aplicación $f$ constituye una orientación de Σ; existe una y sólo una orientación distinta definida por la aplicación $g = -f$. Orientar Σ es escoger una de las dos orientaciones $f$ o $g$. En el caso de una superficie cerrada orientable, también se habla de orientación hacia el exterior o hacia el interior de Σ.

## Orientada

• *Superficie orientada.* — V. ORIENTACIÓN.

## Orientado

• *Angulo orientado de un plano euclídeo.* — Sinónimo de ángulo utilizado por oposición a ángulo no orientado. El calificativo «orientado» no es muy afortunado, puesto que no es necesario que el plano euclídeo esté orientado para poder definir los ángulos «orientados».

• *Angulo no orientado de un par* (D, D′) *de dos semirrectas (resp. de dos rectas vectoriales de un plano vectorial euclídeo).* — Orbita del par (D, D′) bajo la acción del grupo ortogonal O(E) que opera sobre el conjunto de los pares de semirrectas (resp. de rectas) de E. Los ángulos no orientados de dos pares $(D_1, D'_1)$ y $(D_2, D'_2)$ son iguales si existe $f \in O(E)$ que verifican $f(D_1) = D_2$ y $f(D'_1) = D'_2$; en particular, los ángulos de (D, D′) y (D′, D) son iguales. V. MEDIDA.

• *Angulo no orientado o ángulo geométrico de dos semirrectas afines* Ax *y* Ay *de un plano afín euclídeo.* — Angulo no orientado, simbolizado por $\widehat{xAy}$ de las semi-rectas vectoriales asociadas de Ax y de Ay. Los ángulos $\widehat{xAy}$ e $\widehat{yAx}$ son

iguales. Los ángulos no orientados $\widehat{xAy}$ y $\widehat{x'A'y'}$ son iguales si y solamente si existe una isometría afín que transforma $Ax$ en $A'x'$ y $Ay$ en $A'y'$.
V. MEDIDA.

● *Angulo no orientado o ángulo geométrico de dos rectas afines de un plano afín euclídeo.* — Angulo no orientado de las rectas vectoriales asociadas a las rectas afines.
V. MEDIDA.

● *Espacio vectorial orientado.* — Espacio vectorial en el que se ha escogido una orientación.

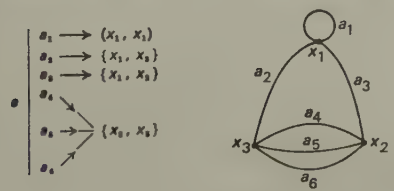
● *Espacio afín orientado.* — Espacio afín cuyo espacio vectorial asociado está orientado.

● *Grafo orientado.* — Sinónimo de grafo para la mayor parte de los autores de lengua francesa; aunque supérfluo, el término orientado se utiliza por oposición a la expresión «grafo no orientado».
V. GRAFO.

● *Grafo (orientado) asociado a un grafo no orientado* G = (S, E). — Grafo (orientado) G' = (S, U), donde la familia U de los arcos se obtiene al asociar a cada arista $a_i = [x, y]$ de G dos arcos $u_{i_1} = (x, y)$ y $u_{i_2} = (y, x)$. Intuitivamente, esto es orientar en los dos sentidos cada arista de G. Este procedimiento permite aplicar a los grafos no orientados conceptos aplicables a los grafos orientados.

● *Grafo no orientado o multígrafo.* — Triplete (S, E, *e*), donde:
— S es un conjunto finito o numerable cuyos elementos se denominan vértices;
— E es un conjunto finito o numerable cuyos elementos se denominan aristas;
— *e* es una aplicación de E en $\mathfrak{P}_2(S) \cup \Delta$, donde $\mathfrak{P}_2(S)$ es el conjunto de los pares de elementos de S y donde $\Delta$ es la diagonal de S × S.

La imagen de una arista *a* por *e* indica los extremos de *a* que pueden ser confundidos en el caso de un rizo. Con frecuencia, una arista de extremo *x* e *y* es idéntica al par $\{x, y\}$ si $x \neq y$ y al par ordenado $(x, y)$ si $x = y$; es simbolizada por $[x, y]$; E es entonces una familia finita o numerable de elementos de $\mathfrak{P}_2(S) \cup \Delta$ y el grafo es representado por (S, E).



• *Grafo no orientado asociado a un grafo (orientado)* G = (S, U). — Grafo no orientado G' = (S, E), donde la familia E de las aristas se obtiene asociando a cada arco $u_i = (x, y)$ de G la arista $a_i = [x, y]$. Intuitivamente, esto es suprimir las orientaciones de los arcos de G. El procedimiento permite aplicar a los grafos orientados conceptos aplicables a los grafos no orientados.

## Origen

• *Origen de un arco de un grafo.* — Extremidad inicial de ese arco.

• *Origen de un bipunto* (A, B). — El punto A.

• *Origen de un camino* $\varphi: [0, 1] \to E$. — El punto $\varphi(0)$.

• *Origen de una semirrecta.* — V. SEMI-RECTA.

• *Origen de un sistema de referencia.* — V. AFÍN (Sistema de referencia).

• *Origen de una sección final.* — V. FINAL.

## Oro

• *Número de oro o divina proporción.* — Límite $\Phi$, cuando $n$ tiende hacia el infinito, del cociente entre dos términos consecutivos $u_{n+1}$ y $u_n$ de la sucesión de Fibonacci. Es un número real algebraico, raíz real positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$. Se encuentra:

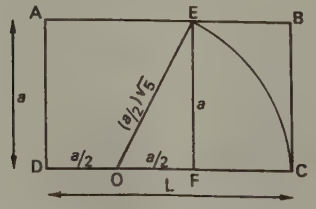
$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \simeq 1{,}618033989.$$

La segunda raíz de esta ecuación es igual a:

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = -\frac{1}{\Phi} = 1 - \Phi \simeq -0{,}618033989.$$

• *Rectángulo de oro.* — Rectángulo en que las longitudes de los lados son respectivamente proporcionales a 1 y al número de oro. Puede construirse un rectángulo de oro ABCD llevando a partir del punto medio O del lado DF de un cuadrado de lado $a$ una circunferencia de radio OE que corta en C el lado DF. La longitud L del rectángulo DCBA verifica:

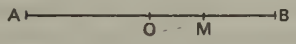
$$\frac{L}{a} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \Phi.$$



También se verifica que el rectángulo CBEF es también un rectángulo de oro: $\frac{a}{L-a} = \Phi$, por tanto, que $\frac{L}{a} = \frac{a}{L-a}$; el punto F realiza la sección aurea del segmento DC.

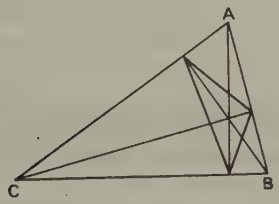
Para los defensores de estéticas tradicionales, el rectángulo de oro constituiría una figura geométrica muy armoniosa a la vista. El Partenón de Atenas se inscribe en un rectángulo de oro. Desbordando estas interpretaciones estéticas, que son asunto de sensibilidad, el número de oro y el rectángulo de oro se introducen en consideraciones místicas, ocultas o simbólicas.

• *Sección de oro o sección aurea.* — Para un segmento AB del punto medio O, el punto M del segmento OB tal que $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$ determinar una sección de oro del segmento AB; se decía antiguamente (Euclides) que M divide el segmento en extrema y media razón.
V. PLATA (Razón de).



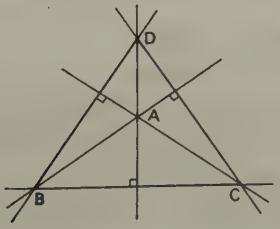

## Ortico

• *Triángulo órtico de un triángulo* ABC. — Triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo ABC. Estas cevianas son bisectrices.
V. FAGNANO (Problema de).



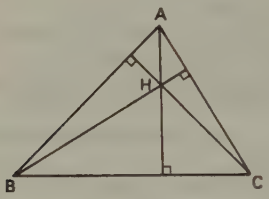

## Ortocéntrico

• *Cuadrángulo ortocéntrico.* — Cuadrángulo del que un vértice es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres.



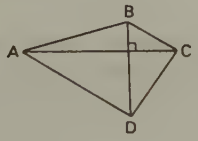
## Ortocentro

• *Ortocentro de un triángulo.* — Punto H común a las tres alturas del triángulo.




## Ortodiagonal

• *Cuadrilátero ortodiagonal.* — Cuadrilátero plano cuyas diagonales son perpendiculares. Por ejemplo, el cuadrado, el pseudo-cuadrado, el rombo, el romboide.




## Ortogonal

• *Ortogonal de un sub-espacio vectorial* F *de un espacio vectorial* E *provisto de una forma sesquilineal hermitiana (o bilineal simétrica) no degenerada.* — El conjunto de los vectores de E ortogonales a F es un sub-espacio vectorial de E simbolizado por $F^{\perp}$ y llamado ortogonal de F.

• *Afinidad ortogonal.* — Afinidad cuya dirección es ortogonal al eje.

• *Automorfismo ortogonal de un* K*-espacio vectorial* E *(*K *de característica diferente de* 2*) provisto de una forma cuadrática q.* — Automorfismo $f$ de E tal que $q(f(x)) = q(x)$ para todo vector $x$ de E. Si E es euclídeo, los automorfismos ortogonales de E son las isometrías de E para la distancia $d(x, y) = \|x - y\|$.

• *Base ortogonal.* — V. ORTOGONAL (Familia).

• *Recta de regresión ortogonal.* — V. REGRESIÓN.

• *Familia ortogonal a un espacio vectorial* E *de dimensión* $n \geqslant 2$ *provisto de una forma sesquilineal hermitiana (o de una forma bilineal simétrica).* — Familia de vectores de E cuyos vectores son ortogonales dos a dos. Si la familia es una base de E, se dice que la base es ortogonal.

• *Grupo ortogonal.* — El conjunto $O(q)$ de los automorfismos ortogonales de

un espacio vectorial E provisto de una forma cuadrática $q$ es un grupo para la ley de composición de las aplicaciones llamado grupo ortogonal de $q$. Si K es un cuerpo, se llama grupo ortogonal de $n$ variables sobre K al grupo ortogonal, representado por $O(n; K)$, de la forma cuadrática sobre $K^n$ definida por:

$$q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Si E es un espacio vectorial euclídeo, el grupo ortogonal de la forma cuadrática de E también se llama grupo ortogonal de E y se representa por O(E).
V. ESPECIAL (Grupo).

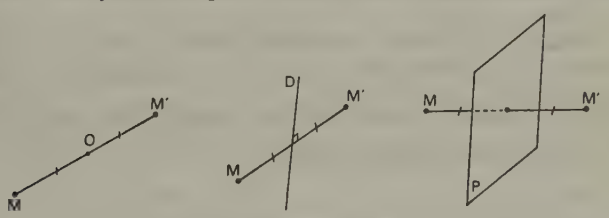
● *Matriz ortogonal.* — Matriz cuadrada inversible M cuya transpuesta ${}^tM$ es igual a la inversa $M^{-1}$.

● *Proyección ortogonal.* — Sean A y B dos variedades lineales afines suplementarias de un espacio afín euclídeo. La proyección de un punto M sobre A paralelamente a B se denomina ortogonal si A y B son ortogonales.

● *Proyector ortogonal.* — Un proyector sobre G paralelamente a H se denomina ortogonal si G y H son dos sub-espacios vectoriales suplementarios ortogonales de un espacio prehilbertiano E.

● *Sistema de referencia de un espacio afín euclídeo.* — Sistema de referencia (O, B), donde B es una base ortogonal.

● *Simetría ortogonal en un espacio afín euclídeo* $\mathcal{E}$. — Simetría de $\mathcal{E}$ que es una isometría.
En $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$, la simetría con relación a un punto O es ortogonal; asocia a todo punto M el punto M′ tal que O sea el punto medio de (M, M′).
En $\mathbf{R}^2$, la simetría ortogonal por relación a una recta D asocia a todo punto $M \in \mathbf{R}^2$ el punto M′ tal que D sea la mediatriz de MM′. Es un antidesplazamiento.
En $\mathbf{R}^3$, la simetría ortogonal por relación a una recta D, también llamada inversión, asocia a $M \in \mathbf{R}^3$ el punto M′ tal que D sea perpendicular al segmento MM′ y lo corte por su centro. Es un desplazamiento.




Simetrías ortogonales en $\mathbf{R}^3$

● *Valor ortogonal a una parte* A *de un espacio vectorial* E *por relación a una forma sesquilineal hermitiana (o bilineal simétrica) no degenerada.* — Vector ortogonal de cada vector de A. V. ORTOGONALES (Vectores).

● *Vector ortogonal a una forma lineal.* — Sea $E^*$ el dual de un espacio vectorial E. Se dice que un vector $x$ de E es ortogonal a una forma lineal $f$ de $E^*$ si $f(x) = 0$.

• *Transformación ortogonal.* — Sinónimo de automorfismo ortogonal.

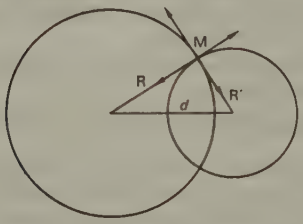
## Ortogonales

• *Círculos ortogonales.* — V. ORTOGONALES (Curvas).

• *Cuadrados latinos ortogonales.* — Sinónimo de cuadrados greco-latinos.

• *Cuaternios ortogonales.* — Dos cuaternios puros $z = xi + yj + zk$ y $z' = x'i + y'j + z'k$ se denominan ortogonales si $xx' + yy' + zz' = 0$.

• *Curvas ortogonales en un punto* M. — Curvas coplanarias secantes en M y cuyas tangentes en M son perpendiculares. Dos círculos coplanarios de radio R y R′ son ortogonales si la distancia $d$ entre sus centros verifica $d^2 = R^2 + R'^2$. V. CONJUGADO (Haz).




• *Direcciones ortogonales.* — Si dos rectas D y D′ son perpendiculares, todas las rectas paralelas a la una son perpendiculares a las rectas paralelas a la otra. Se dice que las direcciones D y D′ son ortogonales.

• *Polinomios ortogonales.* — Sean I un intervalo de $\mathbf{R}$ y $p$ una función de valores en $\mathbf{R}_+$ definida sobre el interior de I, llamada peso o densidad. Se provee el espacio vectorial E de las funciones $f$ tales que $\int_I f^2(x)\ p(x)\ dx$ sea convergente, del producto escalar:

$$(f,\ g) \mapsto \int_I f(x)g(x)p(x)\,dx.$$

Se llama familia de polinomios ortogonales sobre I en relación al peso $p$ a toda sucesión $(P_n)_{n\geq 0}$ de polinomios que pertenecen a E y son dos a dos ortogonales en el sentido de ese producto escalar. Los casos más clásicos son resumidos en el cuadro siguiente.

| *Nombre* | *Intervalo* | *Peso* | *Expresión* |
|---|---|---|---|
| Hermite | $\mathbf{R}$ | $e^{-x^2}$ | $(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$ |
| Jacobi | $]-1, +1[$ | $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $\alpha > -1$ y $\beta > -1$ | $\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}$ $\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n]$ |
| Laguerre | $\mathbf{R}_+$ | $e^{-x}$ | $\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n]$ |
| Legendre | $[-1, +1]$ | 1 | $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ |
| Tchebychev | $]-1, +1[$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}$ $\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$ |
| Ultraesférico | $]-1, +1[$ | $(1-x^2)^\alpha$ | $\frac{(-1)^n}{2^n n!(1-x^2)^\alpha}$ $\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha}]$ |

V. HERMITE, JACOBI, LAGUERRE, LEGENDRE, TCHEBYCHEV, ULTRAESFÉRICOS.

● *Rectas ortogonales de un espacio afín euclídeo.* — Rectas cuyos vectores directores son ortogonales; no son necesariamente secantes.

● *Trayectorias ortogonales de una familia de curvas* $(C_\lambda)_{\lambda\in J}$, *donde* J *es un intervalo de* $\mathbf{R}$. — Curvas ortogonales en cada uno de sus puntos a una curva $C_\lambda$ de la familia. Si las curvas $(C_\lambda)_{\lambda\in J}$ satisfacen a la ecuación diferencial $f(x, y, y') = 0$ sus trayectorias ortogonales satisfacen a la ecuación diferencial:

$$f\left(x, y, \frac{-1}{y'}\right) = 0.$$

● *Variedades lineales afines ortogonales.* — Dos variedades lineales A y A′ de un espacio afín $\mathcal{E}$ asociado a un espacio prehilbertiano E se llaman ortogonales si los subespacios vectoriales de E asociados a A y A′ son ortogonales.

● *Vectores ortogonales.* — Sean $x$ e $y$ dos vectores de un espacio vectorial E y $\varphi$ una forma sesquilineal hermitiana (o una forma bilineal simétrica) sobre E. Se dice que $x$ e $y$ son ortogonales en relación a $\varphi$ si $\varphi(x, y) = 0$.

## Ortogonalidad

Propiedad de ser ortogonal.
V. ORTOGONAL, ORTOGONALES.

## Ortogonalización

Determinación de una base ortogonal en un espacio vectorial provisto de una forma bilineal simétrica o de una forma sesquilineal hermitiana.
V. GAUSS, GRAM-SCHMIDT.

## Ortonormada

• *Base (o familia) ortonormada de un espacio vectorial de dimensión* $n \geqslant 2$ *provisto de una forma sesquilineal hermitiana o de una forma bilineal simétrica* $\varphi$. — Base (o familia) ortogonal del que cada vector $x$ verifica $\varphi(x, x) = 1$.

## Ortonormado

• *Sistema de referencia ortonormado de un espacio afín euclídeo.* — Sistema de referencia (O, B), donde B es una base ortonormada.

## Ortonormal

• *Base (o familia) ortonormal.* — Sinónimo de base (o familia) ortonormada.

## Ortonormalización

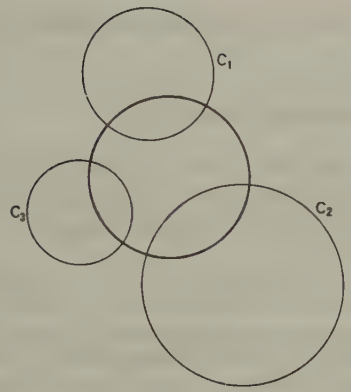
Determinación de una base ortonormada de un espacio euclídeo o hermitiano.
V. GRAM-SCHMIDT.

## Ortóptico

• *Círculo ortóptico.* — Sinónimo de círculo de Monge.

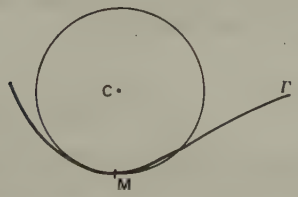
## Ortotómico

• *Círculo ortotómico.* — Círculo que corta ortogonalmente tres círculos dados.

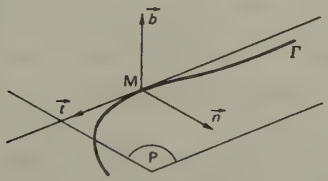



## Osculador

• *Círculo osculador en un punto* M *de un arco geométrico plano* Γ *tal que en* M *la curvatura de* Γ *no sea nula.* — Círculo que pasa por M y con centro en el centro de curvatura de Γ en M. Su radio es igual a |R|, donde R es el radio de curvatura de Γ en M. Entre todos los círculos tangentes a Γ en M, es el único en tener por lo menos tres puntos confundidos comunes con Γ en M.




• *Plano osculador en un punto* M *de una curva izquierda que admite en* M *un triedro de Frenet* $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$. — Plano determinado por la tangente y la normal principal en M.




## Osculatriz

• *Esfera osculatriz en un punto* M *de un arco geométrico izquierdo* Γ *tal que en* M *la curvatura de* Γ *no sea nula.* — Esfera que pasa por M y con centro en el

centro de curvatura de $\Gamma$ en M. Su radio es igual a $|R|$, donde R es el radio de curvatura de $\Gamma$ en M.

## Ostrogradski, Michel Vassilievitch (1801-1861)

• *Teorema y fórmula de Ostrogradski.* — Sea D un dominio de $\mathbf{R}^3$ cuya frontera es una superficie S cuadrable, cerrada, orientable y «suficientemente regular» y sean P, Q y R funciones continuas que admiten derivadas parciales continuas en $D \cup S$. La fórmula de Ostrogradski afirma que:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz = \iint_S (P\alpha + Q\beta + R\gamma)\ d\sigma$$

donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son las componentes del vector unitario $\vec{n}$ normal a S dirigido «hacia el exterior» de S. Si P, Q, R son las componentes de un campo de vector $\vec{V}$, entonces el segundo miembro de la igualdad se denomina el flujo de $\vec{V}$ a través de S.

V. GREEN.

## Ostrowski, Alexandre (1893-1986)

• *Teorema de Ostrowski.* — Toda distancia sobre Q es equivalente, bien a la distancia discreta, bien a la distancia usual, bien a una (y a una sola) distancia *p*-ádica. En otros términos: los completados topológicos de Q son R (para la distancia usual) y los $\mathbf{Q}_p$ (para las distancias *p*-ádicas).

## Ovalo

Nombre dado a ciertas curvas planas que, en general, parecen el contorno de un huevo, de ahí su nombre. No obstante, en ciertos casos su forma es muy diferente.

V. CASSINI, DESCARTES.

# P

## *p*-ádico

Palabra construida sobre el modelo de la palabra mónada.

• *Desarrollo p-ádico.* — Sea $x$ un número $p$-ádico; puede escribirse de forma única:

$$x = \sum_{n \geq m} a_n p^n \text{ con } m \in \mathbf{Z},\ 0 \leqslant a_n \leqslant p-1 \text{ y } a_m \neq 0.$$

Esta expresión es el desarrollo $p$-ádico o desarrollo de Hensel de $x$. Este desarrollo generaliza a los enteros $p$-ádicos el desarrollo en base $p$ (V. DESARROLLO) de los enteros positivos y de los números reales; observemos que, si $x \in \mathbf{N}$ y si $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k$ es su desarrollo en base $p$, entonces su desarrollo $p$-ádico está dado por:

$$\sum_{k \geq 0} b_k p^k \text{ con } b_k = a_k \text{ para } k \leqslant n \text{ y } b_k = 0 \text{ para } k > n.$$

Por el contrario, si $x$ es negativo, su desarrollo $p$-ádico tiene una infinidad de términos no nulos; así:

$$-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \ldots + (p-1)p^n + \ldots \text{ en } \mathbf{Q}_p.$$

El número $p$-ádico $x$ es racional si y solamente si su desarrollo $p$-ádico es periódico.

• *Distancia p-ádica sobre* $\mathbf{Q}_p$. — Distancia definida por $d(x, y) = p^{-v_p(x-y)}$, donde $v_p$ es la valuación $p$-ádica sobre $\mathbf{Q}_p$. Sus propiedades son notables, puesto que es ultramétrico y puesto que una serie converge si y solamente si su término general tiende hacia cero, en el sentido de esta distancia. Así, en $\mathbf{Q}_5$, la serie $\sum_{n \geq 1} 5^n$ es una serie convergente.

• *Topología p-ádica sobre* $\mathbf{Q}$ *o sobre* $\mathbf{Q}_p$. — Topología definida por la distancia $p$-ádica. Por extensión, dado un ideal $\mathfrak{a}$ de un anillo conmutativo A, se llama topología $\mathfrak{a}$-ádica sobre A a la topología obtenida al tomar el conjunto de los $\mathfrak{a}^n$ por sistema fundamental de entornos de cero. Es separada si y solamente si $\bigcap_{n \geq 1} \mathfrak{a}^n = (0)$.

• *Valor absoluto p-ádico.* — Es el valor absoluto definido sobre $\mathbf{Q}_p$ por $|0|_p = 0$ y $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ para $x \neq 0$, donde $v_p$ es la valuación $p$-ádica de $\mathbf{Q}_p$.

Sea $x = \sum_{i=m}^{\infty} a_i p^i$ el desarrollo de Hensel de un número $p$-ádico no nulo, entonces $|x|_p = p^{-m}$ y $v_p(x) = m$.

• *Valuación p-ádica.* — Todo número $p$-ádico $x$ se escribe de forma única $x = up^k$ con $u$ elemento inversible de $\mathbf{Z}_p$ y $k \in \mathbf{Z}$; el entero $k$, representado por $v_p(x)$, es la valuación $p$-ádica de $x$; si se plantea $v_p(0) = \infty$, la función $v_p$ así definida sobre $\mathbf{Q}_p$ es una valuación denominada valuación $p$-ádica.
Su restricción en $\mathbf{Z}$, en $\mathbf{Z}_p$ o en $\mathbf{Q}$ también se llama valuación $p$-ádica de $\mathbf{Z}$, de $\mathbf{Z}_p$ o de $\mathbf{Q}$.

## p-ádicos

• *Anillo de enteros p-ádicos.* — Dado un entero primo $p > 0$, sea $\mathbf{Z}_p$ el conjunto de las sucesiones de enteros $(k_n)_{n \geq 1}$ que verifican para todo $n > 1$ las dos condiciones:

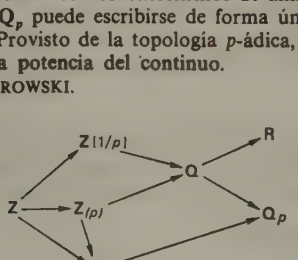
$$0 \leqslant k_n < p^n \quad \text{y} \quad k_n \equiv k_{n+1} \bmod p^n.$$

Provisto de las leyes definidas por:

$$(k_n) + (h_n) = (r_n) \quad \text{y} \quad (k_n) \cdot (h_n) = (s_n)$$

donde $r_n$ —resp. $s_n$— es el resto en la división por $p^n$ de $k_n + h_n$ —resp. $k_n h_n$—, $\mathbf{Z}_p$ es un anillo conmutativo unitario íntegro local y principal llamado anillo de los enteros $p$-ádicos. Contiene un sub-anillo isomorfo a $\mathbf{Z}$. Todo elemento $x$ de $\mathbf{Z}_p$ se escribe de forma única, $x = up^k$, donde $u$ es inversible en $\mathbf{Z}_p$ y $k \in \mathbf{N}$.

• *Cuerpo de números p-ádicos.* — Cuerpo de las fracciones $\mathbf{Q}_p$ del anillo $\mathbf{Z}_p$ de los enteros $p$-ádicos. Se tiene el diagrama que representamos a continuación, donde todos los homomorfismos de anillos son inyectivos. Un número $p$-ádico $x \in \mathbf{Q}_p$ puede escribirse de forma única $x = up^k$ con $u$ inversible en $\mathbf{Z}_p$ y $k \in \mathbf{Z}$. Provisto de la topología $p$-ádica, el cuerpo $\mathbf{Q}_p$ es el completado de $\mathbf{Q}$. Tiene la potencia del continuo.
V. OSTROWSKI.




• *Números p-ádicos.* — Todo número real $x$ es el límite de una sucesión $(u_n)_{n>0}$ de números racionales, calculándose ese límite para la distancia usual sobre $\mathbf{Q}$. Para todo número primo $p > 0$, se puede definir sobre $\mathbf{Q}$ la distancia $p$-ádica; de igual forma que $\mathbf{R}$ es el completado de $\mathbf{Q}$ para la topología usual, el cuerpo $\mathbf{Q}_p$ de los números $p$-ádicos es el completado de $\mathbf{Q}$ para la topolo-

gía *p*-ádica; sus elementos se denominan números *p*-ádicos y todo número *p*-ádico puede ser considerado como el límite, para la topología *p*-ádica, de una sucesión de números racionales. Esta noción se debe a Hensel. Se la utiliza frecuentemente en una forma generalizada en álgebra conmutativa (V. *p*-ÁDICO (Topología)), en teoría de números y para el estudio de las funciones analíticas.

## Painlevé, Paul Prudent (1863-1933)

• *Integral de Painlevé.* — Integral primera general de energía introducida por Painlevé, más conocida en nuestros días bajo el nombre de hamiltoniano. V. HAMILTONIANO.

## Palabra

V. LIBRE (Monoide).

• *Palabra de un lenguaje* L. — Elemento de L.

## Palabras

• *Problema de las palabras o problema de Thue.* — Sea G un grupo engendrado por un número finito de elementos $a_1, a_2, ..., a_n$. Todo elemento de G es una «palabra», es decir, puede escribirse como un producto $x_1 x_2 ... x_n$, donde los $x_j$ son iguales a un $a_i$ o a un $a_i^{-1}$. El problema de las palabras cuestiona si existe un «procedimiento efectivo» para decidir si dos palabras diferentes representan un mismo elemento de G. El teorema de Markov-Post afirma que este problema no admite solución en general.

## Pangeometría

Nombre dado por Lobatchevski a la geometría que al principio calificó de imaginaria y que hoy lleva su nombre.

## Pantógrafo

Aparato articulado, imaginado por Langlois, que permite trazar a partir de una figura plana F una figura F′ semejante a F. Se utiliza para la reproducción de un dibujo cualquiera a una escala diferente.

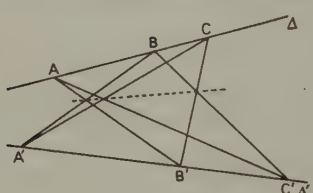
## Papel

• *Método de la banda de papel.* — V. BANDA.

## Pappus de Alejandría (Hacia el año 300)

• *Problema de Pappus.* — Por un punto tomado sobre la bisectriz de un sector angular, trazar una secante cuyos puntos de intersección con los lados del sector estén a una distancia dada.

• *Teorema de Pappus.* — Sean $\Delta$ y $\Delta'$ dos rectas de un plano proyectivo, sean A, B, C tres puntos distintos de $\Delta - \Delta \cap \Delta'$ y A', B', C' tres puntos distintos de $\Delta' - \Delta \cap \Delta'$. El teorema de Pappus afirma que los puntos $(AB') \cap (A'B)$, $(BC') \cap (B'C)$ y $(CA') \cap (C'A)$ están alineados. Se encuentran diversas formas de este teorema en geometría afín, pero su enunciado debe tener en cuenta que dos rectas siempre concurrentes en un plano proyectivo corresponden a dos rectas secantes o paralelas en un plano afín.




## Par

Conjunto constituido por dos elementos. (No hay que confundirlo con un par ordenado.)

V. PAR ORDENADO, ORDENADO.

• *Aplicación par.* — Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K de característica diferente de 2. Una aplicación $f$ de E en K es par si para todo $x \in E$ tenemos $f(-x) = f(x)$. Si $E = K = \mathbf{R}$, la gráfica de $f$ en un sistema de referencia ortonormado $(Ox, Oy)$ es simétrica por relación al eje $Oy$. Ejemplos de funciones pares: las funciones $x \mapsto \cos x$ y $x \mapsto 5x^4 - 3x^2 + 1$.

• *Entero par.* — Entero múltiple de 2. En el anillo $\mathbf{Z}$, el conjunto $2\mathbf{Z}$ de los enteros pares es un ideal.

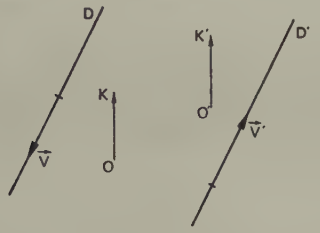
V. IMPAR.

• *Permutación par.* — Permutación de signatura igual a 1.

## Par ordenado

Dados dos objetos matemáticos $x$ e $y$, se llama par ordenado $(x, y)$ al conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Por definición, $(x, y) = (x', y')$ si y solamente si $x = x'$ e

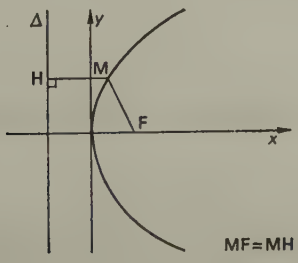
$y = y'$. Si $x$ e $y$ son dos elementos distintos, tenemos $\{x, y\} = \{y, x\}$, pero $(x, y) \neq (y, x)$. Por esta razón, un par se llama a veces un par ordenado. Un par $(x, y)$ es una 2-upla (V. $n$-UPLA), del que $x$ es el primer término e $y$ el segundo. (Mecánica.) Torsor cuya resultante general es nula. Un par es equivalente al conjunto de dos vectores deslizantes (D, $\vec{V}$) y (D', $\vec{V}'$) de soportes paralelos y de vectores V y V' opuestos.




Los momentos $\overrightarrow{OK}$ y $\overrightarrow{O'K'}$ de un par en dos puntos O y O' son iguales.

## Parábola

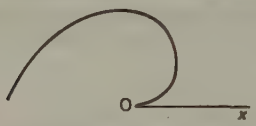
Cónica propia que admite un solo eje de simetría (eje focal) y cuya ecuación cartesiana es $y^2 = 2px$ en un sistema de referencia ortonormado cuyo origen es el vértice de la parábola y cuyo eje de abscisas coincide con el eje focal. Es la sección de un cono de revolución con un plano paralelo a una generatriz del cono, o el lugar de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo F (el foco) y de una recta fija $\Delta$ (la directriz). Siendo el polo el foco, admite como ecuación polar $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\theta}$. Puede ser definida paramétricamente por las ecuaciones $x = \dfrac{p}{2}t^2$ e $y = pt$. Dados tres números reales $a$, $b$, $c$ ($a \neq 0$), la curva de ecuación cartesiana $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola cuyas abscisas de los puntos de intersección eventuales con el eje de las abscisas son las soluciones reales (eventuales) de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. V. CÓNICA, CÚBICA, NEIL, PARÁMETRO, SEMICÚBICA.



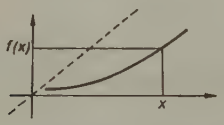

• *Vértice de una parábola.* — V. VÉRTICES (de una cónica).

## Parabólica

• *Espiral parabólica.* — Curva plana de ecuación polar $\rho^2 = a\theta$.

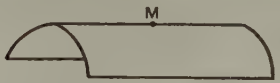



• *Rama parabólica de una curva* $\Gamma$ *de* $\mathbf{R}^2$ *de ecuación* $y = f(x)$. — Se dice que $\Gamma$ admite una rama parabólica cuya dirección es la de la recta de ecuación $y = \alpha x$ si $f(x)/x$ tiene por límite $\alpha$ cuando $x$ tiende hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$) y si $f(x) - \alpha x$ tiende hacia el infinito cuando $x$ tiende hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$).
V. INFINITA (Rama).




• *Cilindro parabólico.* — Cilindro cuyas secciones planas por planos no paralelos a las generatrices son parábolas. Es una cuádrica impropia no descompuesta.

• *Punto parabólico de una superficie.* — Punto M de una superficie tal que en M uno de los radios de curvaturas principales es infinito. Intuitivamente, en un entorno de M, la superficie tiene la forma de un cilindro.




## Paraboloide

Cuádrica propia cuya ecuación cartesiana en un cierto sistema de referencia ortonormado se escribe:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \text{ con } p > 0 \text{ y } 0 < |q| < p.$$

El paraboloide se califica de elíptico si $q$ es positivo e hiperbólico en caso contrario.
V. ELÍPTICO, HIPERBÓLICO, REVOLUCIÓN.

## Paracompacto

• *Espacio paracompacto.* — Un espacio topológico E se denomina paracompacto si está separado y si para todo recubrimiento $\mathscr{R}$ de E por abiertos existe un recubrimiento de abiertos localmente finito $\mathscr{R}'$ más fino que $\mathscr{R}$.

## Paradoja

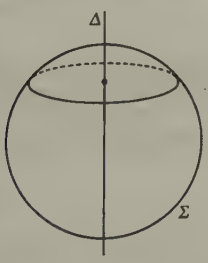
Demostración correcta en apariencia pero que conduce a contradicciones; esto afecta frecuentemente a la aplicación de los razonamientos a casos en que no pueden aplicarse (así, las paradojas de Zenón de Elea aplican al «continuo» los razonamientos del «finito») o a la utilización de un término cuya significación no es la misma en toda la demostración (V. RICHARD). Por extensión, algunos teoremas sorprendentes en apariencia se califican a veces de paradojas (Banach-Tarski, por ejemplo).
V. BANACH-TARSKI, BARBIER, BERTRAND, BURALI-FORTI, CATÁLOGOS, CRAMER, ESFERA, EPIMÉNIDES, GALILEO, MENTIROSO, PONCELET, RICHARD, RODAMIENTO DEL CÍRCULO, RUSSELL, ZENÓN DE ELEA.

• *Paradoja de Aquiles y la tortuga.* — V. ZENÓN DE ELEA.

## Paralela

• *Recta paralela a un plano.* — Recta paralela a una recta de ese plano.

• *Paralelo de una superficie de revolución de eje* $\Delta$. — Sección de la superficie por un plano perpendicular a $\Delta$. Es un círculo centrado sobre $\Delta$. Los paralelos de la esfera terrestre $\Sigma$ son los paralelos de $\Sigma$ considerada como una superficie de revolución cuyo eje es el eje de los polos.




## Paralelas

• *Curvas planas paralelas.* — Curvas planas $C_1$ y $C_2$ tales que toda recta normal a una sea normal a la otra y la distancia entre los puntos de intersección de una normal a $C_1$ y $C_2$ sea constante; ejemplo: dos círculos concéntricos. Admiten la misma desarrollable.

• *Rectas paralelas de* $\mathbf{R}^3$. — Rectas coplanarias sin punto común o confundidas. Una recta es, por tanto, paralela a ella misma.

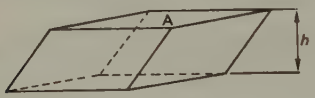
• *Planos paralelos de* $\mathbf{R}^3$. — Planos confundidos o sin punto común.

• *Postulado de las paralelas.* — Quinto postulado de Euclides.
V. EUCLIDES.

• *Variedades lineales afines paralelas.* — Dos variedades lineales afines $V_1$ y $V_2$ son paralelas si el sub-espacio vectorial asociado a la una está incluido en el asociado a la otra.

## Paralelepípedo

Poliedro de seis caras, paralelas dos a dos. Su volumen es igual a A . *h*, donde A es el área de una cara y *h* la distancia (llamada altura) de esa cara a la cara paralela opuesta.
V. PARALELOTOPO, PITAGÓRICO, RECTÁNGULO.

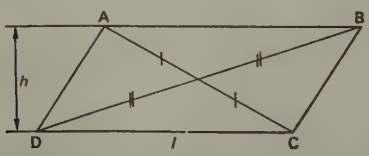



## Paralelismo

• *Relación de paralelismo en el espacio afín* $\mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$. — En el conjunto de las rectas de $\mathbf{R}^n$, la relación // definida por D//D′ si D es paralela a D′, es una equivalencia llamada relación de paralelismo. Sus clases de equivalencia son las direcciones de las rectas.

## Paralelogramo

Cuadrilátero plano cuyos lados son paralelos dos a dos. Un cuadrilátero (A, B, C, D) es un paralelogramo si y solamente si sus diagonales AC y BD tienen igual punto medio. Su área es igual a *h* . *l*, donde *l* es la longitud de uno de los lados y *h* la distancia (llamada altura) de ese lado al lado paralelo opuesto.
V. PARALELÓTOPO, PERÍODOS.




## Paralelogramos

• *Multiplicación por paralelogramos.* — Multiplicación árabe.

## Paralelótopo

Generalización en $\mathbf{R}^n$ de las nociones de paralelogramo y de paralelepípedo. Sean $(a_1, a_2, ..., a_n)$ una base de $\mathbf{R}^n$ y $h$ un punto de $\mathbf{R}^n$. El conjunto de los puntos de $\mathbf{R}^n$ de la forma $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_n a_n + h$, donde $\alpha_i$ describe $[0, 1[$ para todo $i = 1, ..., n$ se llama paralelótopo construido a partir de $h$ y de los vectores $a_1, a_2, ..., a_n$.

## Parametrada

• *Curva parametrada de* $\mathbf{R}^2$ *(resp.* $\mathbf{R}^3$*).* — Par $(\Gamma, f)$, donde $\Gamma$ es una parte de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$) y $f$ una aplicación continua definida sobre un intervalo I (o una reunión numerable I de intervalos dos a dos disjuntos), de valores en $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^3$) tal que $f(\mathrm{I}) = \Gamma$. Se dice entonces que $f$ es una representación paramétrica de la curva.

• *Curva parametrada de* $\mathbf{R}^3$ *de clase* $C^k$. — Curva parametrada $(\Gamma, f)$, donde $f$ es una función de clase $C^k$.

• *Curva parametrada trazada sobre una superficie parametrada* $(\Sigma, f)$. — Sean U el abierto de $\mathbf{R}^2$ tal que $\Sigma = f(\mathrm{U})$ e I un intervalo de $\mathbf{R}$. Sean $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^2$ una aplicación continua y $\Gamma$ la imagen de I por $f \circ g$. Esta imagen, contenida en $\Sigma$, es una curva parametrada que se dice trazada sobre $\Sigma$.

• *Napa parametrada.* — Sinónimo de superficie conexa parametrada.

• *Superficie parametrada de* $\mathbf{R}^3$. — Par $(\Sigma, f)$, donde $\Sigma$ es una parte de $\mathbf{R}^3$ y $f$ una aplicación continua de un abierto U de $\mathbf{R}^2$ de valores en $\mathbf{R}^3$, tal que $f(\mathrm{U}) = \Sigma$. Se dice entonces que $f$ es una representación paramétrica de la superficie $\Sigma$.

• *Superficie parametrada de* $\mathbf{R}^3$ *de clase* $C^k$. — Superficie parametrada $(\Sigma, f)$, donde $f$ es una función de clase $C^k$.

## Parametrado

• *Arco parametrado de* $\mathbf{R}^2$ *(resp.* $\mathbf{R}^3$*).* —Curva parametrada $(\Gamma, f)$, donde $\Gamma$ es la imagen por $f$ de un intervalo I de $\mathbf{R}$. Un arco parametrado $(\Gamma, f)$ también se simboliza por $(\mathrm{I}, f)$. Si $f$ es de clase $C^k$ $(k \geqslant 0)$ el arco se denomina de clase $C^k$.

V. Geométrico, Jordan, Longitud.

## Paramétrica

• *Representación paramétrica.* — V. Parametrada (Curva, superficie), Paramétricas (Ecuaciones), Racional.

## Paramétricas

• *Ecuaciones paramétricas de una curva parametrada* $(\Gamma, f)$ *de* $\mathbf{R}^3$. — Sea $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^3$ la representación paramétrica de la curva $\Gamma$. Al número real $t \in \mathrm{I}$, $f$ asocia:

$$(u(t),\ v(t),\ w(t)) \in \mathbf{R}^3;$$

las ecuaciones $x = u(t)$, $y = v(t)$ y $z = w(t)$ se denominan ecuaciones paramétricas de la curva de parámetro $t \in \mathrm{I}$. Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ y de vector director $\vec{u}(a, b, c)$ son $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$ y $z = ct + z_0$, $t \in \mathbf{R}$.

• *Ecuaciones paramétricas de una superficie parametrada* $(\Sigma, f)$ *de* $\mathbf{R}^3$. — Sea $f: \mathrm{U} \to \mathbf{R}^3$ la representación paramétrica de la superficie $\Sigma$. Al par $(\lambda, \mu) \in \mathrm{U}$, $f$ asocia $(u(\lambda, \mu), v(\lambda, \mu), w(\lambda, \mu)) \in \mathbf{R}^3$; las ecuaciones $x = u(\lambda, \mu)$, $y = v(\lambda, \mu)$ y $z = w(\lambda, \mu)$ se denominan ecuaciones paramétricas de la superficie de parámetros $(\lambda, \mu) \in \mathrm{U}$.

## Parámetro

Término no matemático utilizado por oposición a incógnita, para designar ciertos coeficientes o ciertas cantidades en función de las cuales se quiere expresar una proposición o las soluciones de un sistema de ecuaciones.

• *Parámetro de una cónica propia.* — Semi-longitud $p$ de una cuerda focal perpendicular al eje focal de la cónica. Para las cónicas de centro, $p = \dfrac{b^2}{a}$, donde $a$ es el semi-eje focal y $b$ el semi-eje no focal; si $e$ es la excentricidad, $p = a(e^2 - 1)$ para la hipérbola y $p = a(1 - e^2)$ para la elipse. Para la parábola, $p$ es igual al doble de la distancia del foco al vértice.

## Parámetros

• *Parámetros directores de una recta.* — V. Directores.

• *Parámetros de dispersión de una serie estadística.* — V. Dispersión.

• *Parámetros de forma de una serie estadística.* — V. Forma.

• *Parámetros de una ley de probabilidad.* — V. Binomial, Exponencial, Geométrica, Laplace, Gauss, Gamma, Negativa (Ley binomial), Normal, Pascal, Poisson.

• *Parámetros de posición de una serie estadística.* — V. Posición.

## Paratingente

• *Paratingente de una parte* E *de un espacio afín euclídeo en un punto de acumulación* A *de* E. — Conjunto de rectas paratingentes de E en A. El paratingente contiene el contingente. La curva $y^2 = x^3$ posee en O un punto de retroceso; su contingente se reduce a OT y su paratingente está formado por todas las rectas que pasan por O.
V. Contingente.

• *Recta paratingente en un punto de acumulación* A *de una parte* E *de un espacio afín euclídeo.* — Una recta D que pasa por A es una paratingente de E en A si existe una sucesión de segmentos $P_iQ_i$ cuyos extremos pertenecen a E y tienden hacia A cuando la sucesión de sus rectas sustentatrices tiende hacia D.

## Parcial

• *Grado parcial por relación a una indeterminada de un polinomio de varias indeterminadas.* — V. POLINOMIO.

• *Grafo parcial de un grafo* (S, U) *engendrado por una parte* V *de* U. — Grafo cuyo conjunto de vértices es S y el conjunto de los arcos es V.

• *Relación de orden parcial sobre un conjunto* E. — Relación de orden sobre E tal que existen al menos dos elementos de E no comparables. Ejemplos: la divisibilidad en N y la inclusión en $\mathfrak{P}$ (E) si E posee por lo menos dos elementos.

• *Suma parcial de una serie.* — V. SERIE.

## Parciales

• *Derivadas parciales de una aplicación f en un punto* $a = (a_1, ..., a_n)$ *de un abierto* U *de* $\mathbf{R}^n$ *con valores en un espacio normado* E. — Si la aplicación $f_i$ de R en E definida por $f_i(t_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ es derivable en el punto $a_i$, su derivada se llama *i*-ésima derivada parcial de *f* en el punto *a* y se representa por $\partial f/\partial t_i(a)$ o $f'_i(a)$ o también $D_i f(a)$. Cuando existen, las derivadas parciales de $\partial f/\partial t_i(a)$ se denominan derivadas parciales de orden 2 de *f*. La *j*-ésima derivada parcial de $\partial f/\partial t_i(a)$ se representa por $\partial^2 f/\partial t_i \partial t_j(a)$. Se definen de igual modo, por recurrencia sobre $n \geqslant 1$, la derivadas parciales de orden *n* de *f*.

• *Ecuación de las derivadas parciales.* — Ecuación en que la incógnita es una función de varias variables y que hace intervenir a las derivadas parciales de orden cualquiera de esa función. Ejemplo, la ecuación de las cuerdas vibrantes.

V. CLAIRAUT, DIFUSIÓN, HELMHOLTZ, INTEGRAL, LAPLACE, ONDAS, ORDEN, PLATEAU, POISSON, SINE-GORDON, TELEGRAFISTAS, VIBRANTES (Cuerdas, membranas, placas, vergas).

## Parcialmente

• *Conjunto parcialmente ordenado.* — Conjunto provisto de un orden parcial.

**Pareto,** Vilfredo Frederigo Samano, marqués (1848-1923)

• *Optimum de Pareto.* — En un juego de dos jugadores, de suma no nula, un resultado es un optimum de Pareto si no existe acuerdo entre los dos jugadores que permita aumentar la ganancia de cada uno.

**Paridad**

Determinar la paridad de un entero, es decir, si es par o impar. Igualmente, determinar la paridad eventual de una función, es decir, si es par o impar.

**Parseval** des Chênes (o Deschenes), Marc Antoine (1755-1836)

• *Igualdad de Parseval.* — Para que una familia ortonormal $(e_i)_{i\in I}$ de vectores de un espacio prehilbertiano separado E sea total es necesario y suficiente que, para todo vector $x$ de E, la familia $|(x|e_i)|^2$ sea sumable y verifique la igualdad llamada de Parseval:

$$||x||^2 = \sum_{i\in I} |(x|e_i)|^2.$$

• *Desigualdad de Bessel o de Bessel-Parseval.* — V. BESSEL.

**Parte**

• *Parte de un conjunto* E. — Un conjunto A se denomina parte (o sub-conjunto) de E si A está incluido en E.
V. ABIERTA, ACOTADA, CERRADA, COMPACTA, CONEXA, CONVEXA, DENSA, DESPRECIABLE, DIÁMETRO, EQUICONTINUA, ESTABLE, EXTERIOR, GENERATRIZ, HOMOGÉNEA, IMAGEN, INTERIOR, MAGRA, MAYORADA, MAYORANTE, MEDIBLE, MINORADA, MINORANTE, PLENA, PRECOMPACTA, RARA, SATURADA, SUBCONJUNTO.

• *Parte alícuota de un número entero.* — V. ALÍCUOTA.

• *Parte entera de un número real o de una fracción racional.* — V. ENTERA.

• *Parte fraccionaria de un número real.* — V. FRACCIONARIA.

• *Parte imaginaria de un número complejo.* — V. IMAGINARIA.

• *Parte principal de una función real.* — V. PRINCIPAL.

• *Parte real de un número complejo.* — V. REAL.

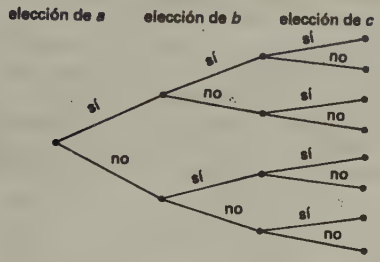
• *Parte regular de un desarrollo limitado.* — V. REGULAR.

**Partes**

• *Conjunto de las partes de un conjunto* E. — La clase de todas las partes de

un conjunto E es un conjunto simbolizado por $\mathfrak{P}$ (E) denominado conjunto de las partes de E. Por ejemplo, si $E = \{a, b, c\}$ tenemos:

$$(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$




La existencia para todo conjunto E de un conjunto $\mathfrak{P}$ (E) cuyos elementos son las partes de E es un axioma de la teoría de los conjuntos. La intersección, la reunión, la diferencia y la diferencia simétrica son leyes de composiciones internas sobre $\mathfrak{P}$ (E). Si Card E = $n$, entonces Card $\mathfrak{P}$ (E) = $2^n$. Más generalmente, Card $\mathfrak{P}$ (E) = $2^{\text{Card(E)}}$.

V. ADYACENTES, BOOLE (Algebra de), CLAN, $\sigma$-ANILLO, TRIBU.

● *Integración por partes.* — Sean $f$ y $g$ dos funciones reales de clase $C^1$ sobre $[a, b]$; tenemos, para todo $x \in [a, b]$, la fórmula denominada de integración por partes:

$$\int_a^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)\ g(t)\ dt.$$

● *Partes de una partición de entero.* — V. PARTICIÓN.

## Partición

● *Partición de un conjunto* E. — Conjunto no vacío de partes de E que son no vacías, disjuntas dos a dos y cuya reunión es igual a E. Las clases de equivalencias de una relación de equivalencia sobre un conjunto E constituyen una partición de E. Recíprocamente, una partición de un conjunto E permite definir sobre E una única equivalencia cuyas clases son los elementos de la partición.

V. BELL (Número de), STIRLING (Números de segunda especie).

● *Partición de un entero* $n \geqslant 1$. — Representación de $n$ en una suma de enteros no nulos, no siendo el orden de la suma tomado en consideración. Estos términos se llaman sumandos o partes de la partición. Por ejemplo, hay siete particiones de 5 que son: 5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + + 1 + 1 y 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Esta noción, edificada por Euler, se utiliza en

teoría de los números y en análisis combinatorio. Cuando se imponen condiciones suplementarias, la teoría de las particiones puede dar lugar a problemas muy difíciles, a veces no resueltos todavía; por ejemplo, al exigir que las partes no sean más que números primos (hipótesis de Goldbach) o de potencias dadas (problemas de Waring) o que los números a disecar, así como sus partes sean potencias dadas (gran teorema de Fermat), etc.

• *Problema de la partición de una superficie.* — Dada una superficie, ¿en cuántas regiones como máximo puede dividírsela de forma que cada región tenga una frontera con cada una de las otras? La respuesta es 4 para el plano, 4 para la esfera, 6 para el plano proyectivo, 7 para el toro. Se ve que para estas superficies son los mismos números que los números cromáticos; pero esta igualdad no siempre está asegurada. Esos números son invariantes topológicos.

## Partida

• *Conjunto de partida de una aplicación.* — Sinónimo de fuente.

## Pasar

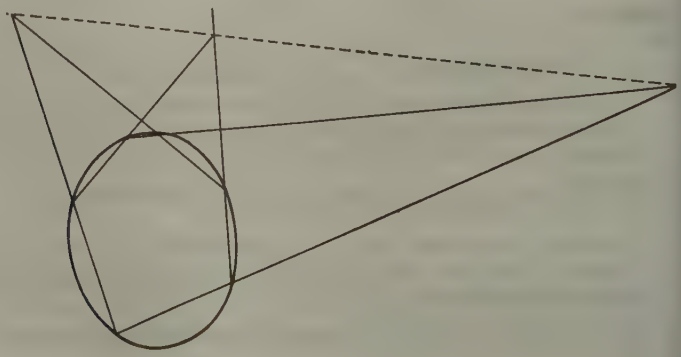
• *Pasar por un punto.* — Se dice usualmente que una recta, una curva, una superficie, etc., pasa por un punto A si ese punto es un elemento de esa recta, de esa curva o de esa superficie.

## Pascal, Blaise (1623-1662)

• *Ley de Pascal.* — Ley binomial negativa.
V. NEGATIVA.

• *Recta de Pascal.* — V. PASCAL (Teorema de).

• *Teorema de Pascal y hexagrama místico.* — Los tres puntos de intersección de los lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están alineados sobre una recta llamada recta de Pascal. La figura obtenida se denomina hexagrama místico.
V. BRIANCHÓN.



● *Triángulo de Pascal.* — Los coeficientes $\binom{n}{p}$ de binomio de Newton verifican la fórmula $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$. Pueden, por tanto, calcularse «poco a poco», disponiéndolos según un triángulo denominado triángulo de Pascal; así, $\binom{6}{4} = \binom{5}{4} + \binom{5}{3}$.

| | $p=0$ | $p=1$ | $p=2$ | $p=3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | 1 | | | | | |
| $n=1$ | 1 | 1 | | | | |
| $n=2$ | 1 | 2 | 1 | | | |
| $n=3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
| $n=4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
| $n=5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $\binom{n}{0}$ | $\binom{n}{1}$ | $\binom{n}{2}$ | ... | $\binom{n}{p}$ | $\binom{n}{p+1}$ | ... | $\binom{n}{n}$ | |
| ... | $\binom{n+1}{0}$ | $\binom{n+1}{1}$ | $\binom{n+1}{2}$ | ... | $\binom{n+1}{p}$ | $\binom{n+1}{p+1}$ | ... | $\binom{n+1}{n}$ | $\binom{n+1}{n+1}$ |

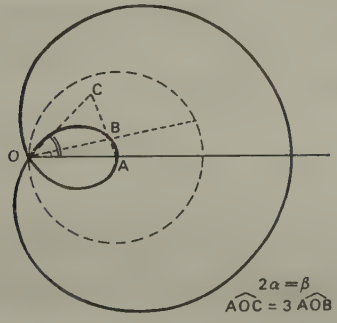
La configuración del triángulo de Pascal gobierna diversas composiciones musicales, especialmente: «Transformaciones triangulares» de Michel Philippot. Aunque lleve el nombre de Pascal o de Stifel, este triángulo ya era conocido por los matemáticos chinos y árabes en el siglo XIII.

V. FIBONACCI, PROBABILIDADES.

## Pascal, Etienne (padre de Blaise) (1588-1651)

● *Caracol de Pascal.* — Curva inversa de una cónica propia con relación a uno de sus focos. En coordenadas polares la ecuación general del caracol de Pascal se escribe $\rho = \alpha + \beta \cos\theta$, con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Un caracol de Pascal es una concoide de circunferencia en relación a uno de los puntos de la circunferencia. Igualmente, es un óvalo de Descartes de foco doble. Dos casos particulares son notables: si $\alpha = \beta$, el caracol es una cardioide; si $2\alpha = \beta$, es una trisectriz.

V. CARDIOIDE, TRISECTRIZ.

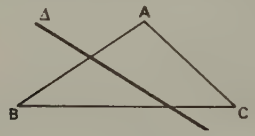


## Pascala

Sinónimo de recta de Pascal.

## Pasch, Moritz (1843-1930)

• *Axioma de Pasch.* — Afirma que, si una recta del plano de un triángulo encuentra uno de sus lados, entonces encuentra también al otro. Este axioma, aunque «evidente» en geometría euclídea pura, no se verifica necesariamente en otras geometrías.




## Pasigrafía

Etimológicamente: «Arte de escribir todo». Sistema de signos inventado por Peano, que permite escribir todas las proposiciones lógicas y matemáticas. Un tratado o una exposición redactada en pasigrafía elimina la casi totalidad del lenguaje ordinario, por eso, en la práctica, es prácticamente ilegible.

## Paso

• *Paso de una hélice circular.* — V. CIRCULAR.

• *Paso de progresión.* — Sinónimo, en informática, de incremento.

• *Paso de una espiral de Arquímedes.* — V. ARQUÍMEDES.

• *Matriz de paso de una base* $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *a una base* $B' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ *de un espacio vectorial* E *de dimensión n.* — Matriz cuadrada cuya $j$-ésima columna está constituido por las componentes de $e'_j$ expresada en la base B. La matriz P es inversible y $P^{-1}$ es la matriz de paso de la base B' a la base B.

• *Teorema del paso de aduanas.* — V. ADUANAS.

## Pastores

• *Principio de los pastores.* — Para conocer el número de corderos de un rebaño basta con contar el número de patas y dividirlo por cuatro; más matemáticamente, si $f: X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva, si $\text{card}\, Y = n$ y si para todo $y \in Y$ se tiene $\text{card}\, f^{-1}(y) = m$, entonces $\text{card}\, X = nm$.

## Patata

La elección de esa palabra (empleada a veces en el lenguaje corriente en el sentido peyorativo de «pomme de terre») para designar los diagramas de Venn indica la voluntad de servir a las representaciones de cualquier tipo de conjuntos. El diagrama que le corresponde es de un contorno voluntariamente irregular para no incitar a creer que las propiedades del conjunto considerado están ligadas a la forma geométrica de ese conjunto.
V. VENN.

## Patológica

• *Noción calificada de patológica.* — Conviene desconfiar de ese calificativo que traduce la sorpresa o el asombro del matemático ante ciertos descubrimientos; muchas funciones o conjuntos «patológicos» constituyen clases más ricas que las clases que se tenían por «normales».

## Pavimento

• *Pavimento de un espacio afín euclídeo* E. — Partición de E en partes de un interior no vacío e isométricas dos a dos. Para un pavimento dado, las partes, llamadas pavimentos (o también tejas en el caso del plano) tienen todas la misma forma; pero las formas de las partes de diferentes pavimentos pueden variar hasta el infinito. Al no conceder importancia más que a la disposición de los pavimentos y no a su forma, hay en $\mathbf{R}^2$, 17 pavimentos regulares cinco de los cuales son tales que cada isometría que permite pasar de un pavimento a otro es directa. Todos han sido realizados, con motivos decorativos, en la Alhambra de Granada. M. C. Escher los ilustró en numerosos grabados. En $\mathbf{R}^3$ hay 230 pavimentos regulares. El estudio de los pavimentos de $\mathbf{R}^3$ por poliedros constituye el decimoctavo problema de Hilbert.

## Peano, Giuseppe (1858-1932)

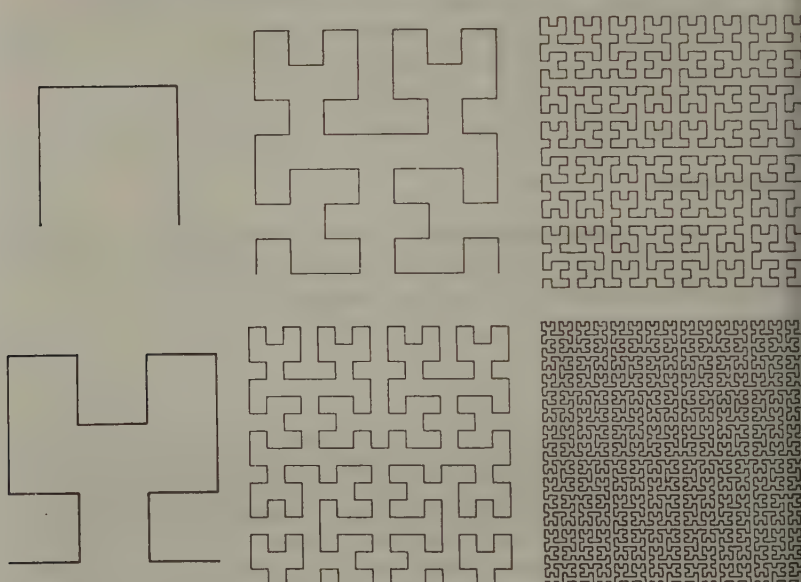
V. PASIGRAFÍA.

• *Axiomas de Peano.* — Permiten definir formalmente el conjunto N de los enteros naturales y se enuncian:

1) 0 es un entero natural.
2) Todo entero natural tiene un sucesor.
3) Dos enteros naturales que tienen el mismo sucesor son iguales.
4) 0 no es el sucesor de ningún entero natural.
5) Si una parte P de N contiene 0 y si el sucesor de todo elemento de P pertenece a P, entonces P es igual a N (axioma de inducción).

El razonamiento por recurrencia se basa en el axioma de inducción.

• *Curva de Peano.* — Curva parametrada $(\Gamma, f)$, donde $f$ es una aplicación continua de $I = [\![0, 1]\!]$ sobre el cuadrado $\Gamma = I \times I$. Por tanto, es una «curva» que pasa por todos los puntos del cuadrado $I \times I$. Para definir esa curva se construye una aplicación uniformemente continua $\varphi$ de un conjunto J enume-



Aproximación de una curva de Peano por una sucesión de curvas.

rable por todas partes densa en I con valores en $I \times I$ tal que $\varphi(J)$ sea por todas partes densa en $I \times I$. Existe entonces una aplicación continua $f$ de I sobre $I \times I$ que prolonga $\varphi$. Posee una infinidad de puntos múltiples.
V. FRACTAL.

## Pearson, Karl (1857-1936)

• *Coeficiente de Pearson.* — Coeficiente $d_1$, utilizado en estadística, que informa sobre la asimetría de la distribución de un carácter cuantitativo X. Está definido por:

$$d_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma},$$

donde $\overline{X}$ es la media, $M_0$ la moda y $\sigma$ la desviación típica.

• *Coeficiente de correlación de Bravais-Pearson.* — V. CORRELACIÓN.

• *Ley de Pearson.* — La ley de probabilidad de una variable aleatoria absolu-

tamente continua se llama de Pearson si su densidad de probabilidad verifica una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x + a}{b + cx + dx^2},$$

donde $a$, $b$, $c$, $d$ son constantes reales. Las leyes beta, gamma, exponencial, normal, de Cauchy, del $\chi^2$ y de Student son leyes de Pearson.

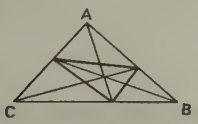
• *Ley de $\chi^2$ de Pearson.* — V. JI.

## Peaucellier, Charles Nicolas (1832-1913)

• *Inversor de Peaucellier.* — V. INVERSORES.

## Pedal

• *Triángulo pedal de un triángulo* ABC. — Triángulo obtenido al unir los pies de tres cevianas concurrentes del triángulo ABC. El triángulo órtico es el triángulo pedal de las alturas.




## Peirce, Charles Sanders (1839-1914)

• *Símbolo de Peirce o doble negación.* — Conector simbolizado por ↓, también denominado «NO O», «NI» o «NOR» y definido por $A \downarrow B$ es una abreviatura de $\neg(A \vee B)$.

| A | B | A ↓ B |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Todo conector puede definirse a partir de la doble negación, puesto que:

$$\neg A = A \downarrow A \quad \text{y} \quad A \wedge B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B).$$

V. SHEFFER.

• *Teorema de Dedekind-Peirce.* — V. DEDEKIND (Axioma o teorema).

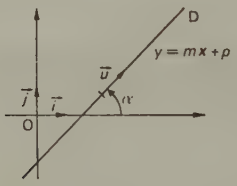
## Pell, John (1610-1689)

• *Teorema de Pell-Fermat.* — Ecuación de Fermat.

## Pendiente

• *Vértice pendiente de un grafo.* — Vértice que no es extremo más que de un solo arco. En el ejemplo que figura a continuación, el vértice *a* es pendiente.

• *Pendiente de una recta* D *con relación a un sistema de referencia cartesiano ortonormado* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. — Si la recta D no es paralela al eje de las ordenadas, su ecuación es de la forma $y = mx + p$. El número real $m$ se denomina la pendiente o el coeficiente angular de la recta. Es igual a $\operatorname{tg}\widehat{(\vec{i}, \vec{u})}$, donde el vector $\vec{u}$ es director de D.




• *Pendiente de una superficie con relación a un sistema de referencia cartesiano ortonormado* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. — Sea una superficie $\Sigma$ de ecuación cartesiana $z = f(x, y)$ que admite en un punto M un plano tangente. Se denomina pendiente de $\Sigma$ en M al número real $\operatorname{tg}\alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo que hace el plano tangente con el plano $(Ox, Oy)$. Se demuestra que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

• *Líneas de pendiente de una superficie.* — Curvas de la superficie ortogonales a las curvas de nivel. Si la ecuación cartesiana de la superficie es $z = f(x, y)$ y si $f$ es diferenciable, las líneas de pendiente son soluciones de la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0.$$

• *Líneas de máxima pendiente.* — Líneas de thalweg.

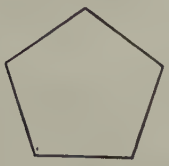
• *Método de la pendiente infinita.* — V. INFINITA.

## Pentagonales

• *Números pentagonales.* — V. POLIGONALES.

## Pentágono

Polígono plano de cinco lados.



Pentágono convexo regular.

## *p*-enteros

Nombre que se da a veces a los números racionales de la forma $a/b$, donde $b$ es extraño con el entero primo $p$. Su conjunto, simbolizado por $\mathbf{Z}_{(p)}$, es un sub-anillo de $\mathbf{Q}$; es el localizado de $\mathbf{Z}$ en su ideal primo $(p) = p\mathbf{Z}$. Este anillo puede sumergirse canónicamente en el anillo $\mathbf{Z}_p$ de los enteros $p$-ádicos. Un elemento no nulo $x$ de $\mathbf{Z}_{(p)}$ puede escribirse $ap^h/b$ con $a \notin p\mathbf{Z}$, $b \notin p\mathbf{Z}$ y $h \in \mathbf{N}$. No hay que confundir el anillo $\mathbf{Z}_{(p)}$ con el anillo $\mathbf{Z}[1/p]$ de los números racionales de la forma $a/p^k$ con $a \in \mathbf{Z}$ y $k \in \mathbf{N}$.

## Pequeño

• *Eje menor de una elipse.* — Cuerda trazada sobre el eje no focal de la elipse.

• *Semi-eje menor de una elipse.* — Sinónimo de semi-eje no focal de la elipse. V. FOCAL.

• *Elemento más pequeño de una parte* A *de un conjunto ordenado* E. — Elemento de A inferior a todos los elementos de A. Toda parte no vacía de $\mathbf{N}$ admite un elemento más pequeño. Por el contrario, un intervalo abierto $]a, b[$ de $\mathbf{R}$, aunque posea un extremo inferior, no admite elemento más pequeño.

• *Infinitamente pequeño.* — Se llama infinitamente pequeño en un entorno de $x_0 \in \mathbf{R}$ una función numérica de variable real simbolizada frecuentemente $\varepsilon$, definida en el entorno de $x_0$, tal que $\varepsilon(x)$ tiende hacia cero cuando $x$ tiende hacia $x_0$. Se define de forma análoga un infinitamente pequeño en un entorno de $+\infty$ o de $-\infty$.

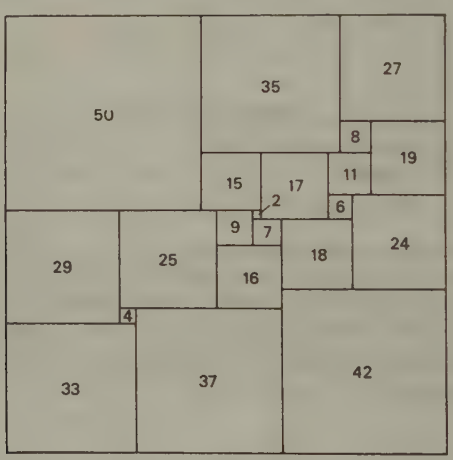
## Pequeños

• *Números reales infinitamente pequeños.* — Se denomina así, en análisis no estándar, a elementos $x \in {}^*\mathbf{R}$, positivos e inferiores a todo $y \in \mathbf{R}_+^*$.

## Perfecto

• *Cuadrado perfecto.* — Aritmética elemental: empleado usualmente para de-

signar un entero que es el cuadrado de un entero natural. Teoría de números: se designa también por cuadrado perfecto a un cuadrado divisible en cuadrados más pequeños y todos ellos diferentes. El problema de la existencia de tales cuadrados fue resuelto en 1938 por Tutte y tres estudiantes de la




Universidad de Toronto. El recorte más pequeño posible se debe a Duijvestijn (1978). Descompone el gran cuadrado inicial (longitud de lado: 112) en 21 cuadrados desiguales.

• *Cubo perfecto.* — Empleado usualmente para designar un entero que es el cubo de un entero natural.

• *Conjunto perfecto.* — Parte cerrada sin punto aislado de un espacio topológico; ejemplo: el conjunto triádico de Cantor.

• *Grupo perfecto.* — Grupo conmutativo totalmente ordenado no discreto del que toda parte mayorada no vacía admite un extremo superior. El grupo aditivo $\mathbf{R}$ y el grupo multiplicativo $\mathbf{R}_+^*$ son perfectos cuando los grupos aditivos $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$ no lo son.

• *Número perfecto.* — Entero natural igual a la suma de sus divisores que le son estrictamente inferiores; ejemplo:

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad \text{ó} \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Se sabe que todo número perfecto par es de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, donde $p$ y $2^p - 1$ son primos (V. MERSENNE); se ignora si existen números perfectos impares, pero se ha demostrado que no existe ningún perfecto impar inferior a $10^{150}$. Deducido del 25 número primo de Mersenne, el mayor perfecto conocido en 1979 es: $2^{21.700}(2^{21.701} - 1)$.

## Perfil

- *Recta de perfil.* — Recta contenida en un plano de perfil.
- *Plano de perfil.* — Plano perpendicular a la línea de tierra.

## Perímetro

- *Perímetro de una curva plana cerrada rectificable.* — Longitud de esa curva. Por ejemplo, el perímetro del círculo de radio R es $2\pi R$.

- *Perímetro de un polígono.* — Suma de las longitudes de los lados del polígono. El perímetro de un rectángulo del que dos lados consecutivos tienen por longitudes L y L′ es $2(L + L')$. El cuadro que viene a continuación indica la longitud de los lados de los polígonos regulares convexos inscritos en un círculo de radio R:

| *Triángulo equilátero* | *Cuadrado* | *Pentágono* | *Hexágono* |
|---|---|---|---|
| $R\sqrt{3}$ | $R\sqrt{2}$ | $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ | R |

| *Octógono* | *Decágono* | *Dodecágono* |
|---|---|---|
| $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ | $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$ | $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ |

## Periódica

- *Función periódica.* — El conjunto de los períodos de una función $f$ de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ forma un sub-grupo $\Gamma$ del grupo aditivo de los números reales. Si $f$ es continua, son posibles tres casos:

$\Gamma = \{0\}$; se dice entonces que $f$ es *no periódica.*
$\Gamma = \mathbf{R}$; entonces $f$ es constante.
$\Gamma = \{nT_0\}_{n\in\mathbf{Z}}$ con $T_0 > 0$. Se dice que $f$ es periódica y que $T_0$ es su período fundamental, o su período.

Las funciones trigonométricas coseno y seno son periódicas de período (fundamental) $2\pi$.

- *Función doblemente periódica.* — Función $f$ de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}$ tal que existen dos números complejos no nulos $e_1$ y $e_2$ (llamados períodos) cuya razón no es real y que verifica:

$$f(z + n_1 e_1 + n_2 e_2) = f(z)$$

para todo par $(n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2$ y todo número complejo $z$.
V. Elíptica, Períodos (Paralelogramo de los).

• *Movimiento periódico de un móvil puntual* M. — El movimiento de un móvil puntual M se denomina periódica de período T si T es el número real más pequeño no nulo tal que la posición de M en un instante $t$ cualquiera es la misma que aquélla que ocupa en el instante $t + T$. El movimiento circular uniforme de velocidad angular $\omega$ radianes por segundo y el movimiento rectilíneo sinusoidal definido por $x = a \cos(\omega t + \varphi)$ son periódicas de período $2\pi/\omega$.

## Período

• *Período de un elemento en un grupo.* — Orden de ese elemento.

• *Período de una función f de* **R** *en* **R**. — Todo número real T tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$.
V. PERIÓDICA.

## Períodos

• *Paralelogramo de períodos.* — Sea una función de C en C doblemente periódica de períodos $e_1$ y $e_2$. Para todo complejo $z_0$, el paralelogramo del plano complejo de vértices $z_0$, $z_0 + e_1$, $z_0 + e_2$ y $z_0 + e_1 + e_2$ se denomina un paralelogramo de períodos de $f$.

## Permutación

• *Permutación sobre un conjunto* E. — Biyección de E sobre E. Si E es un conjunto finito de cardinal $n$, el número de permutaciones sobre E es:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

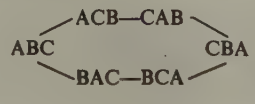
Una permutación $\sigma$ sobre $E = \{1, 2, \dots, n\}$ se simboliza frecuentemente por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

V. CIRCULAR, IMPAR, INVERSIÓN, PAR, SIGNATURA, SIMÉTRICO (Grupo), SUSTITUCIÓN, TRANSPOSICIÓN.

## Permutoedro

Politopo cuyos vértices representan las permutaciones sobre un conjunto finito E; una arista une dos vértices $\sigma_1$ y $\sigma_2$ cuando esas permutaciones no difieren más que por la transposición de dos elementos vecinos. Ejemplo: con $E = \{A, B, C\}$:

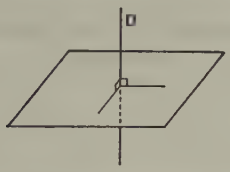


## Perpendicular

• *Perpendicular común a dos rectas izquierdas.* — V. IZQUIERDAS.

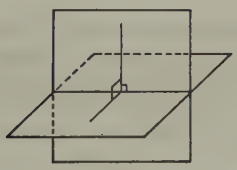
• *Recta perpendicular a una recta.* — V. RECTAS PERPENDICULARES.

• *Recta perpendicular a un plano.* — Recta D perpendicular a dos rectas secantes de ese plano. La recta D es entonces ortogonal a toda recta del plano.




## Perpendiculares

• *Planos perpendiculares.* — Planos de los que una recta del uno es perpendicular al otro. Dos planos así son necesariamente secantes.



• *Rectas perpendiculares de un espacio afín euclídeo.* — Rectas ortogonales y secantes. Dos rectas perpendiculares del plano euclídeo determinan cuatro ángulos de semi-rectas cada uno de los cuales mide 90°.
V. CUADRANTE, ELEVAR, ORTOGONALES, RECTO (Angulo), TRAZAR.

## Perpendicularidad

Propiedad de ser perpendicular.

• *Relación de perpendicularidad sobre el conjunto de las rectas de plano.* — Relación $\perp$ definida por $D_1 \perp D_2$ si y solamente si $D_1$ es perpendicular a $D_2$. Esta relación es simétrica, pero no es ni reflexiva ni transitiva.

## Perro

• *Curva del perro.* — Curva de persecución, trayectoria de un móvil $M_0$ cuyo vector velocidad permanece constante en norma y queda colineal al vector $\overrightarrow{M_0M_1}$, donde $M_1$ es otro móvil animado por un movimiento rectilíneo uniforme.
Se demuestra que $M_0$ atrapa a $M_1$ si la velocidad de $M_0$ es superior a la de $M_1$. El nombre de bautismo de esta curva le ha sido atribuido por analogía con el camino seguido por un perro que corre en el plano horizontal y trata de alcanzar a su amo que avanza en una ruta rectilínea.

## Persecución

• *Curva de persecución.* — Se dice de una curva que puede ser definida como la trayectoria de un móvil M cuyo vector velocidad permanece colineal al vector $\overrightarrow{MM'}$, donde M' es otro móvil llamado punto perseguido.
V. Perro (Curva del).

## Perspectiva

• *Perspectiva en un espacio proyectivo* P(E) *de dimensión finita.* — Colineación $f$ de X que deja fijo cada punto de un hiperplano H de P(E), llamado base de la perspectiva. Si $f$ es diferente de la identidad, existe un único punto $C \in P(E)$ llamado centro de la perspectiva tal que para todo $x \in P(E)$ los puntos $x$, $f(x)$ y C estén alineados. Si $C \notin H$ y si $x'$ es la intersección de la recta Cx con H, la razón doble $[x, f(x), x', C]$ es constante.

• *Perspectiva en* $\mathbf{R}^3$. — Proyección central.

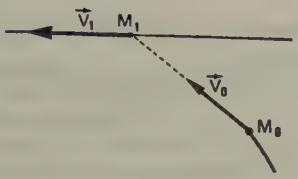
## Pert

• *Método Pert.* — Método (procedente de los Estados Unidos) de investigación de ordenación de las tareas en teoría de la organización del trabajo; es uno de los métodos más utilizados.

## Pertenencia

El signo de pertenencia $\in$ (o la relación de pertenencia) es un término primitivo (una noción primitiva) de las matemáticas; si $a$ y $b$ son objetos matemáticos, la relación $a \in b$ se lee «$a$ pertenece a $b$» o «$a$ es elemento de $b$» o «$a$ es elemento del conjunto $b$». La negación de $a \in b$ se escribe $a \notin b$.
V. Colección, Relación.

• *Grado de pertenencia.* — V. Impreciso.




## Peso

• *Peso de un predicado o de un signo operatorio.* — V. LENGUAJE, PREDICADO.

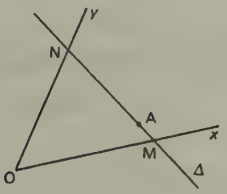
V. ORTOGONALES (Polinomios).

## Peta

V. MÚLTIPLE.

## Philon de Bizancio (siglo III a. C.)

• *Recta de Philon.* — Sean un sector angular saliente (O*x*, O*y*), un punto A de este sector y una recta variable Δ que pasa por A y que corta a O*x* y O*y* en M y N. Entre todas las rectas Δ, aquella que es tal que el segmento MN tenga una longitud mínima se llama recta de Philon.




## Pi (π)

La relación C/D entre la circunferencia C de un círculo y la longitud de su diámetro D es independiente del círculo elegido; se llama $\pi$, primera letra de la escritura griega de «Perímetros». Es también igual a la relación $A/R^2$ entre el área A del círculo y el cuadrado de la longitud R de su radio. Se tiene $\pi \simeq 3{,}14159265358...$ La investigación de la rectificación y de la cuadratura del círculo hizo preguntarse durante mucho tiempo a los matemáticos posteriores a los griegos sobre la naturaleza aritmética de este número. Fue necesario esperar hasta Lambert (en 1761) y Legendre (1794) para saber que $\pi$ y $\pi^2$ son irracionales, y hasta 1882 para que Lindemann estableciera la trascendencia

de $\pi$, de donde nace la imposibilidad de la cuadratura del círculo y de su rectificación con la regla y el compás.

La constancia de la razón entre la longitud de la circunferencia y la de su diámetro, así como la del área del círculo y el cuadrado de la longitud de su radio, y las relaciones constantes análogas que se presentan en el caso de la superficie y del volumen de la esfera, son utilizadas en la fabricación de los objetos redondos, así como en los razonamientos de la geometría pura.

V. CUBATURA, CUADRATURA, RECTIFICACION.

Jean Guilloux y Martine Bouyer han calculado 1.000.000 de decimales de $\pi$ en 1974 en un ordenador CDC 7600. Las reducidas:

$$r_1 = \frac{22}{7};\ r_2 = \frac{333}{106};\ r_3 = \frac{355}{113};\ r_4 = \frac{103.993}{33.102},\ \text{etc.}$$

constituyen buenos valores aproximados de $\pi$ .; así $r_3$ es un valor aproximado a $3 . 10^{-7}$. Algunos desarrollos en serie entera como el de Arc tg $x$ permiten el cálculo aproximado de $\pi$:

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arcotg } 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \text{Arcotg } \frac{1}{5} - \text{Arcotg } \frac{1}{239}$$ (convergencia «lenta», Leibniz)

(convergencia más «rápida», Machin)

El número $\pi$ aparece en numerosas fórmulas del análisis y teoría de números:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6};\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90};\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945};\ \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

(función $\zeta$ de Riemann)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};\ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_0^{\infty} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ (integrales de Fresnel)

(integral de Gauss)

$$\pi = 2\, i\ \text{Log}\ \frac{1-i}{1+i}$$ (fórmula de Fagnano)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdots =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,\frac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2}$$ (Wallis)

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{}{2 + \ \ldots}}}}}}$$

(Lord Brounker)

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$ (Viète).

## **Picard,** Emile (1856-1941)

• *Teorema de Picard.* — Sea $z_0 \in \mathbf{C}$ un punto singular esencial aislado de una función $f$ holomorfa en un entorno de $z_0$. Cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, sobre el disco D de centro $z_0$ y de radio $\varepsilon$, la función $f$ toma todos los valores complejos salvo uno al menos. Dicho de otro modo, existe como máximo un punto $a \in \mathbf{C}$ tal que la ecuación $a = f(z)$ no tenga solución en D.

• *Teorema de las aproximaciones sucesivas de Picard.* — Da condiciones suficientes para que la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ que verifica $y(x_0) = y_0$ sea el límite de la sucesión $(y_n)_{n \geqslant 1}$ definida por:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx$$

e

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx \text{ para } n \geqslant 2.$$

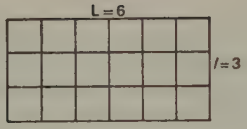
## **Pick,** Georg Alexandrov (1859-1942)

• *Teorema de Pick.* — El área $a$ de un polígono cuyos vértices son los nudos de una cuadrícula (unidad de área: la de un cuadrado), viene dada por:

$$a = \frac{1}{2}p + i - 1,$$

donde $p$ designa el número de nudos situados en el borde del polígono e $i$ el número de nudos interiores. Así, aplicado a un rectángulo se obtiene:

$$a = \frac{1}{2}(2L + 2l) + (L - 1)(l - 1) - 1 = Ll.$$




## Pico

V. MÚLTIPLE.

## Pie

• *Pie de una perpendicular trazada desde un punto* A *sobre una recta* D. — Punto de intersección de D con la perpendicular trazada desde A-D.

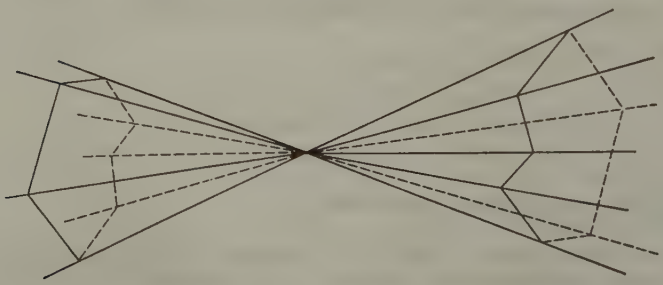
• *Pie de una ceviana* D *de un triángulo.* — Punto de intersección de la ceviana D con el lado del triángulo opuesto al vértice por el que pasa D.

## Pincel

Sinónimo de haz lineal.

## Piramidal

• *Superficie piramidal.* — Cono que admite como directriz un polígono.



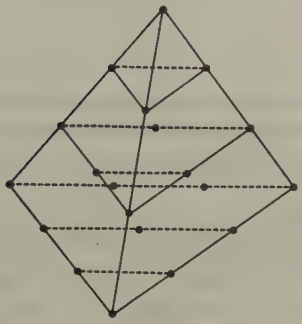
## Piramidales

• *Números piramidales.* — Números figurados por un conjunto de puntos dispuestos en una pirámide. Para todo entero $n \geqslant 1$, se denomina número piramidal de índice $n$ la suma simbolizada por $\pi_n$ de los $n$ primeros números triangulares $T_i$:

$$\pi_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{1}{2} n(n+1)$$

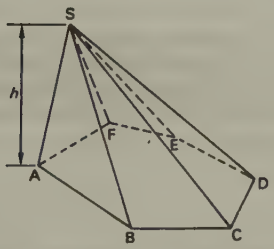
$$= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2).$$

Los primeros valores son $\pi_1 = 1$; $\pi_2 = 4$; $\pi_3 = 10$; $\pi_4 = 20$; $\pi_5 = 35$...

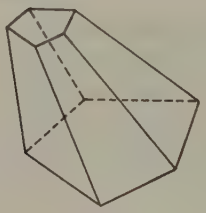


## Pirámide

Se denomina pirámide a un poliedro cuyas aristas se obtienen uniendo los vértices de un polígono llamado base a un punto S llamado vértice, no situado en el plano de ese polígono. Su volumen es igual a $Ah/3$, donde A es el área de la base y donde $h$ es la distancia llamada altura de S a la base. El tetraedro puede ser considerado de cuatro maneras diferentes como una pirámide.




• *Tronco de pirámide.* — Entre los dos poliedros obtenidos al cortar una pirámide de vértices S por un plano paralelo a la base, el que no contiene S. se llama un tronco de pirámide.



## **Pisot,** Charles (1910-1984)

• *Criterio de Pisot.* — Permite atestiguar la no-trascendencia eventual de ciertos números: para que un número real $\alpha$ sea trascendente es preciso que la serie $\sum_{n\geq 0} \operatorname{sen}^2(\pi\alpha x^n)$ diverja para todo número real $x$ superior a 1.

• *Número de Pisot-Vijayaraghavan.*
Se denomina número de Pisot a un número real estrictamente superior a uno, raíz de un polinomio unitario de coeficientes enteros que no posee ningún otro cero real o complejo de módulo superior o igual a uno; ejemplos: todo entero superior a uno. Los números de Pisot forman una parte cerrada de **R**. Juegan un papel importante en la aproximación de los números algebraicos por números racionales repartidos regularmente. El producto infinito $\prod_{n\geq 1} \cos(\alpha^n)$ converge hacia un límite no nulo si y solamente si $\alpha$ es un número de Pisot. El conjunto de los números de Pisot juega un papel importante en análisis armónico.

## **Pitágoras** (siglo VI a. de C.)

• *Ecuación de Pitágoras.* — Ecuación diofantiana $x^2 = y^2 + z^2$; su solución general viene dada por:

$$x = k(m^2 + n^2),\ y = k(m^2 - n^2),\ z = 2kmn \text{ y } m - n \equiv 1 \mod 2.$$

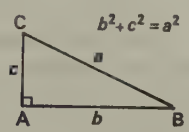
• *Tabla de Pitágoras de una ley de composición interna* $*$ *sobre un conjunto* E *de n elementos.* — Tabla de $n$ líneas y $n$ columnas cuyas casillas son referenciadas por pares de elementos de E. En una casilla referenciada por el par $(a, b)$ se escribe el compuesto $a * b$. Ejemplo: tabla de adición en $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$.

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

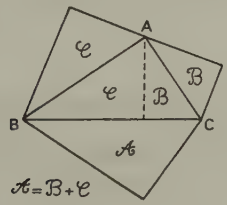
La enseñanza primaria ha hecho uso a menudo de la tabla de multiplicación de Pitágoras de 1 a 10.

• *Teorema de Pitágoras.* — En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la

longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Elisha Scott (*The Pythagorean Proposition*, 2.ª ed., 1968) ha coleccionado 367 demostraciones diferentes (pero no todas ellas son formalmente diferentes) de este célebre teorema y las ha clasificado. Antiguamente era calificado de «puente de los asnos» de la geometría. V. MOLINO DE VIENTO.




● *Teoremas de Pitágoras generalizados.* — 1) En un espacio prehilbertiano, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores ortogonales del espacio, tenemos $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$. 2) En el plano: el área de una figura construida sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes construidas sobre los otros dos lados. Esta propiedad se hace evidente si se construye una figura igual al triángulo rectángulo inicial. Constituye el teorema de Pitágoras propiamente dicho si se construye un cuadrado.
V. HIPÓCRATES (Lúnulas de), MOLINO DE VIENTO.



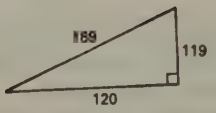

## Pitagórico

● *Problema del paralelepípedo rectángulo pitagórico.* — Entre los paralelepípedos rectángulos cuyas caras todas tienen lados y diagonales de longitudes enteras, ¿existe uno cuya diagonal tenga también una longitud entera?

● *Triángulo pitagórico.* — V. NÚMEROS PITAGÓRICOS.

## Pitagóricos

● *Números pitagóricos.* — Tres enteros *a*, *b*, *c* se llaman pitagóricos si el triplete (*a*, *b*, *c*) es solución de la ecuación de Pitágoras; por ejemplo, (169, 119, 120). Se dice igualmente que (*a*, *b*, *c*) constituye una triada o un triángulo pitagórico; en efecto, puede considerarse *a*, *b* y *c* como longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

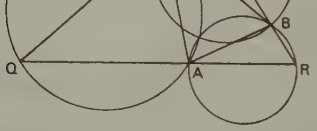



## Pivotamiento

• *Pivotamiento de una superficie sobre otra.* — Sean dos superficies $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$, la primera fija, la segunda móvil, tangentes en I en el instante $t$. Se dice que $\Sigma_2$ pivota sobre $\Sigma_1$ en el instante $t$ si el movimiento del espacio móvil vinculado a $\Sigma_2$ es tangente en el instante $t$ a un movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por I y es perpendicular al plano tangente en I a las dos superficies.

## Pivote

• *Teorema del pivote.* — Si los vértices A, B, C de un triángulo están situados respectivamente sobre los lados QR, RP y PQ de un triángulo PQR, las circunferencias circunscritas a los triángulos CBP, ACQ y BAR tienen un punto en común.




## PL 1

Lenguaje de la programación puesta a punto a partir de 1964 y cuyo nombre procede de «Programming Language One». Universal en sus utilizaciones, conviene tanto al tratamiento de los problemas científicos y técnicos como al tratamiento de los problemas de gestión.

## Placas

• *Ecuación de placas vibrantes.* — V. VIBRANTES.

## Plana

• *Figura plana.* — Figura cuyos puntos todos están situados en un mismo

plano. Se definen de esta forma las curvas planas, los cuadriláteros planos, las superficies planas, etc.

• *Geometría plana.* — Geometría sobre un plano. Cuando no se precisa más se trata de un plano euclídeo. Es válida para cada plano de la geometría en el espacio.

• *Trigonometría plana.* — Sinónimo de trigonometría circular utilizado por oposición a trigonometría esférica.

## Planario

• *Grafo planario.* — Grafo que puede representarse sobre un plano de una manera tal que dos aristas cualesquiera no se encuentran al margen de sus extremos. Un grafo planario puede representarse sobre una esfera con las mismas condiciones impuestas para las aristas y a la inversa. El grafo asociado al problema de los siete puentes de Konigsberg es planario. El asociado al problema de los tres pozos y las tres casas no lo es.
V. EULER, SIETE, TRES.

• *Grafo planario topológico.* — Representación sobre un plano P de un grafo planario tal que las aristas sean curvas que no se encuentran fuera de sus extremos. Los números $n$ de vértices, $m$ de aristas y $f$ de caras de un grafo planario topológico conexo verifican la fórmula de Euler $n - m + f = 2$.

## Plancherel, Michel (1885-1967)

• *Teorema de Plancherel.* — Sea $f$ una función de cuadrado integrable sobre $]-\infty, +\infty[$. Cuando $a$ tiende hacia $+\infty$, la integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixt} f(t)\, dt$$

converge en media cuadrática hacia un real $\hat{f}(x)$, la función $x \mapsto \hat{f}(x)$ es de cuadrado integrable sobre $]-\infty, +\infty[$ y verifica:

$$f(x) = \lim_{a \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{+itx} \hat{f}(t)\ dt.$$

• *Transformación y transformada de Fourier-Plancherel.* — Dada una función $f$ de cuadrado integrable sobre $\mathbf{R}$, la aplicación $f \mapsto \hat{f}$, donde $f$ es definida por:

$$\hat{f}(x) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-ixt} \cdot f(t)\, dt$$

se denomina transformación de Fourier-Plancherel y $\hat{f}$ es la transformada de Fourier-Plancherel de $f$.

## Planimetría

Geometría aplicada a la medida de las áreas.

## Planímetro

Instrumento que permite la medida de las áreas planas.

## Plano

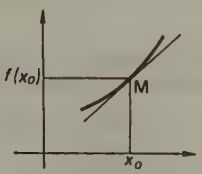
Empleada sola, esta palabra, que no tiene sentido preciso, evoca un espacio de dimensión 2. Puede definirse axiomáticamente en geometría un plano por la familia de sus rectas; según la geometría considerada (euclídea, de Riemann, de Lobatchevski, etcétera), un plano de esa geometría se denomina euclídeo, de Riemann, de Lobatchevski, etcétera. Cuando usualmente se habla «del plano» se trata del plano euclídeo.

V. AFÍN, COMPLEJO, DIAMETRAL, FIN (de), FRONTAL, HORIZONTAL, MEDIADOR, NORMAL, OSCULADOR, PERFIL, POLAR, PROYECTIVO, PUNTEADO, RADICAL, RECTIFICANTE, TANGENTE, VECTORIAL, VERTICAL.

- *Cuadrilátero plano.* — Cuadrilátero cuyos vértices son coplanarios.
- *Plano de Argand-Cauchy o de Argand-Gauss.* — Plano complejo.
- *Plano del infinito.* — V. INFINITO (Hiperplano del).
- *Plano de simetría.* — V. SIMETRÍA.
- *Plano o punto plano de una curva plana de ecuación cartesiana* $y = f(x)$. — Sea $n$ un entero par superior a 3. Si $f$ admite en $x_0 \in \mathbf{R}$ derivadas hasta el orden $n$ tales que:

$$f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0 \text{ y } f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

entonces el punto M de la curva de abscisa $x_0$ se denomina chato o punto chato. En semejante punto, la curva no atraviesa su tangente. Intuitivamente, cuanto mayor es $n$ mayor es la curva «aplastada» sobre la tangente en el entorno de M.




- *Semiplano.* — V. SEMI.

## Planos

V. Bisectores, Haz, Paralelos, Perpendiculares, Secantes.

• *Angulo de dos planos secantes.* — V. Angulo.

## Plata

• *Relación o número de plata.* — El polinomio cromático de un grafo triangulado G posee siempre una raíz próxima al cuadrado del número de oro. Más precisamente, Tutte ha demostrado que tenemos:

$$P(G, \Phi^2) \leqslant \Phi^{5-k}$$

siendo $k$ el grado del polinomio.
Ha constatado igualmente que los polinomios cromáticos conocidos poseían asimismo otra raíz próxima a $2 + 2\cos\frac{2\pi}{7}$ que denomina relación de plata.

## Plateau, Joseph A. F. (1801-1883)

• *Ecuación de Plateau.* — Ecuación en derivadas parciales:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Las soluciones del problema de Plateau son superficies de ecuación $z = u(x, y)$, donde $u$ es solución de la ecuación de Plateau.

• *Problema de Plateau.* — Determinación en $\mathbf{R}^3$ de la superficie de área mínimum limitada por una curva C izquierda, cerrada y sin punto doble. Este problema que encuentra aplicaciones en física en diversos fenómenos de tensión superficial fue resuelto en 1931 por Tibor Rado y Jesse Doublas. Incluso en los casos simples, la expresión de esas superficies en geometría analítica sigue desconocida. Se pueden concretar esas superficies hundiendo en agua con jabón un hilo metálico que materializa la curva C.
V. Plateau (Ecuación de).

## Platónicos

• *Cuerpos o sólidos platónicos.* — Nombre dado, debido a los trabajos de Platón, a los cinco poliedros regulares.
V. Regular.

## Plenamente

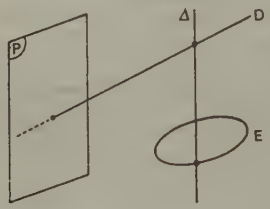
• *Functor plenamente fiel.* — V. Fiel.

## Pliegues

• *Problema de pliegues.* — V. SELLOS DE CORREOS.

## Plücker, Julius (1801-1868)

• *Conoide de Plücker.* — Conoide cuya directriz es una elipse. Por tanto, está engendrada por una recta Δ paralela a un plano fijo P, que encuentra por un lado una recta fija D no paralela a P y por otro lado una elipse fija E. Es una superficie reglada no desarrollable.



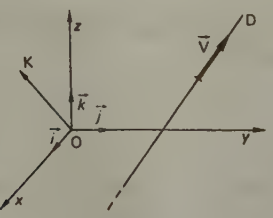

• *Coordenadas de Plücker.* — V. PLUCKERIANAS.

• *Fórmulas de Plücker.* — Dada una curva algebraica plana de grado $m$, si se designa por $c$ su clase, por $d$ el número de sus puntos dobles, por $r$ el número de sus puntos de retroceso de primera especie, por $i$ el número de sus puntos de inflexión y por $t$ el número de sus bitangentes, las fórmulas de Plücker afirman que:

$$c = m(m-1) - 2d - 3r$$
$$m = c(c-1) - 2t - 3i$$
$$i = 3m(m-2) - 6d - 8r$$
$$r = 3c(c-2) - 6t - 8i.$$

## Plückerianas

• *Coordenadas plückerianas de una recta* D *en un sistema de referencia ortonormado* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. — Sean $\overline{V}$ un vector director de D de componentes $(a, b, c)$ y $\overrightarrow{OK}$ el momento de componentes $(l, m, n)$ del vector deslizante $(D, \overline{V})$ en



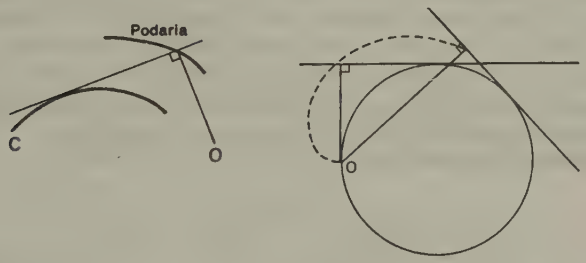
relación a O. La 6-upla ($a$, $b$, $c$, $k$, $m$, $n$) se denomina sistema de coordenadas plückerianas de D. Se define, salvo un factor multiplicativo, en el sentido de que si ($a'$, $b'$, $c'$, $l'$, $m'$, $n'$) es otro sistema de coordenadas plückerianas de D, los números $a'$, $b'$, $c'$, $l'$, $m'$, $n'$ son proporcionales a los números $a$, $b$, $c$, $k$, $m$ y $n$.

## Población

Los primeros estudios estadísticos concernían sobre todo a poblaciones humanas. El término población ha sido conservado para designar de forma muy general la «colección» o el «conjunto» de objetos sobre una parte de la cual se hace un estudio estadístico.

## Podaria

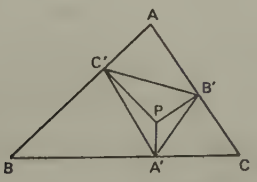
• *Podaria de una curva plana* C *con relación a un punto fijo* O. — Lugar de las proyecciones de O sobre las tangentes a la curva C. La podaria de una circunferencia con relación a uno de sus puntos es una cardioide.




Podaria de un círculo por relación a O

• *Podaria inversa o negativa.* — Sinónimo de antipodaria.

• *Triángulo podario de un punto por relación a un triángulo.* — Sea P un punto interior a un triángulo ABC y sean A', B', C' los pies de las perpendiculares trazadas de P a los lados BC, CA y AB. El triángulo A'B'C' se denomina triángulo podario de P con relación al triángulo ABC.



## Poincaré, Henri Jules (1854-1912)

• *Característica de Euler-Poincaré.* — V. EULER.

• *Conjetura de Poincaré.* — Para $n \geqslant 3$, la única superficie compacta orientable y simplemente conexa es homeomorfa a la esfera $S_n$. Poincaré sabía este resultado exacto para $n = 2$. Recientemente se ha probado que es verdadero para $n \geqslant 5$, pero para $n = 3$ y $n = 4$ el problema sigue abierto.

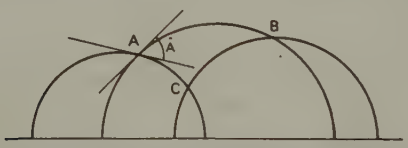
• *Desigualdad de Poincaré-Boole.* — V. BOOLE.

• *Igualdad de Poincaré (o principio de exclusión-inclusión).* — Dados unos sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, tenemos:

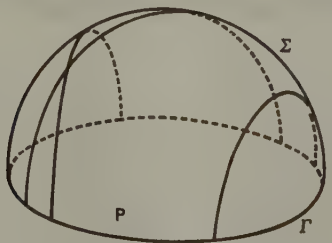
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

• *Grupo de Poincaré.* — Sinónimo de grupo fundamental. V. FUNDAMENTAL.

• *Modelos de Poincaré.* — Interpretaciones de la geometría de Lobatchevski-Bolyai a partir de la geometría euclídea. Un modelo consiste en representar el plano de Lobatchevski por el semi-plano P de Poincaré y las pseudo-rectas por los semi-círculos centrados sobre la frontera de P. El conjunto P está provisto de una métrica tal que la pseudo-recta es el camino más corto para ir de un punto a otro. En esta geometría, el área (no euclídea) de un triángulo es igual a $\pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$, donde $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son los ángulos del triángulo, la suma de los ángulos de un triángulo es, por tanto, inferior a $\pi$; además, cuando las longitudes de los lados de un triángulo tienden hacia $+\infty$, el área del triángulo permanece finita.




Otro modelo consiste en representar el plano de Lobatchevski por una semi-esfera Σ limitada por un gran círculo Γ de un plano P. Las pseudo-rectas son los semi-círculos obtenidos al cortar Σ por planos perpendiculares a P.



• *Semi-plano de Poincaré.* — Conjunto de los números complejos $z$ cuya parte imaginaria $\mathrm{Im}(z)$ es estrictamente positiva.

• *Teorema de Poincaré.* — Toda forma diferencial cerrada de clase $C^1$ sobre un abierto estrellado U de un espacio de Banach es exacto sobre U.

• *Teorema del retorno de Poincaré.* — Sea D un dominio acotado de un espacio euclídeo y sea $f$ un homeomorfismo de D sobre D que conserva los volúmenes. Entonces, en todo entorno U de un punto cualquiera de D existe un punto $x \in U$ tal que $f^n(x) \in U$ para cierto entero $n > 0$. (También se dice que la aplicación $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ hace volver $x$ en U.) Según este teorema puede afirmarse que una bola dejada caer desde un punto A de un cuenco asimétrico volverá (al cabo de un tiempo desconocido) al entorno de su punto de partida.

## **Poisson,** Simeon Denis (1781-1840)

• *Ecuación de Poisson.* — Ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,\ y,\ z).$$

Interviene en física en la teoría de los potenciales newtonianos.

• *Integral de Poisson:* Integral:

$$v(\rho,\ \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \alpha)}\, \Phi(\alpha)\, d\alpha.$$

Al plantear $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ la función definida por $u(x,\ y) = v(\rho,\ \theta)$ es una solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

armónica sobre el disco $x^2 + y^2 < 1$, que toma sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$ los valores dados $\Phi(\alpha)$, donde $\alpha = \mathrm{Arg}(x + iy)$.

• *Ley de Poisson.* — Una variable aleatoria discreta X cuyo conjunto de

valores tomados es N obedece a una ley de Poisson si su función de distribución está definida por:

$$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},$$

donde $\lambda$ es una constante real positiva llamada parámetro de la ley. La esperanza matemática y la varianza de X son las dos iguales al parámetro $\lambda$. La ley de Poisson interviene en la construcción de obras de Xenakis y en las de otros compositores que han recurrido a un aleatorio parcial.

• *Núcleo de Poisson.* — Función K definida sobre $]0, 1[ \times \mathbf{R}$ por:

$$K(r, x) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos 2\pi x}.$$

• *Sistema de ecuaciones de Poisson-Hamilton de un movimiento.* — V. HAMILTONIANO.

• *Variable aleatoria de Poisson.* — Variable aleatoria cuya ley es de Poisson.

## Polaca

• *Notación polaca.* — Permite la escritura de fórmulas lógicas y algebraicas sin paréntesis. Se debe a Lukawiewicz. Por ejemplo, el número $a(b + c)$ puede simbolizarse $\times a + bc$ o $bc + a \times$. En el primer caso, la notación polaca se denomina prefijada, en el segundo postfijada. Algunas calculadoras electrónicas de bolsillo utilizan este principio de notación.

## Polar

• *Polar de un punto* A *por relación a una cónica (o resp. a dos rectas).* — Recta definida como el conjunto de los puntos conjugados de A por relación a la cónica (resp. a las dos rectas).

• *Angulo polar.* — V. POLARES (Coordenadas).

• *Eje polar.* — V. POLARES (Coordenadas).

• *Ecuación polar de una curva plana* C. — Relación $f(\rho, \theta) = 0$, que expresa una condición necesaria y suficiente para que el punto del plano de coordenadas polares $(\rho, \theta)$ pertenezca a C.

• *Forma polar de una forma cuadrática q sobre un* K*-espacio vectorial* E, *donde* K *es de característica diferente de* 2. — Forma bilineal simétrica $\varphi$ definida sobre E por la igualdad llamada de polarización:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

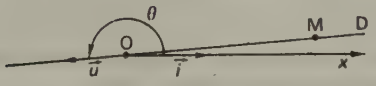
La forma cuadrática asociada a $\varphi$ es $q$.

• *Plano polar de un punto* A *por relación a una cuádrica.* — Conjunto de los puntos conjugados de A por relación a la cuádrica.

• *Reciprocidad polar.* — Si la polar de A en relación a una cónica pasa por B, entonces la polar de B en relación a esa cónica pasa por A. Tenemos un resultado análogo para los planos polares en relación a una cuádrica.

## Polares

• *Coordenadas polares en* $\mathbf{R}^2$. — Sean O un punto del plano euclideo y Ox una semi-recta de origen O de vector director unitario $\vec{i}$. Para todo punto $M \neq 0$ consideremos un vector unitario $\vec{u}$ director de la recta D que pasa por O y M. El par $(\rho, \theta)$, donde $\rho$ es la medida algebraica $\overline{OM}$ sobre el eje $(O, \vec{u}, D)$ y $\theta$ el ángulo $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$ se denomina par de coordenadas polares de M en el sistema de referencia de polo O y de eje polar Ox. El ángulo $\theta$ se denomina ángulo polar y $\rho$ el radio vector de M.




• *Coordenadas polares en* $\mathbf{R}^3$. — Coordenadas esféricas en $\mathbf{R}^3$.

• *Transformación por polares recíprocas.* — Sea $\Gamma$ una cónica del plano. A todo punto M del plano se puede asociar la polar de M en relación a $\Gamma$. Recíprocamente, a toda recta del plano se le puede asociar su polo en relación a $\Gamma$. Esta correspondencia entre las rectas y los puntos del plano se denomina transformación por polares recíprocas o también polaridad en relación a la cónica $\Gamma$. Por polaridad, puntos alineados se transforman en rectas concurrentes y recíprocamente rectas concurrentes se transforman en puntos alineados; un punto M de una recta $d$ es transformado en una recta $d'$ que pasa por el punto M' asociado a la recta $d$.
V. DUALIDAD.

## Polaridad

• *Polaridad por relación a una cónica.* — Transformación por polares recíprocas.
V. POLARES.

## Polarización

• *Igualdad o identidad de polarización* — V. POLAR (Forma).

## Polidisco

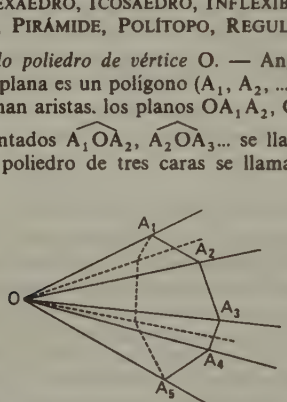
• *Polidisco abierto (resp. cerrado) de* $\mathbf{C}^n$ $(n \geqslant 1)$. — Producto $\prod_{i=1}^{n} D_i$ de $n$ discos abiertos (resp. cerrados) de C.

## Poliedro

Sólido de $\mathbf{R}^3$ limitado por un conjunto finito E de polígonos planos llamados caras, tales que cada lado de un polígono cualquiera de E sea común con un lado de otro polígono de E. Los vértices y las aristas de esos polígonos son los vértices y las aristas del poliedro. Un paralelepípedo, un cubo, una pirámide, son ejemplos de poliedros. No existen más que cinco poliedros regulares que Platón conocía ya: el tetraedro, el octaedro, el cubo, el icosaedro y el dodecaedro. En el límite una esfera es un poliedro.

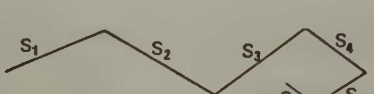
V. BRICARD, CIRCUNSCRITO, CÓNCAVO, CONNELLY, CONVEXO, CSASZAR, CUBO, DESCARTES-EULER, DIAGONAL, DODECAEDRO, FLEXAEDRO, FLEXIBLE, HEXAEDRO, ICOSAEDRO, INFLEXIBLE, INSCRITO, OCTAEDRO, PARALELEPÍPEDO, PIRÁMIDE, POLÍTOPO, REGULAR, ROMBOEDRO, TETRAEDRO.

• *Angulo poliedro de vértice* O. — Angulo sólido de vértice O del que una sección plana es un polígono $(A_1, A_2, ..., A_n)$. Las semi-rectas $OA_1$, $OA_2$, ... se denominan aristas, los planos $OA_1A_2$, $OA_2A_3$... se llaman caras y los ángulos no orientados $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$... se llaman ángulos del ángulo poliedro. Un ángulo poliedro de tres caras se llama ángulo triedro.




## Poligonal

• *Línea poligonal.* — Sucesión finita de segmentos coplanarios distintos $(S_1, S_2, ..., S_n)$ tal que, para todo $i = 2, ..., n-1$ el segmento $S_i$ tenga un extremo en común con $S_{i-1}$ y el otro con $S_{i+1}$.




## Poligonales

• *Números poligonales.* — Números figurados representados por conjuntos de puntos repartidos en un polígono regular convexo según el principio ilustrado a continuación. Si el polígono tiene $k$ lados, y si en cada lado están repartidos $n$ puntos (vértices incluidos), se distingue los números poligonales $p_n^k$ represen-

tados sobre el perímetro del polígono y los números poligonales $P_n^k$ representados sobre la superficie cerrada del polígono.

Números triangulares

$$p_n^3 = t_n = 3(n-1)$$
$$P_n^3 = T_n = T_{n-1} + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

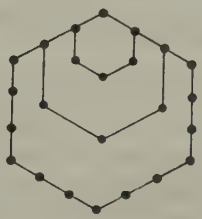
Números cuadrados

$$p_n^4 = c_n = 4(n-1)$$
$$P_n^4 = C_n = n^2$$

Números pentagonales

$$p_n^5 = 5(n-1)$$
$$P_n^5 = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Números hexagonales



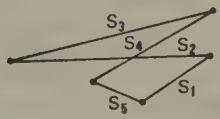
$$p_n^6 = 6(n-1)$$
$$P_n^6 = \frac{n(4n-2)}{2}$$

*Caso general:*

$$p_n^k = k(n-1) \quad \text{y} \quad P_n^k = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}.$$

## Polígono

Figura plana formada por una línea poligonal ($S_1$, $S_2$, ..., $S_n$) tal que el extremo de $S_1$ no común a $S_2$ se confunda con el extremo de $S_n$ no común con $S_{n-1}$. Los segmentos $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ se denominan lados del polígono y sus extremos se llaman vértices.



V. Angulos, Apotema, Circunscrito, Cóncavo, Convexo, Cruzado, Cuadrado, Cuadrángulo, Cuadrilátero, Decágono, Diagonal, Dodecágono, Estrellado, Frecuencias, Hexágono, Inscriptible, Octógono, Paralelogramo, Pentágono, Perímetro, Rectángulo, Recorte, Regular, Rombo, Romboide, Trapecio, Triángulo.

## Polihipergeométrica

• *Ley polihipergeométrica.* — Generalización de la ley hipergeométrica. Sean $N_1, N_2, ..., N_r$ enteros estrictamente positivos, sea $n$ un entero positivo tal que

$$n \leqslant N_1 + N_2 + ... + N_r = N$$

y sea $(X_1, X_2, ..., X_r)$ un $r$-upla de variables aleatorias discretas cuyos valores tomados son los $r$-uplas $(k_1, k_2, ..., k_r)$ tales que:

$$k_1 + k_2 + ... + k_r = n \quad y \quad 0 \leqslant k_i \leqslant N_i$$

para todo $i \in \{1, 2, ..., r\}$. Se dice que la $r$-upla $(X_1, X_2, ..., X_n)$ obedece a una ley polihipergeométrica si:

$$P(X_1 = k_1\ X_2 = k_2, ..., X_r = k_r) = \binom{N_1}{k_1}\binom{N_2}{k_2}...\binom{N_r}{k_r}\Big/\binom{N}{n}.$$

Dada una urna que contega N bolas de las que $N_i$ son de color $C_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ el número real $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, ..., X_r = k_r)$ es la probabilidad para que al sacar $n$ bolas de la urna sin reemplazamiento se obtengan $k_1$ bolas de color $C_1$, $k_2$ bolas de color $C_2$, ..., $k_r$ bolas de color $C_r$.

## Polinomial

• *Ecuación polinomial.* — Ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es un polinomio.

• *Función polinomial.* — Dado un anillo conmutativo unitario A, una A-álgebra B y un polinomio:

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

se denomina función polinomial $\tilde{P}: B \to B$ asociada a P la aplicación definida, para todo $b \in B$, por $\tilde{P}(b) = \sum_{k=0}^{m} a_k b^k$. Los casos más frecuentes son $B = A$ y $B = M_n(A)$. La función $\tilde{P}$ puede ser nula, sin que P lo sea necesariamente; así, si $A = B = Z/3Z$ y si $P(X) = X^3 + 2X$ tenemos $P(b) = 0$ para todo $b \in B$. Por el contrario, si A = Q, R o C, dos polinomios distintos tienen funciones polinomiales distintas. Esta observación legitima la identificación hecha en la enseñanza secundaria entre polinomios y funciones polinomiales.

• *Ley polinomial.* — Ley multinomial.

## Polinomio

En la enseñanza secundaria, la palabra polinomio se utiliza como sinónimo de función polinomio (o polinomial). Este abuso, legítimo debido a que se trata de polinomios con coeficientes en **R**, permite definir las funciones monomios y luego definir los «polinomios», como suma de funciones monomios. En cambio, en el caso de un anillo A cualquiera, las nociones de polinomio de A[X] y de función polinomio no pueden ser identificadas y, por tanto, no se puede definir ya un polinomio como suma de monomios.

• *Polinomio en una indeterminada con coeficientes en un anillo conmutativo unitario* A. — Sucesión $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de elementos de A cuyo conjunto de términos no nulos es finito. Se define la suma y el producto de dos polinomios

$$P = (a_i)_{i\in\mathbf{N}} \text{ y } Q = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$$

por las fórmulas:

$$P + Q = (a_i + b_i)_{i\in\mathbf{N}}$$

$$PQ = (c_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ donde } c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Si se representa por 1 el polinomio (1, 0, 0, ...) y por X el polinomio (0, 1, 0, 0, ...) entonces $X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, ...)$, $X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, ...)$, etc., y todo polinomio $P = (a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$ se escribe de forma única:

$$P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n.$$

Provisto de esta adición y de esta multiplicación, el conjunto de esos polinomios es un anillo conmutativo unitario simbolizado por A[X]. Si A es un cuerpo A[X] es principal.

V. BINOMIO, CARACTERÍSTICO, CERO, CICLOTÓMICO, CROMÁTICO, DERIVACIÓN, DERIVADO, DESCOMPOSICIÓN, DISCRIMINANTE, DISLOCACIÓN (Cuerpo de), FORMAL, GRADO, IRREDUCTIBLE (Elemento), LAGRANGE, MINIMAL, MONOMIO, NULO, PRIMITIVO, PRINCIPAL (Anillo), RAÍCES (Cuerpo de las), RAÍZ, RUPTURA (Cuerpo de), SIMÉTRICO, TRIGONOMÉTRICO, TRINOMIO, UNITARIO, VARIACIÓN (de signo).

• *Polinomio en varias indeterminadas de coeficientes en un anillo conmutativo unitario* A. — El anillo A[X] es conmutativo y unitario. Por tanto, puede definirse (A[X])[Y]; este nuevo anillo, simbolizado por A[X, Y] se denomina el anillo de los polinomios de dos indeterminadas X e Y. Un polinomio P de A[X, Y] se escribe:

$P = \sum_i \sum_j a_{ij} X^i Y^j$, donde a partir de cierto rango, para todo $i$ y para todo $j$, tenemos $a_{ij} = 0$. El valor más elevado de $i$ (resp. $j$) para el que $a_{ij} \neq 0$ se denomina grado parcial de P en relación a X (resp. Y). El mayor de los enteros $i + j$ tal que $a_{ij} \neq 0$ se denomina grado total de P. Pueden definirse de la misma manera los polinomios en 3, 4, ..., $n$ indeterminados.

V. HOMOGÉNEO.

• *Función polinómica.* — Sinónimo de función polinomial (V. POLINOMIAL).

## Polinomios

V. Bernoulli, Bernstein, División, Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre, Ortogonales, Resultante, Tchebychev, Ultraesféricos.

• *Anillo de polinomios.* — V. Polinomio.

• *Suma y producto de dos polinomios.* — V. Polinomio.

## Polítopo

Generalización en $\mathbf{R}^n$ para $n \geqslant 4$ de la noción de polígono en $\mathbf{R}^2$ y de poliedro en $\mathbf{R}^3$. Es un conjunto de puntos de $\mathbf{R}^n$ limitado por hiperplanos. Se define como para los poliedros los vértices de un polítopo así como las caras que son partes de hiperplanos. Para todo entero $n \geqslant 2$, se conoce el número de polítopos regulares en $\mathbf{R}^n$.
V. Regular, Tesseract.

## Polo

V. Analagmatia, Homotecia, Inversión, Polares (Coordenadas).

• *Polo de una recta* D *por relación a una cónica propia.* — Punto único A del plano tal que D sea la polar de A en relación a la cónica.

• *Polo de una función.* — Sea $f$ una función compleja holomorfa en un disco punteado $0 < |z - z_0| < \rho$ de centro $z_0 \in \mathbf{C}$ y que admite $z_0$ como punto singular aislado. El punto $z_0$ se denomina un polo de orden $k \geqslant 1$ si, en el desarrollo de la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$

el coeficiente $a_{-k}$ no es nulo y si $a_i = 0$ para todo $i < -k$. La función $z \mapsto (z - z_0)^k f(z)$ es entonces holomorfa en un entorno de $z_0$.

• *Polo de una fracción racional irreductible* P/Q *de* K(X). — Raíz del polinomio Q. El orden de multiplicidad de esta raíz se llama el orden del polo.

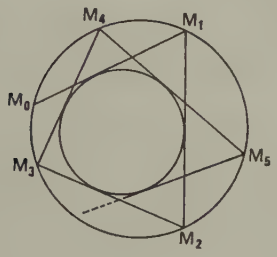
• *Polo de un plano* $\pi$ *en relación a una cuádrica propia.* — Punto único A del espacio tal que $\pi$ sea el plano polar de A con relación a la cuádrica.

## Poncelet, Jean Victor (1788-1867)

• *Haz de círculos de puntos de Poncelet.* — V. Haz.

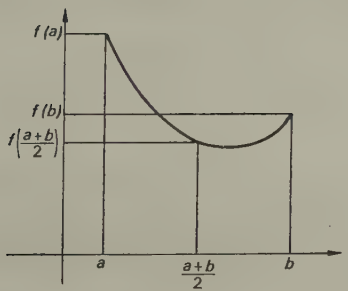
• *Gran teorema de Poncelet para los círculos.* — Sean dos círculos coplanarios C y C′ tales que C′ sea interior a C y sea $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ una sucesión de puntos de C tal que $M_i M_{i+1}$ sea tangente a C′ y $M_i M_{i+1} \neq M_{i+1} M_{i+2}$ para todo $i \in \mathbf{N}$. El teorema de Poncelet afirma que uno se encuentra ante la alternativa siguiente:

— o bien la línea poligonal $M_0\ M_1\ M_2\ M_3$ ... se cierra para formar un polígono de $n$ lados y esto cualquiera que sea la posición del punto inicial $M_0$; — o bien la línea poligonal $M_0\ M_1\ M_2\ M_3$ ... no se cierra jamás y esto cualquiera que sea la posición del punto inicial $M_0$.



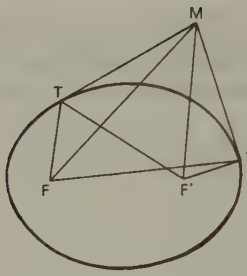

• *Método de Poncelet.* — Método de cálculo aproximado de ciertas integrales. Sea $f$ una función real continua y convexa sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}$, entonces:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$




• *Paradoja de Poncelet.* — Si se transforma por dualidad una cúbica plana se obtiene una curva de clase tres y grado seis, que posee nueve puntos de retroceso que corresponden a los puntos de inflexión de la cúbica. Una curva general de grado $n$ no es, por tanto, la más general de su clase. Las relaciones establecidas por Plücker explican este resultado en apariencia paradójico.

• *Teoremas de Poncelet.* — Sean T y T' los puntos de contactos de las tangentes trazadas desde un punto M a una cónica con centro de focos F y F'. El primer teorema de Poncelet afirma que las rectas (MF) y (MF') tienen iguales bisectrices que las rectas (MT) y (MT'). El segundo afirma que (FM) y (F'M) son bisectrices de los pares de semirrectas (FT, FT') y (F'T, F'T').




## Ponens

- *Modus ponens.* — V. MODUS.

## Por todas partes

- *Relación verdadera casi por todas partes sobre un conjunto* E *provisto de una medida* $\mu$. — Relación tal que el conjunto de los elementos de E para los que la relación es falsa es de medida nula.

- *Parte o conjunto por todas partes denso de un espacio topológico* E. — Parte A de E densa en E.
V. DENSA.

## Porcentaje

Dado un número real positivo $a$, el cociente $a/100$ también se simboliza por $a\%$. Esta escritura, leída «$a$ por ciento», se denomina porcentaje. Los porcentajes son muy utilizados en estadísticas, en matemáticas financieras y económicas... Por ejemplo, un capital de 1.285.000 pesetas colocado a una tasa de interés anual del 8 % reporta el primer año $1.285.000 \times 8\%$, es decir, 102.800 pesetas.

## Porisma

- *Porisma de Steiner.* — V. STEINER.

## Posición

- *Base de un sistema de numeración de posición.* — Número de símbolos utilizados en un sistema de numeración de posición.

• *Geometría de posición.* — Nombre de una rama de la geometría, desarrollada principalmente en los siglos XVIII y XIX y caída en desuso (no debe confundirse con el *analysis situs*). Su objeto es el estudio de problemas que sólo hacen intervenir las posiciones relativas de puntos, rectas y planos; ejemplo: el hexagrama místico.

• *Parámetros de posición de una serie estadística de carácter cuantitativo.* — Números que fijan el orden de magnitud de los valores tomados por el carácter. Los más utilizados son la media, la mediana y la moda.

• *Sistema de numeración de posición.* — A fin de disminuir la cantidad de símbolos distintos necesarios para la escritura de todos los números, el sentido de un símbolo de un sistema de numeración de posición depende del lugar relativo que ocupa en relación a los demás; así, en el sistema usual (sistema decimal), 918, 819, 189 ó 981 no representan el mismo número. Existe una infinidad de sistemas de numeración de posición. Su principio descansa sobre el teorema siguiente: dado un entero $a \geqslant 2$, todo entero $n$ se escribe de manera única:

$$n = u_p a^p + u_{p-1} a^{p-1} + \ldots + u_1 a + u_0$$

donde $u_0, u_1, \ldots, u_p$ son enteros estrictamente inferiores a $a$; para escribir un entero cualquiera basta, por tanto, con símbolos que representen los enteros de 0 a $a - 1$. Tras haberse hecho una selección, se dice que $\overline{u_p u_{p-1} \ldots u_0}$ es la escritura del número $n$ en base $a$. Por ejemplo, diecinueve se escribe 19 en base diez y se escribe 10011 en base dos $(1 \times 10 + 9 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^1 + 1)$. Para las bases superiores a diez es preciso introducir otros símbolos distintos a las cifras 0, 1, ..., 9. Los sistemas más difundidos en la actualidad son los de base diez (sistema decimal) en la vida corriente y en base dos (sistema binario), ocho (sistema octal) y dieciséis en informática.
V. DUODECIMAL, NUMERACIÓN, SEXAGESIMAL.

## Positiva

• *Función numérica positiva f definida sobre un conjunto* E. — Función tal que $f(x)$ sea positivo para todo $x \in E$.

• *Forma bilineal simétrica positiva.* — Forma bilineal simétrica $\varphi$ sobre un **R**-espacio vectorial E tal que $\varphi(x, x) \geqslant 0$ para todo $x \in E$. La forma $\varphi$ es definida positiva si $\varphi(x, x) > 0$ para todo vector no nulo $x$ de E. Una forma definida positiva es una forma positiva no degenerada.

• *Forma cuadrática positiva.* — Forma cuadrática $q$ sobre un **R**-espacio vectorial E tal que $q(x) \geqslant 0$ para todo $x \in E$. La forma $q$ es definida positiva si $q(x) > 0$ para todo vector no nulo $x$ de E.

• *Forma sesquilineal hermitiana positiva.* — Forma sesquilineal hermitiana compleja $\varphi$ sobre un **C**-espacio vectorial E tal que $\varphi(x, x)$ sea un número real positivo para todo $x \in E$. La forma $\varphi$ es definida positiva si $\varphi(x, x) > 0$ para todo vector no nulo $x$ de E. Una forma definida positiva es una forma positiva no degenerada.

- *Homotecia positiva.* — Homotecia de razón positiva.
- *Inversión positiva.* — Inversión de potencia positiva.
- *Isometría afín positiva.* — Isometría afín directa.
- *Medida real positiva.* — Medida de valores en $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
- *Superficie de curvatura total positiva o de curvatura positiva.* — Superficie cuya curvatura total en cada punto es positiva. Ejemplos: la esfera, la elipsoide.

## Positivo

- *Angulo derecho positivo.* — V. DERECHO.
- *Automorfismo positivo.* — Automorfismo directo.
- *Número positivo.* — Número real superior a 0. El opuesto de un número positivo es negativo y recíprocamente. El único número positivo y negativo es 0.
- *Sentido positivo.* — Sobre un eje (O, D, $\vec{i}$) orientado por $\vec{i}$, una base $\vec{j}$ de la recta vectorial engendrada por $\vec{i}$ es directa si y solamente si existe un número real estrictamente positivo $\alpha$ tal que $\vec{j} = \alpha\vec{i}$. Se dice que $\vec{j}$ tiene un sentido positivo. Más generalmente, a veces se dice que una base directa tiene un sentido positivo.

## Post, E. L.

- *Teorema de Markov-Post.* — V. MARKOV.

## Postulado

Antiguamente se distinguían los axiomas de los postulados. En ambos casos, se trataba de proposiciones admitidas sin demostración. Se denominaban axiomas a aquéllos considerados como evidentes y postulados a los otros que el lector debía admitir, pero que eran candidatos a la demostración. En la actualidad, esta distinción ya no se hace y la palabra postulado se emplea cada vez menos.
V. AXIOMA, BERTRAND, PARALELOS.

- *Quinto postulado de Euclides.* — V. EUCLIDES.

## Postulados

- *Postulados de Euclides.* — V. EUCLIDES.

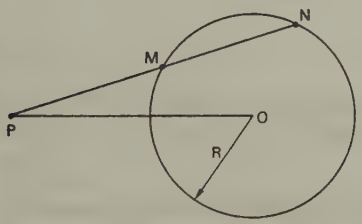
## Potencia

• *Potencia de un conjunto* E. — Cardinal de E.
V. CONTINUO, FUNCIONAL, NUMERABLE.

• *Potencia de una inversión.* — V. INVERSIÓN.

• *Potencia en mecánica.* — La potencia de un sistema de trabajo es la cantidad de energía proporcionada por ese sistema por unidad de tiempo.
Para un punto material sometido a la acción de una fuerza $\vec{F}$ y que se desplaza en el instante $t$ a la velocidad $\vec{V}$, la potencia en ese instante es $W(t) = \vec{F} \cdot \vec{V}$.

• *Potencia de un punto* P *en relación a una circunferencia (o una esfera) de centro* O *y de radio* R. — Número real $PO^2 - R^2$. Si M y N son los puntos de intersección de una recta que pasa por P con la circunferencia (o la esfera), el número real $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$ es igual a la potencia de P con relación a la circunferencia (o a la esfera); por tanto, es independiente de la recta.




• *Potencia n-ésima de un número real* $a \neq 0$ ($n \in \mathbf{N}$). — Número real $a^n$ (se lee «$a$ exponente $n$» o «$a$ potencia $n$») definido por recurrencia por $a^0 = 1$, $a^1 = a$ y $a^n = a.a^{n-1}$ para $n \geqslant 2$. Para $n \geqslant 2$ se calcula, por tanto, $a^n$ por multiplicaciones repetidas:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a.}_{n}$$

• *Potencia n-ésima de un número real* $a \neq 0$ *de exponente entero negativo.* — Si $n \in \mathbf{N}$, se llama potencia de $a$ de exponente $-n$ al número real simbolizado por $a^{-n}$ y definido por $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

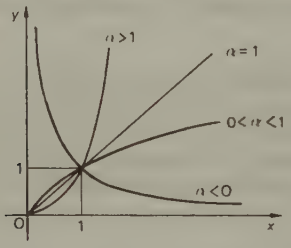
• *Potencia de un número real* $a > 0$ *de exponente racional.* — Sea $\dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ con $p \in \mathbf{Z}$ y $q \in \mathbf{N}$; se llama potencia de $a$ y exponente $p/q$ al número real representado por $a^{p/q}$ y definido por $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$.

• *Potencia de un número real* $a > 0$ *de exponente real.* — La función exponencial de base $a$ prolonga la función de $\mathbf{Q}$ en $]0, +\infty[$ que a $r \in \mathbf{Q}$ asocia $a^r$.

Por esta razón, la imagen de un número real $x$ cualquiera por la función exponencial de base $a$ se representa $a^x$ y se llama potencia de $a$ de exponente $x$ (se lee también «$a$ de exponente $x$» o «$a$ de potencia $x$»). Por convención, la notación $a^{b^r}$ significa $a^{(b^r)}$.

• *Potencia regular.* — V. REGULAR.

• *Función potencial.* — Dado un número real $\alpha$, se llama función potencial de exponente $\alpha$ a la función de $]0, +\infty[$ en $\mathbf{R}$ definida por $x \mapsto x^\alpha$.




## Potencial

• *Campo de fuerzas o fuerza que deriva de un potencial.* — Si una fuerza $\vec{F}$ deriva de una función de fuerza $\Phi$, se dice que $\vec{F}$ deriva del potencial $U = -\Phi$.
V. NEWTONIANO.

• *Infinito potencial.* — Utilizado por oposición a infinito actual.
V. INFINITO.

• *Energía potencial.* — Si las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ que actúan sobre un sistema de $n$ puntos materiales dependen únicamente de la posición de cada punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n, z_n)$ por relación a un sistema de referencia $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ entonces existe una función diferenciable $U : \mathbf{R}^{3n} \to \mathbf{R}$ de variable $(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$ tal que:

$$\vec{F}_i = -\left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\vec{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_i}\vec{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial z_i}\vec{e}_3\right] \text{ para } i = 1, ..., n.$$

La función U se denomina energía potencial del sistema.

## Potencias

• *División de los polinomios según las potencias crecientes o decrecientes.* — V. DIVISIÓN.

## Pozos

• *Problema de los tres pozos y de las tres casas.* — V. TRES.

## Precesión

• *Angulo de precesión.* — V. EULER.

## Precompacta

• *Parte precompacta de un espacio métrico* (E, *d*). — Parte A de E tal que el sub-espacio métrico (A, *d*) de (E, *d*) sea un espacio métrico precompacto. Las partes precompactas de $\mathbf{R}^n$ coinciden con las partes acotadas de $\mathbf{R}^n$.

## Precompacto

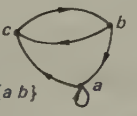
• *Espacio métrico precompacto.* — Un espacio métrico E se denomina precompacto si para todo $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de E por bolas abiertas de radio $\varepsilon$.

## Predecesor

V. ORDINAL.

• *Predecesor de un entero* $b \in \mathbf{N}^*$. — El único entero $a \in \mathbf{N}$ del que $b$ es el sucesor. Tenemos entonces $b = a + 1$.
V. PEANO

• *Predecesor de un vértice x de un grafo.* — Vértice *y* tal que existe un arco de extremo inicial *y* y de extremo terminal *x*. El conjunto de los predecesores de *x* se simboliza por $\Gamma^-(x)$.




## Predicado

• *Predicado de peso p.* — Relación entre *p* variables del cálculo de predicados; por ejemplo, la relación $\leqslant$ es un predicado de peso 2.

## Predicados

• *Cálculo de predicados.* — Rama de la lógica que contiene el cálculo proposicional. Consta de:

1) de los individuos $a$, $b$, $c$, ...;
2) de variables $x$, $y$, $z$, ...;
3) de predicados (V. PREDICADO);
4) dos paréntesis ) y (;
5) los conectores del cálculo proposicional y dos nuevos conectores: el símbolo existencial $\exists$ («él existe») y el símbolo universal $\forall$ («cualquiera que sea»);
6) la noción de enunciado (V. ENUNCIADO);
7) la noción de fórmula (V. FÓRMULA);
8) los axiomas de la teoría: son los axiomas del cálculo proposicional y dos axiomas específicos:

$$[A_4](a/x)f^x \Rightarrow \exists x f^x$$
$$[A_5]\forall x f^x \Rightarrow (a/x)f^x$$

donde $f^x$ designa una fórmula cuantificable por $x$ y $a$ un individuo;
9) la noción de demostración formal (V. FORMAL).
V. LÓGICA.

## Pregeometría

V. MATROIDE.

## Prehilbertiano

• *Espacio prehilbertiano.* — Espacio vectorial sobre $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ provisto de una forma sesquilineal $\varphi$ hermitiana y positiva (producto escalar). Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ y si $\varphi$ es bilineal simétrica, el espacio prehilbertiano se dice real. Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ y si $\varphi$ es compleja, el espacio prehilbertiano se dice complejo.
V. EUCLÍDEO, HERMITIANO, SEPARADO.

## Premisa

Nombre dado a la proposición P en la implicación $P \Rightarrow Q$.

## Preorden

• *Preorden sobre un conjunto* E. — Relación binaria sobre E que es reflexiva y transitiva; por ejemplo, la divisibilidad en $\mathbf{Z}$.

## Preponderante

• *Función preponderante sobre otra.* — Una función $g$ se denomina preponderante sobre una función $f$ si $f$ es despreciable ante $g$.
V. DESPRECIABLE.

## Primario

• *Entero o número primario.* — Número entero potencia de un número primo, por ejemplo, $81 = 3^4$.

• *Factor primario de un entero n.* — Entero primario que es un divisor de *n*. Los factores primarios de 200 son 2, 4, 8, 5 y 25.

• *Factor primario de Weierstrass.* — V. WEIERSTRASS.

## Primer

• *Primer círculo de Lemoine.* — V. LEMOINE.

• *Primer cuartil.* — V. CUARTILES.

• *Cuerpo primo.* — Cuerpo que no contiene ningún otro subcuerpo más que él mismo. El cuerpo primo de característica nula es Q; el cuerpo $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ es el cuerpo primo de característica *p*, donde $p > 0$ es un entero primo.

• *Elemento primo de un anillo conmutativo unitario.* — Elemento *p* no inversible que engendra un ideal primo principal. En un anillo íntegro, todo elemento primo es irreductible, pero la recíproca no es exacta.
V. IRREDUCTIBLE.

• *Entero primo de Gauss.* — Elemento primo del anillo $\mathbf{Z}[i]$ de los enteros de Gauss. Un entero *n* de Z primo en $\mathbf{Z}[i]$ es primo en Z, pero la recíproca es falsa: 13 que es primo en Z no lo es en $\mathbf{Z}[i]$, puesto que $13 = (2 + 3i)(2 - 3i)$. Todo entero primo de Gauss es bien de la forma $\varepsilon p$ con $\varepsilon \in \{1, -1, i, -i\}$ y *p* entero primo de Z que no es suma de dos cuadrados, o bien de la forma $a + ib$ con $ab \neq 0$ y $a^2 + b^2$ primo en Z.
V. DOS CUADRADOS.

• *Ecuación del primer grado en un cuerpo* K. — Ecuación de la forma $ax + b = 0$ con $a \in \mathrm{K}^*$ y $b \in \mathrm{K}$. Admite por única solución $-a^{-1}b \in \mathrm{K}$.

• *Ecuación del primer grado en un grupo* $(\mathrm{G}, *)$. — Ecuación de la forma $a * x = b$, donde $a, b \in \mathrm{G}$. Tal ecuación admite una solución única $x = a' * b$, donde $a'$ es el simétrico de *a*.

• *Espectro primo de un anillo conmutativo unitario* A. — Conjunto simbolizado por Spec(A) de los ideales primos de ese anillo. Se le suele proveer de la topología de Zariski, para desarrollar cuestiones de geometría algebraica (V. ESQUEMAS); es entonces un espacio de Kolmogorov.

• *Ideal primo de un anillo conmutativo unitario* A. — Ideal I tal que A/I sea un anillo íntegro, es decir, tal que para todo par $(x, y)$ de elementos de A, si $xy \in \mathrm{I}$, entonces $x \in \mathrm{I}$ o $y \in \mathrm{I}$. Los ideales primos de Z son (0) y los ideales $p\mathbf{Z}$ engendrados por un número primo $p > 0$.

• *Número primo.* — Entero natural que tiene exactamente dos divisores. Es, por tanto, diferente de 1 y no es divisible más que por él mismo y por la unidad. Los números primos son los elementos primos estrictamente positivos del anillo Z. Fueron y son todavía objeto de numerosos problemas, por ejem-

plo: hallar un número primo mayor que un número primo dado; hallar una función que no da más que números primos; hallar una función que da todos los números primos; hallar el número primo que sigue a un número primo dado; hallar un número primo de rango dado, etc. La Criba de Eratóstenes permite hallar los números primos inferiores a un entero fijo $k$. Numerosas familias infinitas de números primos han sido estudiadas, pero no se conoce la fórmula que permita hallar el número primo inmediatamente superior a los números primos ya encontrados. La distribución de los números primos ha sido estudiada por Hadamard y de La Vallée-Poussin que han mostrado que si $\pi(x)$ designa el número de números primos inferiores o iguales a $x$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \operatorname{Log} x}{x} = 1.$$

James P. Jones dio en 1974 un polinomio en 26 indeterminadas, de coeficientes enteros cuyo conjunto de valores positivos es exactamente el conjunto de los números primos. Sin embargo, no se podría calificar esta expresión de «fórmula de los números primos» porque no los produce en orden y cada uno de ellos aparece una infinidad de veces. Aunque $\sum_p \frac{1}{p}$ sea divergente (suma ampliada a todos los $p$ primos) tenemos:

$$\sum_{p \leqslant 5 \cdot 10^7} \frac{1}{p} \leqslant 4.$$

El mayor primo conocido actualmente es: $2^{44.497} - 1$. Es el 26.° número de Mersenne. Se escribe con 13.395 decimales y fue descubierto, en 1979, con la ayuda de un ordenador por Harry Nelson y David Slowinski.

V. CULLEN, DIRICHLET, ERATÓSTENES, EULER, FERMAT, GEMELOS, GOLDBACH, GRANDES (Números), IRREGULAR, MERSENNE, REGULAR, WILSON.

## Primera

- *Primera forma cuadrática fundamental.* — V. FUNDAMENTALES.

- *Derivada primera.* — Sinónimo de derivada utilizada por oposición a derivada $n$-ésima en el caso en que $n \geqslant 2$.

- *Elemento simple de primera especie.* — V. SIMPLES.

- *Función o integral euleriana de primera especie.* — V. EULERIANA.

- *Integral primera de una ecuación diferencial* $F(x, y, y') = 0$. — Función U de dos variables tales que, para toda solución $y = f(x)$ de la ecuación diferencial, $U(x, f, (x))$ sea independiente de $x$.

- *Punto de discontinuidad de primera especie.* — V. DISCONTINUIDAD.

- *Punto de retroceso de primera especie.* — V. RETROCESO.

## Primitiva

• *Primitiva de una función numérica f definida sobre un intervalo* I *de* **R**. — Función numérica $g$ definida y derivable sobre I cuya derivada $g'$ es igual a $f$. Una primitiva de $x \mapsto x^2$ sobre **R** es $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Dos primitivas cualesquiera de una misma función $f$ difieren en una constante. Toda función $f$ definida y continua sobre I admite una primitiva F definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

donde $a$ es un número real fijo de I y donde $x \in I$.
Las primitivas permiten calcular numerosas integrales: si F es una primitiva de $f$ continua sobre I, tenemos para todos los números reales $a$ y $b$ tales que $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

V. INDEFINIDA (Integral), INTEGRAL (Cálculo).

• *Primitiva de una i-forma diferencial.* — Sean U un abierto de un espacio de Banach E y $\mathcal{L}(E, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales continuas de E en un espacio de Banach F. Una 1-forma diferencial $\omega$ de U en $\mathcal{L}(E, F)$ admite una primitiva en un abierto V incluido en U si existe una función $f$ de V en F que admite $\omega$ como diferencial.

• *Raíz primitiva de la unidad.* — Dado un entero natural $n$, el conjunto de las raíces $n$-ésimas complejas de 1 provisto de la multiplicación es un grupo cíclico de orden $n$. Una raíz $n$-ésima de 1 se llama primitiva si engendra ese grupo. Si $n$ es primo, toda raíz $n$-ésima diferente de 1 es primitiva. Por ejemplo, las raíces cúbicas primitivas de la unidad son $j$ y $j^2$.
V. CICLOTÓMICO.

## Primitivo

• *Polinomio primitivo.* — Sea A un anillo factorial; un polinomio de coeficientes en A se llama primitivo si sus coeficientes son primos entre sí en su conjunto. El polinomio $(X^2 + 1)Y^3 + (X + 1)Y + (X - 1) \in Z[X][Y]$ es primitivo.

## Primos

• *Elementos primos entre sí.* — Sinónimo de elementos extraños, que no debe confundirse con la noción de número primo. Por ejemplo, en **Z**, 8 y 15 son primos entre sí aunque ninguno de ellos sea un número primo.
V. BACHET, BEZOUT (Teorema), EXTRAÑOS, GAUSS (Lema de).

• *Tabla de números primos.* — Fue prolongada en 1979 hasta el cienmillonésimo número primo que es 2.038.074.743. La mayor desviación entre dos primos consecutivos es 292; no aparece más que una vez y está bordeado por 1.453.168.141 y 1.453.168.433, de rangos 72.507.380 y 72.507.381.

## Principal

• *Anillo principal.* — Anillo conmutativo unitario íntegro del que todo ideal es principal; ejemplos: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$ o el anillo $K[X]$ de los polinomios de coeficientes en un cuerpo K. Por el contrario, los anillos $K[X, Y]$ y $\mathbf{Z}[X]$ no son principales.

• *Argumento principal de un número complejo.* — V. ARGUMENTO.

• *Circunferencia principal de una cónica con centro de vértices A y A'.* — Podaria de la cónica en relación a un foco. Es la circunferencia de diámetro AA'.

• *Determinación principal o medida principal de un ángulo.* — V. MEDIDA (de un ángulo).

• *Diagonal principal de una matriz cuadrada* $M = (a_{ij})$ *de orden n.*— Es la $n$-upla $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, a_{nn})$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• *Determinante principal de una matriz* $M(n, p)$. — El determinante de una matriz cuadrada A extraída de la matriz M se denomina determinante principal de M si no es nulo y si los determinantes de las matrices cuadradas de orden superior a A extraídas de M son nulos.
V. RANGO.

• *Ideal principal de un anillo conmutativo* A. — Ideal I engendrado por un elemento $a \in A$, es decir, tal que todo elemento de I sea de la forma $ax$, donde $x \in A$. Se representa por $I = aA$.

• *Infinitamente pequeño principal en un entorno de* $x_0$. — Infinitamente pequeño $x \mapsto x - x_0$.

• *Infinitamente pequeño principal en un entorno del infinito.* — Infinitamente pequeño $x \mapsto \frac{1}{x}$.

• *Normal principal de un punto* M *de un arco geométrico* $\Gamma$ *de* $\mathbf{R}^3$ *sin puntos estacionarios.* — Normal en M que admite por vector director el vector $\frac{d\vec{t}}{ds}$, donde $s$ es la abscisa curvilínea y $\vec{t}$ el primer vector del triedro de Frenet.

• *Parte principal de una función real de una variable real f en un entorno de* $x_0 \in \mathbf{R}$. — Función $g$ de la forma $x \mapsto a(x - x_0)^k$ equivalente a $f$.

• *Valor principal de Cauchy.* — V. CAUCHY.

## Principales

• *Secciones principales en un punto* M *de una superficie* Σ. — Secciones de la superficie por planos normales en M, cuyos radios de curvatura son los radios de curvatura principales de Σ en M.

• *Radios de curvatura principales en un punto* M *de una superficie* Σ. — Los radios de curvatura de todas las secciones en M por un plano normal a Σ varían generalmente entre dos radios extremos $R_1$ y $R_2$ llamados radios de curvatura principales de la superficie en M (uno u otro pueden ser eventualmente infinitos). Por ejemplo, en un punto M de un cilindro de revolución cuyos círculos paralelos son de radio R, uno de los radios de curvatura principales es igual a R, el otro es infinito.

## Principio

V. ABSURDO, AGUJERO (de pichón), ALEMBERT (D'), CAJAS, CAJONES, DIRICHLET-SCHLÄFLI, DUALIDAD, ENCAJADOS (Segmentos), EXCLUIDO (Tercio), EXCLUSIÓN-INCLUSIÓN, PASTORES.

• *Principio de anamorfosis de Lalanne.* — V. ANAMORFOSIS.

• *Principio de Cantor.* — Principio de los segmentos encajados.

• *Principio del maximum.* — V. CAUCHI (Teoremas de).

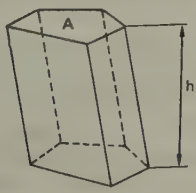
• *Principio de menor acción.* — V. HAMILTON (Acción de), MAUPERTUIS (Acción de).

• *Principio de la prolongación analítica.* — V. ANALÍTICA.

• *Principio del razonamiento por recurrencia.* — V. RECURRENCIA.

## Prisma

Se llama prisma a un poliedro limitado por una superficie prismática Σ y dos planos paralelos P y P' que encuentran todas las generatrices de Σ. Las dos caras sobre P y P' se denominan bases del prisma; su volumen es igual al producto A . *h*, donde A es el área de una base y *h* la distancia entre las dos bases.



• *Tronco de prisma.* — Poliedro limitado por una superficie prismática Σ y dos planos no paralelos que encuentran a las generatrices de Σ. Las caras sobre esos planos se denominan bases del tronco de prisma.

## Prismática

• *Superficie prismática.* — Cilindro del que una sección por un plano no paralelo a las generatrices es un polígono.

## Probabilidad

• *Probabilidad de un suceso.* — En su origen se definía la probabilidad de un suceso aleatorio como la relación del número de casos «favorables» al número de casos posibles y esta definición sigue siendo útil en numerosas situaciones simples. Por ejemplo, la probabilidad de sacar una de 6 caras de un dado arrojándolo una vez es de 1/6. Este cálculo —que hacía intervenir el análisis combinatorio— no resultaba ya practicable desde el momento en que los diferentes casos posibles no eran equiprobables o se presentaban en número infinito. La axiomatización del cálculo de probabilidades ha permitido llenar esas lagunas haciendo intervenir la noción de espacio probabilizable.

• *Probabilidad de un suceso* A *de un espacio probabilizado* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. — Es el número real P(A). La probabilidad de un suceso está comprendida entre 0 y 1.

• *Probabilidad o ley de probabilidad sobre un espacio probabilizable* $(\Omega, \mathscr{A})$. — Medida positiva P sobre $(\Omega, \mathscr{A})$ tal que $P(\Omega) = 1$. Una probabilidad sobre $(\Omega, \mathscr{A})$ puede ser definida por el sistema de axiomas de Kolmogorov.
V. CONDICIONAL, KOLMOGOROV, POINCARÉ.

• *Convergencia en probabilidad.* — Sinónimo de convergencia estocástica.
V. ESTOCÁSTICA.

• *Densidad de probabilidad.* — V. DENSIDAD.

• *Espacio o álgebra de probabilidad.* — Triplete $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, donde $(\Omega, \mathscr{A})$ es un espacio probabilizable y P una probabilidad sobre $(\Omega, \mathscr{A})$; por tanto, es un espacio de medida.
V. PROBABILIDADES.

• *Ley de probabilidad sobre un espacio probabilizable.* — Probabilidad sobre ese espacio.

• *Ley de probabilidad de una variable aleatoria* X. — V. LEY.

## Probabilidades

• *Axiomas de las probabilidades totales.* — V. KOLMOGOROV.

• *Cálculo en teoría de probabilidades.* — Rama de las matemáticas nacida del estudio de los juegos de azar a la que Fermat y Pascal han contribuido ampliamente erigiéndola en disciplina autónoma. Actualmente, esta teoría axiomatizada por Kolmogorov puede ser considerada como un dominio particular de la teoría de la medida. El diccionario de paso entre los dos lenguajes es el siguiente:

| *Teoría de probabilidades* | *Teoría de la medida* |
|---|---|
| Espacio probabilizable | Espacio medible |
| Espacio probabilizado | Espacio de medida |
| Algebra de sucesos | Tribu de partes |
| Sucesos | Parte medible |
| Variable aleatoria | Aplicación medible |
| Casi seguro | Casi por todas partes |
| Casi imposible | Despreciable |

• *Fórmula de probabilidades de las causas.* — Fórmula de Bayes.

• *Fórmula de las probabilidades compuestas.* — V. COMPUESTAS.

• *Teorema de las probabilidades totales.* — V. TOTALES.

## Probabilizable

• *Espacio probabilizable.* — Par $(\Omega, \mathscr{A})$, donde $\Omega$ es un conjunto y $\mathscr{A}$ una tribu de partes de $\Omega$ cuyos elementos se denominan los sucesos del espacio probabilizable; también se dice que $\mathscr{A}$ es un álgebra de sucesos sobre $\Omega$.

## Probabilizado

• *Espacio probabilizado.* — Sinónimo de espacio de probabilidad.

## Probable

- *Desviación probable de una variable aleatoria.* — Número $\varepsilon$ tal que:

$$P(|X - E[X]| \leqslant \varepsilon) = \frac{1}{2}.$$

- *Valor probable de una variable aleatoria* X. — Esperanza matemática de X.

## Problema

V. ALHAZÉN, BUFFON (Aguja de), CATALÁN, CAUCHY, DELÍACO, DELIO, DELOS, DIDO, DINI-NEUMANN, DIRICHLET, DUPLICACIÓN (del cubo), EULER, FAGNANO, FERMAT, GREENSPAN, LEIBNIZ, LLANO, MALFATTI, MENELIANAS, NAPOLEÓN, PAPPUS, PARTICIÓN, SIERPINSKI, SLUSE, STURM-LIOUVILLE, TERQUEM, TRISECCIÓN (del ángulo), UNIVERSAL.

- *Problema de la cubatura de la esfera.* — V. CUBATURA.
- *Problema de la coloración de los mapas.* — V. COLORACIÓN.
- *Problema de la duplicación del cubo.* — V. DUPLICACIÓN.
- *Problema de la medida universal.* — V. UNIVERSAL.
- *Problema de los n-cuerpos.* — V. CUERPOS.
- *Problema del paralelepípedo rectángulo pitagórico.* — V. PITAGÓRICO.
- *Problema del plegado de los sellos de correos.* — V. SELLOS DE CORREOS.
- *Problema de la cuadratura del círculo.* — V. CUADRATURA.
- *Problema de los cuatro colores.* — V. CUATRO.
- *Problema de la rectificación de la circunferencia.* — V. RECTIFICACIÓN.
- *Problema de los siete puentes de Kaliningrado o de Koenisberg.* — V. SIETE.
- *Problema de los treinta y seis oficiales de Euler.* — V. OFICIALES.
- *Problemas de los tres pozos y las tres casas.* — V. TRES.
- *Problema de la inversión de la esfera.* — V. INVERSIÓN.
- *Problema de la trisección del ángulo.* — V. TRISECCIÓN.

## Problemas

- *Clasificación de los problemas.* — A partir de los algoritmos algunos efectúan la clasificación siguiente (que puede afinarse) de los problemas matemáticos:

— problemas sin pruebas: para los cuales no existe algoritmo;
— problemas de la clase P: de los que se conoce un algoritmo de tipo polinomial;
— problemas de la clase P: de los que se conoce un algoritmo de tipo lineal;
— etcétera.

V. ALGORITMO, EFICACIA.

- *Problemas de recortes.* — V. RECORTES.
- *Problemas de Hilbert.* — V. HILBERT.
- *Problemas de Waring.* — V. WARING.

## Procesador

En teoría de la organización del trabajo, un modelo está formado de procesadores (obreros sobre una cadena, aparato físico, etc.) y de tareas a efectuar por los procesadores.

## Producciones

- *Producciones de una gramática formal.* — V. FORMAL.

## Producto

De forma general, cuando una ley de composición interna asociativa sobre un conjunto E se simboliza multiplicativamente, el compuesto *ab* de dos elementos *a* y *b* de E se llama producto de los factores *a* y *b*. Más generalmente, se define por recurrencia un producto de *n* términos de

$$E: a_1 a_2 \dots a_n = (a_1 a_2 \dots a_{n-1}) a_n.$$

V. CARTESIANO, CONVOLUCIÓN, ESCALAR, EXTERIOR, HERMITIANO, IDEALES, INFINITO, MIXTO, TOPOLÓGICO, VECTORIAL.

- *Producto directo de anillos, de grupos, de espacios vectoriales de módulos.* — V. DIRECTO.

- *Producto de una función f de* E *en* C *por un escalar* $\alpha \in C$. — Función simbolizada $\alpha f$ de E en C definida por:

$$(\alpha f)(x) = \alpha \, . \, f(x).$$

- *Producto de dos funciones f y g de* E *en* C. — Función representada por $f \, . \, g$ de E en C definida por:

$$(f \, . \, g)(x) = f(x) \, . \, g(x).$$

- *Producto de una matriz* A $(n, p)$ *de elementos en un cuerpo* K *por un escalar* $\alpha \in K$. — Matriz B$(n, p)$ cuyo elemento $b_{ij}$ es definido por $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.

- *Producto de dos matrices* A$(n, p)$ *y* B$(p, q)$ *de elementos en un cuerpo* K. — Matriz C$(n, q)$ cuyo elemento $c_{ij}$ es definido por:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Es importante observar que el producto no puede definirse más que si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda.

• *Producto de dos números.* — Resultado de la multiplicación de esos dos números.

• *Producto de un polinomio* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ *de* $A[X]$ *por un elemento* $a \in A$. — Polinomio representado por $aP$ y definido por:

$$aP = \sum_{i=0}^{n} aa_i X^i.$$

• *Producto de dos polinomios* $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ y $Q = \sum_{i=0}^{p} b_i X^i$: el polinomio:

$$R = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \quad \text{con} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

• *Producto de una serie (resp. de una sucesión) de término general* $u_n \in \mathbf{C}$ *por un complejo* $\alpha$. — Serie (resp. sucesión) de término general $\alpha u_n$.

• *Producto de dos series de términos generales* $u_n \in \mathbf{C}$ *y* $v_n \in \mathbf{C}$. — Serie de término general $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j$. Si las series de términos generales $U_n$, $V_n$ y $W_n$ convergen hacia U, V y W, entonces UV = W (teorema de Abel).

• *Producto de dos sucesiones de términos generales* $u_n \in \mathbf{C}$ *y* $v_n \in \mathbf{C}$. — Sucesión de término general $u_n . v_n$.

• *Producto de dos transformaciones.* — Empleado como sinónimo de composición de dos transformaciones. Por ejemplo, el producto de dos rotaciones $r$ y $r'$ designa la rotación $r \circ r'$ representada también por $rr'$.

• *Producto de un vector por un escalar.* — Sean E un K-espacio vectorial, $\alpha$ un elemento de K y $\vec{u}$ un vector de E. El vector $\alpha . \vec{u}$ llamado producto del vector $\vec{u}$ por el escalar $\alpha$.

• *Producto tensorial.* — V. TENSORIAL.

• *Topología producto.* — V. TOPOLÓGICA (Producto).

## Profinito

• *Espacio topológico profinito.* — Espacio compacto totalmente discontinuo.

• *Grupo profinito.* — Grupo topológico cuyo espacio topológico subyacente es profinito. Esta noción interviene en las prolongaciones recientes de la teoría de Galois.

## Programa

V. PROGRAMACIÓN.

• *Programa de Erlangen de F. Klein.* — V. ERLANGEN.

## Programación

Conjunto de métodos que permiten la elaboración de una sucesión finita de instrucciones (programa) relativas al tratamiento de informaciones por un ordenador. Se utilizan en programación diversos lenguajes apropiados a cada calculador.
V. ALGOL, FORTRAN, NPL, PL1.

## Progresión

Nombre dado a veces a ciertas sucesiones.
V. ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA.

- *Paso de progresión.* — Sinónimo, en informática, de incremento.

## Prolongación

Sean E y F dos conjuntos, A una parte de E y $f$ una aplicación de A en F. Se dice que una aplicación $g$ de E en F es una prolongación de $f$ (o prolonga $f$) si la restricción de $g$ a A es igual a $f$.
V. ANALÍTICA.

- *Prolongación por continuidad de una función.* — V. CONTINUIDAD.
- *Prolongación por continuidad de las igualdades o desigualdades.* — V. CONTINUIDAD.

## Prolongar

V. PROLONGACIÓN.

## Propiedad

Nombre dado a ciertos teoremas.
V. AFÍN, CARACTERÍSTICA, FUNCIONAL, GLOBAL, INTRÍNSECA, LOCAL, MÉTRICA, PROYECTIVA, UNIVERSAL, VECTORIAL.

## Propio

Término a veces ambiguo cuya significación varía con los autores; por ejemplo, en un grupo G, un subgrupo propio designa para unos un subgrupo distinto de G y para otros un subgrupo distinto de G y de $\{e\}$.

- *Angulo de rotación propia.* — V. EULER (Angulos de).
- *Cónica propia.* — V. ESPECIE.
- *Cuádrica propia.* — V. ESPECIE.

• *Sub-espacio vectorial propio.* — V. PROPIO (Vector).

• *Valor propio de una matriz cuadrada* $M \in M_n(K)$. — Escalar $\lambda$ tal que existe una matriz-columna X no nula que verifica $MX = \lambda X$.

• *Valor propio de un endomorfismo f de un* K*-espacio vectorial* E. — Escalar $\lambda$ tal que existe $x \neq 0$ de E que verifica $f(x) = \lambda x$, es decir, tal que el endomorfismo $f - \lambda I_E$ no sea inyectivo.

• *Vector propio asociado a un valor propio* $\lambda$ *de un endomorfismo f de un* K*-espacio vectorial* E. — Vector $x$ de E tal que $f(x) = \lambda x$. El conjunto de los vectores propios asociados a un mismo valor propio constituye un sub-espacio vectorial de E llamado sub-espacio propio asociado al valor $\lambda$.

## Proporción

Igualdad de dos razones $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. En una proporción se dice que el producto de los extremos es igual al de los medios: $ad = bc$. La proporción $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ implica las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\alpha a + \beta d}{\alpha c + \beta d}.$$

V. EXTREMOS, MEDIOS.

• *Divina proporción.* — Nombre que a veces se da al número de oro.

## Proporcional

• *Media proporcional de dos números.* — Media geométrica de esos dos números.

• *Cuarta proporcional.* — Se decía antiguamente cuando para tres números $a$, $b$, $c$ dados se buscaba un número $x$ que verifica una igualdad tal que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{c}.$$

## Proporcionales

• *Números proporcionales.* — $n$ números no nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se denominan proporcionales a $n$ números no nulos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ si:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

• *Números inversamente proporcionales.* — $n$ números no nulos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se denominan inversamente proporcionales a $n$ números no nulos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ si $a_1 b_1 = a_2 b_2 = \cdots = a_n b_n$.

## Proposición

En lógica, sinónimo de enunciado; en matemática, sinónimo de teorema.
V. INDECIDIBLE.

## Proposicional

• *Cálculo proposicional.* — Cálculo de las proposiciones. Rama de la lógica en la que:

1) Se dan:

* variables proposicionales: $x$, $y$, $z$, ...;
* dos conectores: $\neg$ leído «no», $\wedge$ leído «y»;
* dos paréntesis ) y (.

2) Se definen los enunciados (V. ENUNCIADO) o proposiciones y se escogen algunos de entre ellos como enunciados «verdaderos»; se los denomina axiomas del cálculo proposicional; si $x \Rightarrow y$ («$x$ implica $y$») es una abreviación de $\neg(x \wedge \neg y)$ los axiomas pueden escribirse:

$[A_1]$ $x \Rightarrow (x \wedge x)$
$[A_2]$ $(x \wedge y) \Rightarrow x$
$[A_3]$ $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\neg(y \wedge z) \Rightarrow \neg(z \wedge x))$.

3) Se dan, por último, las reglas (o criterios) de deducción. Aquí es única: es el *modus ponens:* si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$ son enunciados demostrables, entonces $\mathscr{B}$ es un enunciado demostrable.

Otros axiomáticas del cálculo proposicional son presentadas corrientemente; difieren de ésta por el número de conectores dados (uno solo podría bastar: V. PEIRCE y SHEFFER), la lista de axiomas y las reglas de deducciones que se escogen.
V. LÓGICA.

## Proposicional

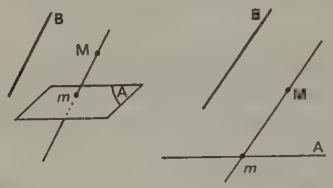
• *Variable proposicional.* — V. PROPOSICIONAL (Cálculo).

## Proyección

Antiguamente y todavía hoy, en la enseñanza secundaria, la palabra proyección se utiliza en lugar de proyector.
V. CENTRAL, CÓNICA, MERCATOR, PROYECTOR, ESTEREOGRAFÍA.

• *Proyección en un espacio afín* $\mathscr{E}$. — Sean A y B dos variedades lineales afines suplementarias de $\mathscr{E}$. Si $M \in \mathscr{E}$, el único punto de intersección $m$ de A con la variedad lineal que pasa por M y paralela a B se llama la proyección de M sobre A paralelamente a B. Si F es una figura de $\mathscr{E}$, el conjunto de las proyecciones de los puntos de F sobre A paralelamente a B se llama la proyección de F sobre A paralelamente a B. Por ejemplo, en $\mathbf{R}^3$, la proyección de un círculo sobre un plano es una elipse. Dos casos particulares usuales deben

señalarse: la proyección de un punto de $\mathbf{R}^3$ sobre un plano paralelamente a una recta y la proyección de un punto de un plano sobre una recta paralelamente a otra recta. La aplicación de $\mathscr{E}$ sobre A definida por $f: M \to m$ es afín y su aplicación lineal asociada es un proyector.
V. OBLICUA, ORTOGONAL, RELACIÓN.




• *Proyección de un vector x de un espacio vectorial.* — Imagen de $x$ por un proyector.

• *Proyección canónica.* — V. COORDENADA (Función).

• *Función proyección.* — Sinónimo de función coordenada.
V. COORDENADA.

## Proyectiva

• *Aplicación lineal proyectiva o aplicación proyectiva.* — Sea $f$ una aplicación lineal de un K-espacio vectorial E en un K-espacio vectorial F y sean P(E), P(F) y P(Ker $f$) los espacios proyectivos asociados a E, F y Ker $f$. Para todo punto $m \in P(E) - P(\text{Ker} f)$, la imagen por $f$ de la recta vectorial $m$ de E es una recta $m'$ de F, elemento de P(F). La aplicación F de $P(E) - P(\text{Ker } f)$ en P(F) que a $m$ asocia $m'$ se llama, por abuso de lenguaje, aplicación proyectiva de P(E) en P(F) y de centro P(Ker $f$). Si $f$ es inyectiva, entonces F está definida sobre P(E) y es inyectiva. Si $f$ es un isomorfismo de E, entonces F es una aplicación lineal proyectiva biyectiva de P(E) sobre P(E).
V. PROYECTIVO (Grupo).

• *Cónica proyectiva.* — Cónica del plano proyectivo $P_2(\mathbf{R})$.
V. CÓNICA.

• *Cuádrica proyectiva.* — Cuádrica del espacio proyectivo $P_3(\mathbf{R})$.
V. CUÁDRICA.

• *Geometría proyectiva.* — Geometría introducida por Desargues que consiste en estudiar el grupo proyectivo de un espacio proyectivo.

• *Propiedad proyectiva.* — Teorema de la geometría proyectiva.

• *Recta proyectiva.* — Espacio proyectivo de dimensión 1. Está asociada a un espacio vectorial de dimensión 2.

• *Variedad lineal proyectiva.* — Sinónimo de sub-espacio proyectivo.

• *Variedad lineal proyectiva.* — Sinónimo de sub-espacio proyectivo.

## Proyectivamente

V. INDEPENDIENTES, LIBRE, LIGADA, LIGADOS.

## Proyectivo

• *Completado proyectivo de un* K*-espacio vectorial* E. — Espacio proyectivo $\hat{E}$ asociado al K-espacio vectorial $E \times X$.

• *Completado proyectivo de un espacio afín* $\mathscr{E}$ *asociado a un espacio vectorial* E. — Completado proyectivo $\hat{\mathscr{E}}$ del espacio vectorial E.
V. ARGUESIANO.

• *Espacio proyectivo asociado a un* K*-espacio vectorial* E. — Conjunto P(E) de las rectas vectoriales de E privadas de $\vec{0}$; dicho en otros términos, es el conjunto cociente $E - \{\vec{0}\}/R$, donde R es la relación de equivalencia definida sobre $E - \{\vec{0}\}$ por $\vec{x} R \vec{y}$ si y solamente si existe $\lambda \in K^*$ tal que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$. Si $E = \{\vec{0}\}$, tenemos $P(E) = \phi$. Si $K = \mathbf{R}$, resp. C, el espacio proyectivo se denomina real, resp. complejo. Con frecuencia se escribe $P_n(K) = C(K^{n+1})$.
V. DIMENSIÓN.

• *Grupo proyectivo de un espacio proyectivo* P(E). — Grupo PGL(E) de las aplicaciones lineales proyectivas biyectivas de P(E) sobre P(E) respecto de la ley de composición de aplicaciones. Es isomorfo al grupo cociente $GL(E)/K^* I_E$.
V. SIMPLÉCTICO, UNIMODULAR.

• *Hiperplano proyectivo de un espacio proyectivo* P(E). — Subespacio proyectivo de P(E) asociado a un hiperplano de E.

• *Plano proyectivo.* — Espacio proyectivo de dimensión 2. Está asociado a un espacio vectorial de dimensión 3.

• *Sistema de referencia proyectivo de un espacio proyectivo* P(E) *de dimensión* $n$. — Sucesión de $(n + 2)$ puntos de P(E) tal que $(n + 1)$ puntos cualesquiera sean proyectivamente independientes.

• *Subespacio proyectivo de un espacio proyectivo* P(E). — Espacio proyectivo P(X) asociado a un subespacio vectorial X de E. La intersección de dos subespacios proyectivos P(X) y P(Y) es un subespacio proyectivo de P(E) asociado al subespacio vectorial $X \cap Y$ de E. Un subespacio proyectivo de $P_n(\mathbf{R})$ de dimensión $p \leqslant n$ es un conjunto cerrado en $P_n(\mathbf{R})$ y homeomorfo en $P_p(\mathbf{R})$.
V. ENGENDRADO, SUPLEMENTARIOS.

## Proyector

Endomorfismo idempotente de un espacio vectorial. Durante mucho tiempo los proyectores se han llamado proyecciones; así se empleaba el mismo término para designar la función y la imagen de un vector por la función. Sea E un espacio vectorial, suma directa de dos subespacios G y H; todo $x \in E$ se escribe de forma única $x = y + z$ con $y \in G$ y $z \in H$. La aplicación $p : x \mapsto y$ es un proyector de E llamado proyector sobre G paralelamente a H. La imagen

$y$ de $x$ por $p$ se denomina la proyección de $x$ sobre G paralelamente a H. V. ORTOGONAL.

• *Proyector canónico relativo a un producto cartesiano.* — V. COORDENADA (Función).

## Prueba

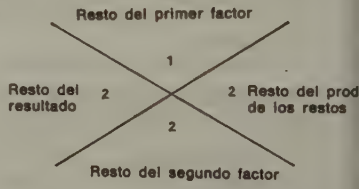
Sinónimo de demostración.

• *Prueba de una operación.* — Procedimiento práctico que permite controlar rápidamente la exactitud de esta operación. Las pruebas más conocidas utilizan ciertos teoremas sobre las congruencias. En general, cuando una prueba fracasa, se puede afirmar que el resultado es falso, pero cuando triunfa no siempre se puede deducir de ello la exactitud de la operación. La más conocida es la prueba llamada prueba por nueve que se apoya en las propiedades de la congruencia módulo 9:

1) un entero es congruente con la suma de sus cifras;
2) la suma de dos enteros y la suma de sus restos son congruentes;
3) el producto de dos enteros y el producto de sus restos son congruentes.

RESTOS MODULO 9

$217 \rightarrow 2+1+7 \rightarrow 10 \longrightarrow 1$
$38 \rightarrow 3+8 \quad 11 \longrightarrow 2$
$1\,736$
$651$
$8\,246 \rightarrow 8+2+4+6 \quad 20 \longrightarrow 2$




## Prueba

Conjunto de condiciones que conducen a la realización (o no) de un suceso. Ciertos autores llaman prueba, en un espacio probabilizado $(\Omega, \mathscr{A})$, a un elemento de $\Omega$.

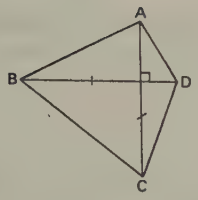
## Prym, Friedrich (1841-1915)

• *Funciones de Prym.* — Funciones definidas por:

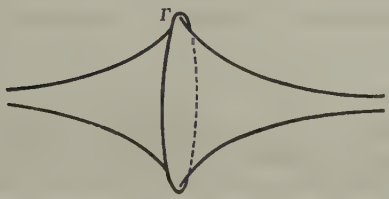
$$P(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt \text{ y } Q(x) = \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

## Pseudo

• *Pseudo-cuadrado.* — Cuadrilátero ortodiagonal de diagonales de igual longitud. El cuadrado es un pseudo-cuadrado.




• *Pseudo-esfera.* — Superficie engendrada por una tractriz al girar alrededor de su asíntota. Si Γ es el círculo paralelo descrito por el punto de retroceso de la tractriz, la pseudo-esfera tiene igual área que la esfera Σ, que admite Γ como círculo máximo y tiene un volumen igual a la mitad del de la esfera. Su nombre ha sido dado por analogía con el nombre de la esfera, en razón de los papeles comparables de la esfera y de la pseudo-esfera en la geometría de Riemann y la de Lobatchevski-Bolyai: es una superficie cuya curvatura total es constante y negativa. Constituye un modelo localmente perfecto del plano de Lobatchevski al considerar como rectas a sus geodésicas.




• *Números pseudo-aleatorios.* — V. ALEATORIOS (Números).

• *Número pseudo-primo.* — Número compuesto $n$, como 645 ó 161.038 tal que $2^n \equiv 2 \bmod n$. Existe una infinidad de números pseudo-primos y una infinidad de pseudo-primos pares.

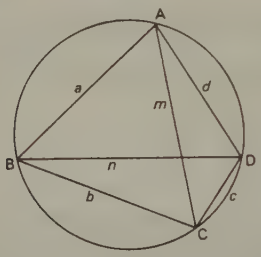
• *Número absolutamente pseudo-primo.* — Número de Carmichael.

## **Ptolomeo,** Claudius (90?-168?)

• *Teoremas o relaciones de Ptolomeo.* — En un cuadrilátero convexo inscriptible (A, B, C, D) tenemos, entre los lados y las diagonales, las relaciones siguientes, llamadas relaciones de Ptolomeo:

$$mn = ac + bd \quad \text{y} \quad \frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

siendo $m = AC$, $n = BC$, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ y $d = DA$.




## Puente de los asnos

El teorema de Pitágoras era considerado antiguamente como el «puente de los asnos» de la geometría.

## Puentes

• *Problema de los siete puentes de Konigsberg o Kaliningrado.* — V. SIETE.

## Puerto

• *Puerto de una superficie.* — Sea una superficie de ecuación cartesiana $z = f(x, y)$ tal que $f$ admite derivadas parciales segundas continuas en $(x_0, y_0)$. El punto M de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ es llamado un puerto de la superficie si se tiene en $(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0.$$

Un puerto es un punto hiperbólico de la superficie. Intuitivamente, puede referirse al sentido utilizado en geografía: es el punto más alto con relación a los valles y el punto más bajo con relación a los montes que lo rodean. V. FONDO, MONTAÑÉS, VÉRTICE.

## Puiseux, Victor (1820-1883)

• *Teorema de Puiseux.* — El cuerpo $\bigcap_{n \geq 1} \mathbf{C}((X^{1/n}))$ es un cierre algebraico del cuerpo $\mathbf{C}((X))$, cuerpo de las fracciones del anillo $\mathbf{C}[[X]]$ de las series formales de coeficientes complejos.

## Pulsación

• *Pulsación de una armónica.* — V. ARMÓNICA.

• *Pulsación de un movimiento rectilíneo sinusoidal de ecuación horaria* $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ *con* $a > 0$. — Nombre dado al número real $\omega$.

## Punto

Elemento de un espacio afín; también se emplea este término por extensión como sinónimo de «elemento de». Por ejemplo, se habla de puntos de un espacio topológico.
V. Acumulación, Adherente, Afijo, Aislado, Anguloso, Asintótico, Bowley, Brianchon (Teorema de), Catastrófico, Concurso, Contacto, Discontinuidad, Doble, Elíptico, Equilibrio, Estacionario, Exterior, Fermat, Fijo, Frontera, Gergonne, Grèbe, Hiperbólico, Imaginario, Infinito, Inflexión, Interior, Invariante, Lemoine, Méplat, Múltiple, Nagel, Ordinario, Parabólico, Polar, Retroceso, Regular, Silla, Simple, Singular, Steiner, Simediano, Torricelli.

• *Círculo punto (resp. esfera punto).* — Círculo (resp. esfera) de radio nulo. Tal círculo (resp. esfera) está reducido/a, por tanto, a un solo punto, su centro.

## Puntos

V. Brocard, Cíclicos, Cocíclicos, Conjugados, Euler, Feuerbach, Nube, Nueve, Separados.

• *Puntos de base, puntos límites, puntos de Poncelet de un haz de círculos.* — V. Haz.

• *Puntos que dividen un segmento en una razón dada.* — V. Razón.

## Puntual

• *Haz lineal puntual.* — V. Lineal.

• *Imagen puntual de un número complejo.* — V. Complejo (Plano).

## Pura

• *Geometría pura.* — Geometría que, por oposición a la geometría analítica, no hace intervenir ni sistema de referencia ni sistema de coordenadas. Sinónimo: Geometría sintética.

## Puro

• *Cuaternión puro.* — Cuaternión de la forma $bi + cj + dk$.

● *Número complejo imaginario puro.* — Número complejo no nulo cuya parte real es nula. Estos números como $i$ y $-i$ se escriben $ib$ con $b \in \mathbf{R}^*$. En el plano complejo se representan sobre el eje de ordenadas.

## Q

Cuerpo de los números racionales.

## Quad ◇

• Generalización del nabla en $\mathbf{R}^4$ utilizado en relatividad. Se considera el quad, representado por ◇, como un «vector» de componentes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$.

## Quasi

V. CASI.

• *Espacio topológico quasi compacto.* — Espacio topológico que verifica el axioma de Borel-Lebesgue.

• *Poliedro quasi regular.* — Poliedro del que el grupo de las isometrías que le dejan invariante, opera transitivamente sobre sus aristas.
V. SEMI-REGULAR.

## Quíntica

Curva algebraica plana de orden 5.

## Quintillón

V. DECIMAL (Sistema).

## Quinto

• *Quinto postulado de Euclides.* — V. EUCLIDES.

• *Ecuación general de quinto grado.* — Ecuación de la forma:

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0,$$

donde las $a_i$ son números complejos. No existe fórmula que dé, en forma de radicales, las raíces de esta ecuación.
V. GALOIS, *n*-ÉSIMO.

## Quintuplete

Sinónimo de 5-upla.
V. *n*-UPLA.

# R

**R**

Cuerpo de los números reales.

**$\overline{\mathbf{R}}$**

Recta numérica acabada.
V. ACABADA.

## Raabe, Josef Ludwig (1801-1859)

• *Criterio o regla de convergencia de Raabe-Darboux-Duhamel.* — Sea $\Sigma u_n$ una serie de términos reales positivos. El criterio de Raabe-Darboux-Duhamel afirma que si $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ admite un límite $\lambda \in \mathbf{R}$ cuando $n$ tiende a infinito, entonces:

1) si $\lambda > 1$, la serie $\Sigma u_n$ converge;
2) si $\lambda < 1$, la serie $\Sigma u_n$ diverge.

## Racional

Procede de «ratio», que significa: razón numérica.

• *Entero racional.* — Elemento del anillo **Z** de los enteros racionales antiguamente llamados enteros relativos. Ejemplos: 2; $-3$; 0; $-8$.
V. ENTERO, RACIONALES.

• *Fracción racional de n variables sobre un cuerpo conmutativo* K. — Elemento del cuerpo de las fracciones $K(X_1, X_2, ..., X_n)$ del anillo $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ de los polinomios de $n$ indeterminadas de coeficientes en un cuerpo conmutativo K. Una fracción racional puede escribirse P/Q, donde P y Q son polinomios de $K[X_1, X_2, ..., X_n]$ tales que $Q \neq 0$. Por ejemplo: $\frac{X^2 + Y^3}{XY - 2X}$ es una fracción racional de $\mathbf{R}(X, Y)$.
V. POLO.

• *Función racional.* — Sea P/Q una fracción racional de $K(X_1, X_2, ..., X_n)$; la función de $K^n$ en K, que a la $n$-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $K^n$ tal que $Q(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ asocia

$$\frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)}$$

se llama una función racional de $n$ variables.

• *Número racional.* — Elemento del cuerpo **Q** de los números racionales. Ejemplos: 1/3; 3; 8,731.
V. DIÁDICO, FRACCIÓN, RACIONALES, TRIÁDICO.

• *Punto racional de* $\mathbf{R}^2$. — Punto $(x, y)$ de $\mathbf{R}^2$ tal que $x \in \mathbf{Q}$ e $y \in \mathbf{Q}$.

• *Representación paramétrica racional de una curva de* $\mathbf{R}^2$ *o* $\mathbf{R}^3$. — Representación paramétrica:

$$f: t \to (u(t), v(t)) \quad \text{o} \quad f: t \to (u(t), v(t), w(t))$$

para la que $u$, $v$ y $w$ son funciones racionales.
V. UNICURSAL.

## Racionales

• *Anillo de los enteros racionales.* — Sea $(\mathbf{Z}, +)$ el grupo conmutativo obtenido por simetrización de la adición del monoide conmutativo $(\mathbf{N}, +)$. Existe sobre **Z** una multiplicación que prolonga la de **N** y confiere a **Z** una estructura de anillo conmutativo unitario íntegro. Es salvo un isomorfismo «el más pequeño» anillo que contiene **N** y cuyas leyes prolongan las de **N**.
Se define sobre **Z** un orden total que prolonga el orden sobre **N**; los elementos positivos de **Z** son entonces los elementos de **N**. Todo elemento negativo puede escribirse $-n$ con $n \in \mathbf{N}$. El anillo **Z** se llama anillo de los enteros racionales.
V. ENTERO.

• *Cuerpo de las fracciones racionales de una variedad algebraica irreductible* V. — Cuerpo $k(V)$ de las fracciones del álgebra afín $k[V]$ de la variedad V.
V. EQUIVALENTES (Birracionalmente).

• *Cuerpo de los números racionales.* — Cuerpo de las fracciones representado por **Q** del anillo íntegro **Z** de los enteros racionales. Es el cuerpo de las fracciones del anillo **Z** (V. FRACCIONES): salvo un isomorfismo el «más pequeño» cuerpo que contiene el anillo **Z** y cuyas leyes prolongan las de **Z**.

Se define sobre **Q** un orden total que prolonga el de **Z** y provee a **Q** de una estructura de cuerpo ordenado. Es un subcuerpo ordenado de **R**, denso en **R** y numerable. Un número real es un número racional si y solamente si existen dos enteros racionales $p$ y $q$ con $q \neq 0$ tales que $a = \frac{p}{q}$. Todo número decimal es racional.

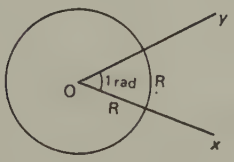
## Radiación

Se denomina radiación de vértice O al conjunto de rectas y de planos de $\mathbf{R}^3$ que pasan por O. La radiación de vértice O constituye un modelo de la geometría plana de Riemann al llamar «punto» a una recta de la radiación y

«recta» a un plano de la radiación. Con esta interpretación, un «triángulo» es un triedro de vértice O.

## Radián

Unidad de medida de ángulos y de arcos de círculo: un arco de círculo de 1 radián tiene una longitud igual al radio del círculo. El ángulo llano y una semicircunferencia miden $\pi$ radianes. Un radián vale $180/\pi$ grados o $200/\pi$ grados centesimales.
V. MEDIDA.




## Radical

Nombre dado al símbolo $\sqrt{\ }$

• *Radical de un número real positivo a.* — Raíz cuadrada positiva de *a* simbolizada por $\sqrt[2]{a}$ o $\sqrt{a}$; por ejemplo: $\sqrt{16} = 4$.

• *Radical n-ésimo de un número real positivo a.* — Raíz *n*-ésima positiva de *a* simbolizada por $\sqrt[n]{a}$; por ejemplo: $\sqrt[3]{8} = 2$.

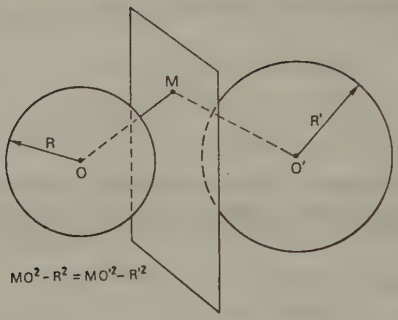
• *Centro radical de tres circunferencias de un mismo plano cuyos centros no están alineados.* — Unico punto del plano que tiene igual potencia con relación a las tres circunferencias.

• *Centro radical de cuatro esferas cuyos centros no son coplanarios.* — Unico punto del espacio que tiene igual potencia con relación a las cuatro esferas. Está sobre los cuatro ejes radicales de las esferas tomadas tres a tres.

• *Eje radical de dos circunferencias no concéntricas de un mismo plano.* — Conjunto de los puntos del plano que tienen igual potencia con relación a cada una de las circunferencias. Es una recta.

• *Eje radical de tres esferas cuyos centros no están alineados.* — Conjunto de los puntos que tienen igual potencia en relación a las tres esferas. Es una recta contenida en los tres planos radicales de las esferas tomadas dos a dos.

• *Plano radical de dos esferas no concéntricas.* — Conjunto de los puntos del espacio que tienen igual potencia con relación a cada una de las esferas. Es un plano.




## Radicando

Nombre dado a «$a$» en la expresión $\sqrt[n]{a}$.

## Radio

V. Bola, Cilindro, Círculo, Circunferencia, Convergencia, Curvatura, Disco, Esfera, Torsión.

• *Radio vector de un punto* M. — V. Polares (Coordenadas), Esféricas (Coordenadas).

## Radios

V. Corona, Principales (de curvatura).

## Rado, Tibor (1895-1965)

• *Teorema de Rado.* — Toda variedad topológica compacta conexa de dimensión 2 es triangulable.

## Radon, Johann Karl (1887-1956)

• *Medida de Radon sobre un espacio topológico localmente compacto* E. — Medida sobre el espacio de Riesz de las funciones numéricas continuas sobre E y de soporte compacto. Ejemplo: la medida de Dirac.

## Raíces

• *Cuerpos de las raíces de un polinomio.* — Cuerpo de dislocación de ese polinomio.

• *Cuerpo de las raíces de una ecuación polinomial* $f(x) = 0$. — Cuerpo de dislocación del polinomio $f$.

• *Funciones simétricas elementales de las raíces de una ecuación polinomial.* — V. ELEMENTALES.

## Raíz

• *Raíz de una ecuación.* — V. ECUACIÓN, SEPARACIÓN.

• *Raíz n-ésima* ($n \geqslant 2$) *de un elemento a de un anillo* A. — Elemento $r$ de A tal que $r^n = a$. Todo número complejo $z$ admite $n$ raíces $n$-ésimas complejas. Todo número real $x$ admite como máximo dos raíces $n$-ésimas reales. Una raíz 2-ésima se llama cuadrada; una raíz 3-ésima se llama cúbica.
V. CUADRADA, CÚBICA, EXTRACCIÓN, PRIMITIVA.

• *Raíz de un polinomio* $P \in K[X]$, *donde* K *es un cuerpo.* — Elemento $a \in K$ que anula la función polinomia asociada a P, es decir, tal que $P(a) = 0$. Esto equivale a decir que $X - a$ divide P en $K[X]$.
V. DOBLE, MÚLTIPLE, MULTIPLICIDAD, SIMPLE.

• *Raíz de un grafo.* — Vértice $a$ tal que para todo vértice $x$ existe un camino de $a$ a $x$.

## Rama

V. INFINITA, PARABÓLICA.

## Randomizar

Término de origen inglés. Introducir un elemento de azar en un cálculo o razonamiento. — V. ALEATORIZAR.

## Rango

• *Rango de una aplicación lineal f de un* K*-espacio vectorial* E *de dimensión finita en un* K*-espacio vectorial* F. — Dimensión de la imagen de $f$ que es un sub-espacio vectorial de F.

• *Rango de una aplicación semi-lineal de un* K*-espacio vectorial* E *de dimensión finita en un* K*-espacio vectorial* F. — Dimensión de la imagen de $f$ que es un sub-espacio vectorial de F.

• *Rango de una forma bilineal simétrica (resp. sesquilineal hermitiana)* $\varphi$ *sobre un* K*-espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Rango de la aplicación lineal (resp. semi-lineal) asociada a $\varphi$. Es también el rango de la matriz asociada a $\varphi$ en relación a una base de E.

• *Rango de una forma cuadrática q.* — Rango de la forma polar de $q$.

• *Rango de una matriz* M *de n líneas y p columnas de elementos en un cuerpo* K. — Rango de la parte del espacio vectorial $K^n$ constituida por los vectores-

columnas de M. Es también el rango de la parte de $K^p$ constituida por los vectores líneas de M.

• *Rango de un matroide.* — Todas las bases de un matroide tienen igual cardinal llamado rango del matroide.

• *Rango de una parte de un espacio vectorial de dimensión finita.* — Dimensión del subespacio vectorial engendrado por esta parte.

• *Rango de un sistema de n ecuaciones lineales con p incógnitas* $x_1, x_2, ..., x_p$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_p. \end{cases}$$

Rango de la matriz $(n, p)$ definida por $A = (a_{ij})$.

• *Rango de un término de una sucesión* $(u_n)_{n \geq 1}$. — Indice de ese término.

## Rara

• *Parte rara de un espacio topológico.* — Parte cuya adherencia no tiene punto interior.

## Razón

• *Razón de dos números a y b con* $b \neq 0$. — Sinónimo de cociente de *a* por *b*.

• *Razón de una proyección de un eje* $\Delta$ *sobre un eje* $\Delta'$. — Sean A y B dos puntos de $\Delta$ y A′ y B′ sus proyecciones sobre $\Delta'$. La relación $\overline{A'B'}/\overline{AB}$ es independiente de los puntos A y B escogidos sobre $\Delta$; se la denomina razón de la proyección de $\Delta$ sobre $\Delta'$.

• *Razón de una sucesión aritmética, de una sucesión o de una serie geométrica.* — V. Aritmética, Geométrica.

• *División de un segmento en extrema y media razón.* — V. Oro (Sección de).

• *Puntos que dividen un segmento* AB *en una razón dada* $k \neq 0$. — Puntos M de la recta AB tales que $\frac{MA}{MB} = k$.

Si $k = 1$, existe un solo punto M que es el medio de AB.
Si $k \neq 1$, existen dos puntos que dividen AB en la razón *k*.
V. Afinidad, Anarmónico, Homotecia, Inversión, Razón Doble, Semejanza.

## Razón doble

• *Razón doble de cuatro puntos de una recta* D. — Razón doble de sus abscisas con relación a un eje ligado a D. Es independiente del sistema de referen-

cia escogido sobre D e igual a la razón doble de las proyecciones de los cuatro puntos sobre otra recta.

• *Razón doble de cuatro rectas concurrentes del plano.* — Razón doble de sus cuatro puntos de intersección con otra recta Δ; si existe, es independiente de la recta Δ.

• *Razón doble (o cuaterna anarmónica) de cuatro números reales o complejos a, b, c, d distintos dos a dos.* — El número $\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}$ notado $[a, b, c, d]$.

## Razonamiento

V. ABSURDO, CONTRAPOSICIÓN, DIRECTO, DUALIDAD, INDUCCIÓN, RECURRENCIA.

## Real

• *Espacio vectorial real.* — Espacio vectorial sobre **R**.

• *Número real.* — Elemento del cuerpo **R** de los números reales.
V. REALES, SIGNO.

• *Recta real.* — Nombre dado al cuerpo **R** considerado como espacio vectorial de dimensión 1 sobre él mismo.
V. ACABADA.

• *Función real.* — Función de valores reales.

• *Matriz real.* — Matriz de elementos reales.

• *Medida real.* — Medida de valores reales.
V. POSITIVA.

• *Parte real de un número complejo z.* — Número real $a$ en la escritura de $z$ bajo la forma algebraica $z = a + ib$. La parte real de $z$ se simboliza $\mathrm{Re}(z)$.

## Reales

• *Cuerpo de los números reales.* — Desde la Antigüedad, se había descubierto la insuficiencia teórica de los números racionales; así, Aristóteles mostró que no existe número racional $x$ tal que $x^2 = 2$. Para Euclides y los matemáticos de su tiempo, el número era considerado como un segmento o una medida. Mucho más tarde, el estudio de la resolución de las ecuaciones (ligadas al progreso del simbolismo) desembocó en la consideración de los números algebraicos y de los números trascendentes (siglos XVII-XIX). Pero sólo a finales del siglo XIX, por las necesidades del análisis, el cuerpo **R** de los números reales fue construido rigurosamente a partir del cuerpo de los números racionales; mientras que la construcción de Dedekind se hace a partir de cortaduras en **Q**, la de Cantor utiliza las sucesiones de Cauchy de números racionales.
El conjunto **R** de los números reales puede ser provisto de una adición, de una multiplicación y de una relación de orden que le confieren una estructura de cuerpo conmutativo totalmente ordenado. En **R**, toda parte no vacía ma-

yorada (minorada) posee un extremo superior (resp. inferior), lo cual no se da en Q. El cuerpo R no es algebraicamente cerrado, pero todo número real estrictamente positivo posee, en R, dos raíces cuadradas opuestas.
Provisto de la distancia usual definida por $d(x, y) = |x - y|$, es un espacio métrico completo, completado topológico de Q, localmente compacto y no compacto (V. ACABADA), conexo y localmente conexo, en el que todo punto posee un sistema fundamental numerable de entornos. Verifica el axioma de subgrupo de S(E) llamado realización de G en S(E).

## Realización

• *Realización de un suceso.* — Dado un espacio probabilizable $(\Omega, \mathscr{A})$, se dice que una prueba $\omega \in \Omega$ realiza un suceso $A \in \mathscr{A}$ si $\omega \in A$.

• *Realización de un grupo* G *en el grupo* S(E) *de las permutaciones de un conjunto* E. — Sea $\varphi$ un homomorfismo inyectivo de G en S(E); entonces, $\varphi(G)$ es un sub-grupo de S(E) llamado realización de G en S(E).
V. REPRESENTACIÓN.

• (Lógica.) *Realización de un lenguaje.* — V. ESTRUCTURA.

## Recíproca

• *Biyección recíproca de una biyección* $f: E \to F$. — La única biyección $g: F \to E$ tal que $g \circ f = I_E$ y $f \circ f = I_F$. Se escribe $f^{-1} = g$.
La biyección recíproca de la homotecia vectorial de razón $\lambda \neq 0$ es la homotecia de razón $\lambda^{-1}$.

• *Demostración recíproca.* — Si los enunciados $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$ son demostrables, la demostración de $Q \Rightarrow P$ se llama recíproca de la demostración de $P \Rightarrow Q$.

• *Imagen recíproca de una parte* B *de un conjunto* F *por una relación* $\mathscr{R}$ *de* E *en* F. — Conjunto, simbolizado $\mathscr{R}^{-1}(B)$, de los elementos de E que tienen una imagen por $\mathscr{R}$ que pertenece a B.

• *Recíproca de la implicación* $P \Rightarrow Q$. — La implicación $Q \Rightarrow P$.

• *Relación recíproca de una relación* $\mathscr{R}$ *de un conjunto* E *hacia un conjunto* F. — Relación, simbolizada por $\mathscr{R}^{-1}$ de F hacia E definida por $x\mathscr{R}^{-1}y$ si y solamente si $y\mathscr{R}x$. Las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$ sobre R son recíprocas una de otra.

## Reciprocadores

Nombre dado antiguamente a los inversores.

## Recíprocas

• *Transformaciones por polares recíprocas.* — V. POLARES.

## Reciprocidad

- *Reciprocidad polar.* — V. POLAR.
- *Ley de reciprocidad cuadrática.* — V. LEGENDRE.

## Recta

Fuera de todo contexto, la palabra recta no tiene sentido matemático preciso. En la época de Euclides se estudiaban «las rectas del plano (¡euclídeo!)» sin definir ni la palabra «recta» ni la palabra «plano», pero estableciendo sus relaciones (axiomas y postulados) que debían existir entre los objetos «recta» y «plano» (V. EUCLIDES, INCIDENCIA) y considerando intuitivamente que una recta es una geodésica y tiene una curvatura constante nula. Esto todavía se utiliza en nuestros días (programas de geometría del primer ciclo). Un modo más general y más fecundo consiste en definir los espacios afines y llamar recta de un espacio afín a todo sub-espacio afín de dimensión 1.
V. ACABADA, AFÍN, APUNTADA, ASÍNTOTA, DIRECCIÓN, DIRECTORES (Parámetros), EULER, FILÓN, FIN (de), FRONTAL, GAUSS, GRADUADA, HORIZONTAL, INFINITO (del), ISÓTROPO, LEMOINE, NEWTON, NUMÉRICO, OBLICUA, PENDIENTE, PERFIL (de), PLÜCKERIANAS (Coordenadas), POLAR, POLO, REAL, SEGMENTO, SIMETRÍA, TRAZA, VECTORIAL, VERTICAL, WALLACE.

- *Recta de un espacio afín $\mathscr{E}$ definida por un punto* A *y un vector* $\vec{u}$ *no nulo del espacio vectorial asociado a* $\mathscr{E}$. — El conjunto de los puntos M de $\mathscr{E}$ tales que $\overrightarrow{AM}$ y $\vec{u}$ sean colineales es un sub-espacio afín de dimensión 1 llamado recta que pasa por A y de vector director $\vec{u}$. Dados dos puntos distintos A y B de $\mathscr{E}$, la única recta que pasa por A y B (recta que pasa por A y vector director $\overrightarrow{AB}$) se denota (AB).
V. TANGENTE.

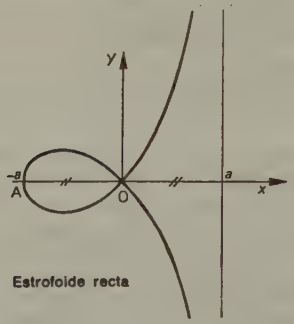
- *Recta ortogonal a un plano.* — Sinónimo de recta perpendicular a ese plano.
- *Recta paralela a un plano.* — V. PARALELA.
- *Recta perpendicular a un plano.* — V. PERPENDICULAR.
- *Recta proyectiva.* — V. PROYECTIVA.
- *Recta de regresión.* — V. REGRESIÓN.

- *Cisoïde recta.* — Nombre dado a la cisoide de Diocles para expresar que tiene un eje de simetría. Es una cisoide oblicua particular.

- *Estrofoide recta.* — Inversa de una hipérbola en una inversión cuyo centro A es un vértice de la hipérbola. Es una cúbica circular que admite un punto doble O y que tiene por ecuación cartesiana $x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$ con relación a un sistema de referencia cartesiano de origen O. Su ecuación polar, siendo O el polo, es:

$$\rho = -a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

Admite ecuaciones paramétricas $x = a\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ e $y = at\dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.



Estrofoide recta

• *Noción o propiedad definida en recta.* — V. ARTINIANO, DERIVADA, DISTRIBUTIVA (ley), DIVISOR, FILTRANTE, IDEAL, LÍMITE, MÚLTIPLE, NEUTRO, NOETHERIANO, SEMI-CONTINUA (Aplicación), SIMÉTRICA, SIMPLIFICABLE, TRANSLACIÓN.

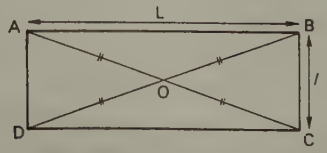
• *Sección recta de un cilindro.* — Sección del cilindro por un plano perpendicular a las generatrices.

## Recta de punta

• (Descriptiva.) *Recta o plano de punta.* — Recta o plano perpendicular [de canto] al plano frontal de referencia.

## Rectángulo

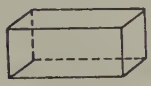
Cuadrángulo convexo del que los cuatro ángulos interiores son iguales (por tanto, iguales cada uno a un ángulo recto); es un paralelogramo cuyos dos lados consecutivos son perpendiculares. Sus lados opuestos son iguales. Sus diagonales se cortan en su medio y tienen igual longitud. Si las longitudes de sus lados son L y $l$, su perímetro es $2(L + l)$ y su área $Ll$.




Varias figuras como el cilindro, el toro, la cinta de Möbius, la botella de Klein, etc., están construidas partiendo de un rectángulo.
V. ANCHURA, CONMUTATIVO, ORO.

• *Grupo del rectángulo.* — Grupo de las isometrías del plano que dejan globalmente invariante un rectángulo no cuadrado. Es un grupo de Klein.

• *Paralelepípedo rectángulo.* — Paralelepípedo cuyas dos caras no paralelas cualesquiera son perpendiculares. Son necesariamente rectángulos. El cubo es un paralelepípedo rectángulo.
V. PITAGÓRICO.



• *Trapecio rectángulo.* — Trapecio en que dos ángulos son rectos.

• *Triángulo* ABC *rectángulo en* A. — Triángulo cuyos lados AB y AC son perpendiculares. Los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo cualquiera de ese triángulo ($\widehat{ABC}$, por ejemplo) son dados por las fórmulas:

$$\operatorname{sen} \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \quad \begin{matrix}\text{(lado opuesto)}\\ \text{(hipotenusa)}\end{matrix}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} \quad \begin{matrix}\text{(lado adyacente)}\\ \text{(hipotenusa)}\end{matrix}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \quad \begin{matrix}\text{(lado opuesto)}\\ \text{(lado adyacente).}\end{matrix}$$

V. CATETOS, HIPOTENUSA, PITÁGORAS.

## Rectas

V. ANTIPARALELAS, CONCURRENTES, CONGRUENCIA, CONJUGADAS, IZQUIERDAS, ISOGONALES, ORTOGONALES, PARALELAS, PERPENDICULARES, SECANTES.

• *Angulo de una pareja de rectas vectoriales o afines.* — V. ANGULO.

• *Haz de rectas.* — V. HAZ.

## Rectificable

• *Arco de curva rectificable.* — Longitud de un arco parametrado.

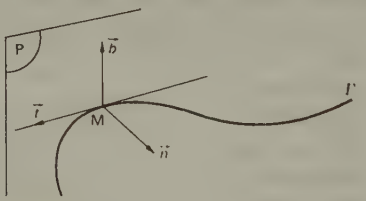
## Rectificación

• *Rectificación de un arco de curva.* — Cálculo de su longitud.
V. LONGITUD.

• *Problema de la rectificación de la circunferencia.* — ¿Es posible, mediante una construcción con la regla y el compás, hallar un segmento cuya longitud sea la de la circunferencia de un círculo dado? Arquímedes demostró la equivalencia de ese problema con el de la cuadratura del círculo, los dos salidos de la alta Antigüedad. No fueron resueltos por la negativa hasta 1882 como consecuencia de la trascendencia de $\pi$ probada por Lindemann. Entre tanto, el cálculo de los perímetros de polígonos inscritos y de polígonos circunscritos a una circunferencia dada con vistas a aproximar la longitud de la circunferencia permite obtener encuadramientos notablemente precisos de $\pi$.
V. CONSTRUCTIBLE, CONSTRUCCIÓN, CUADRATURA, DUPLICACIÓN, TRISECCIÓN, WANTZEL.

## Rectificante

• *Plano rectificante en un punto* M *de una curva izquierda que admiten en* M *un triedro de Frenet* $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$. — Plano determinado por la tangente y la binormal en M.



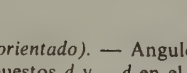

## Rectilíneo

• *Angulo o rectilíneo de un diedro.* — V. DIEDRO.

• *Movimiento rectilíneo de un móvil puntual* M. — Movimiento cuya trayectoria es una recta o una parte de recta.
V. ACELERADA, RETARDADA, SINUSOIDAL, VARIADA.

## Recto

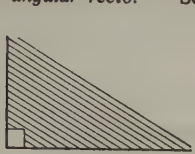
• *Angulo recto (orientado).* — Angulo cuyo ángulo doble es llano. Hay dos ángulos rectos opuestos $d$ y $-d$ en el grupo $\mathcal{U}$ de ángulos del plano euclídeo. Un ángulo es recto si y solamente si su coseno es nulo; el ángulo de una pareja de dos semirrectas perpendiculares es recto. Cuando E está orientado, el ángulo recto cuyo seno es $+1$ (resp. $-1$) se llama positivo (resp. negativo), tiene por medida $\pi/2\,rd$ (resp. $-\pi/2\,rd$) o 90° (resp. −90°) o 100 gr (resp. −100 gr).




V. GEOMETRÍA (de la).

• *Conoide recto.* — Conoide para el que la recta fija y el plano fijo que permiten definirlo son perpendiculares.

• *Sector angular recto.* — Sector angular cuyos lados son perpendiculares.



## Recubrimiento

• *Recubrimiento de un conjunto* E. — Familia $(F_i)_{i\in I}$ de conjuntos tal que E está contenido en $\bigcup_{i\in I} F_i$. Las particiones son recubrimientos particulares. Si la familia $(F_i)_{i\in I}$ es finita, el recubrimiento se llama finito; si E es un espacio topológico y si los conjuntos $F_i$ son abiertos (resp. cerrados) de E, el recubrimiento se denomina abierto (resp. cerrado).
V. FINITO (Localmente).

## Recurrencia

• *Principio del razonamiento por recurrencia o por inducción.* — Sea $E(n)$ un enunciado que depende de un entero natural $n$. Si el enunciado $E(0)$ es verdadero y si, cualquiera que sea $n \geqslant 0$, la implicación $E(n) \Rightarrow E(n+1)$ es verdadera, entonces, según el axioma de inducción (V. PEANO), el enunciado $E(n)$ es verdadero para todo entero $n$. Se deduce de este principio diversas variantes, como ésta: si $E(0)$ es verdadera y si, cualquiera que sea $n \geqslant 0$, la implicación $[E(0)$ y $E(1)$ y ... y $E(n)] \Rightarrow E(n+1)$ es verdadera, entonces el enunciado $E(n)$ es verdadero para todo entero $n$. El razonamiento por recurrencia permite establecer numerosas fórmulas; por ejemplo, la que afirma que $n!$ es el número de permutaciones sobre un conjunto $n$ de elementos.

• *Recurrencia transfinita.* — V. INDUCCIÓN.

## Recursividad

Estudio de las funciones de N en N (o más generalmente de $\mathbf{N}^p$ en $\mathbf{N}^q$) que son efectivamente calculables gracias a un algoritmo, como la función factorial o la función que a todo $n \in \mathbf{N}$ asocia el $(n+1)$-ésimo número primo. V. TURING.

## Red

• *Red de Boole.* — Retículo de Boole.

• *Red de círculos.* — Familia de círculos del plano que admiten tres a tres el mismo centro radical.

• *Red ordenada.* — Sinónimo de retículo.

• *Red de* $\mathbf{R}^n$. — Sub-grupo discreto de $\mathbf{R}^n$ que, considerado como Z-módulo, es engendrado por una base del espacio vectorial $\mathbf{R}^n$. Así, $\mathbf{Z}^n$ es una red de $\mathbf{R}^n$.

## Redondeo

• *Aproximación de un real obtenido por redondeo.* — V. APROXIMACIÓN.

## Redondos

• *Cuerpos redondos.* — En la geometría elemental tradicional, se llama así al cilindro y al cono de revolución así como a la esfera.

## Reducción

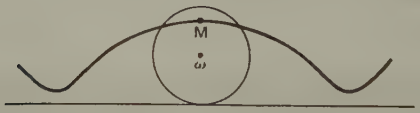
• *Elementos de reducción de un torsor en un punto* O. — Par $(\vec{R}, \overrightarrow{OK})$, donde $\vec{R}$ es la resultante y $\overrightarrow{OK}$ el momento resultante en O del torsor. Si los elementos de reducción en O son conocidos, los elementos de reducción $(\vec{R}', \overrightarrow{O'K'})$ en O′ están dados por las fórmulas:

$$\vec{R}' = \vec{R} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{O'K'} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}.$$

## Reducida

• *Algebra reducida.* — Algebra sin elemento nilpotente.

• *Cicloide reducida.* — Curva plana engendrada por un punto M ligado al plano móvil de un círculo de centro $\omega$ y de radio $r > \omega M$ que rueda sin deslizarse sobre una recta. El pedal de una bicicleta describe una curva de este tipo.




• *Epicicloide reducida.* — V. EPITROCOIDE.

• *Hipocicloide reducida.* — V. HIPOTROCOIDE.

• *Forma reducida de Jordan.* — V. JORDAN.

• *Fórmula reducida de una ecuación de tercer grado* $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. — Ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$ obtenida al plantear $z = x - \frac{1}{3}a$. V. TERCERO.

• *Variable aleatoria centrada reducida.* — V. CENTRADA.

## Reducidas

• *Reducidas asociadas a un número irracional α positivo.* — Sea $(u_0, u_1, u_n, \ldots)$ el desarrollo en fracción continua de α; se llama reducida de orden $n$ al número racional $r_n$, simbolizado por $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ igual a:

$$u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cdots}} \\ \vdots \\ + \cfrac{1}{u_{n-1} + \cfrac{1}{u_n}}.$$

La sucesión $(r_n)_{n \geq 0}$ de las reducidas de α converge hacia α y permite tener excelentes valores aproximados de α. Las primeras reducidas asociadas a π son:

$$r_0 = \frac{3}{1}; \quad r_1 = \frac{22}{7}; \quad r_2 = \frac{333}{106}; \quad r_3 = \frac{355}{113}; \quad r_4 = \frac{103.993}{33.102};$$

$$r_5 = \frac{104.348}{33.215}; \quad r_6 = \frac{208.341}{66.317}; \quad r_7 = \frac{312.689}{99.532}.$$

Utilizadas en tecnología, las reducidas permiten determinar los números de dientes de dos engranajes conjuntos, de forma que la razón de las velocidades de rotación sea un número racional suficientemente próximo de la razón de velocidades teórica.

## Reducido

• *Anillo reducido.* — Anillo sin elemento nilpotente.

## Referencia

• (Descriptiva.) *Línea de referencia.* — Recta que une las proyecciones horizontales y de un punto.

• *Ejes de referencia.* — Ejes de un sistema de referencia.

• *Planos horizontal y frontal de referencia.* — V. DESCRIPTIVA (Geometría).

## Referencial

Sinónimo de sistema de referencia, utilizado sobre todo en mecánica. Cuando un estudio hace intervenir las partes de un mismo conjunto, este conjunto es calificado de referencial. Por ejemplo, en un estudio $\mathfrak{P}_1(E)$ o de un espacio probabilizable $(\Omega, \mathscr{A})$, los conjuntos E y Ω se llaman referenciales.

## Reflexión

• *Reflexión vectorial.* — Sinónimo de simetría vectorial ortogonal por relación a un plano vectorial.

## Reflexiva

• *Relación reflexiva.* — Relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto E tal que todo elemento $x$ de E esté relacionado con sí mismo. La inclusión en $\mathfrak{P}(E)$, las relaciones $\leqslant$ y $\geqslant$ en **R** son reflexivas. Las relaciones $>$ y $<$ en **R** no lo son.

## Reflexividad

• *Reflexividad de una relación binaria.* — Propiedad de la relación de ser reflexiva.

## Reflexivo

• *1-grafo reflexivo.* — 1-grafo (S, U) que posee un bucle en cada vértice; en otros términos, para todo $x \in S$ el par $(x, x)$ pertenece a U.

• *Nudo reflexivo.* — Nudo isótopo a su simétrico en relación a un plano. El nudo en ocho es reflexivo; el nudo de trébol no lo es (Dehn, 1914).

## Regla

V. Alembert (D'), Cauchy, Cramer, Criterio, Deducción, Leibniz, L'Hospital, Raabe-Darboux-Duhamel, Riemann, Sarrus, Signos, Tres.

• *Regla de cálculo.* — V. Cálculo.

• *Construcción con la regla y el compás.* — V. Construcción.

## Reglada

• *Función reglada sobre un intervalo* $[\![a, b]\!]$ de **R**. — Función numérica definida sobre $[\![a, b]\!]$ que es límite uniforme de una sucesión de funciones en escalera sobre $[\![a, b]\!]$.

• *Superficie reglada.* — Superficie engendrada por una familia de rectas que dependen de un parámetro. Ejemplos: los conos, los cilindros, el paraboloide hiperbólico o el hiperboloide de una hoja.
V. Desarrollable, Generatriz.

## Regletas

• *Regletas de Néper.* — V. NÉPER.

## Regresión

• *Rectas de regresión.* — Sea (X, Y) un par de caracteres cuantitativos sobre una misma población y sean $(x_i, y_i)$ para $i = 1, 2, ..., n$ los pares de valores obtenidos por esos caracteres para una muestra de $n$ individuos. Los ajustes lineales de $n$ puntos de coordenadas $(x_i, y_i)$ por el método de los mínimos cuadrados conducen a dos rectas llamadas rectas de regresión: la recta de regresión $D_1$ de Y en X es la recta tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$$

sea minimum (siendo $Y_i$ la ordenada del punto de la recta de abscisa $x_i$); la recta de regresión $D_2$ de X en Y es la recta tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - x_i)^2$$

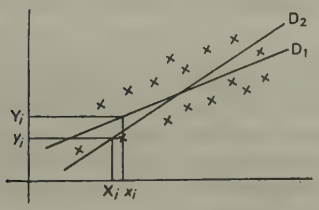
sea minimum (siendo $X_i$ la abscisa del punto de la recta de ordenada $y_i$). La ecuación de $D_1$ es:

$$y - \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2} (x - \overline{X})$$

la de $D_2$ es:

$$x - \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{Y})^2} (y - \overline{Y})$$

siendo X e $\overline{Y}$ las medias aritméticas de los valores tomados respectivamente por X e Y. En ciertos casos se utiliza la recta de regresión ortogonal $D_0$, que es la recta tal que la suma de los cuadrados de las distancias de los puntos a la recta sea minimum.



## Regular

• *Cardinal regular.* — Todo cardinal $\aleph_\alpha$ tal que $\aleph_\alpha$ no pueda escribirse $\aleph_\alpha = \sum_{\beta \in W} \aleph_\beta$ con $\beta < \alpha$ y Card $W < \aleph_\alpha$.

Todo cardinal de la forma $\aleph_{\alpha+1}$ es regular. Si la teoría de los conjuntos es no contradictoria, se le puede añadir el axioma $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}$ para todo cardinal regular $\aleph_\alpha$; es el teorema de Easton.

• *Definición regular de la suma de una serie divergente.* — Definición que aplicada a las series numéricas convergentes vuelve a dar la noción de suma habitual.
V. BOREL (Sumas de).

• *Elemento regular.* — Sinónimo de elemento simplificable.

• *Espacio regular.* — Espacio de Hausdorff E que verifica el axioma $[T_3]$ de separación: para todo cerrado de F de E y todo $x \notin F$, existe un entorno de $x$ y un entorno de F sin punto común.
V. SEPARACIÓN.

• *Punto regular de una curva.* — Punto ordinario de esa curva.

• *Gramática formal regular.* — Gramática de Kleene.

• *Matriz regular.* — Sinónimo de matriz inversible.

• *Número primo regular.* — Entero primo $p$ que no divide el número de clases del cuerpo ciclotómico $\mathbf{Q}(\zeta_p)$. Todos los enteros primos $p < 37$ son regulares (V. IRREGULAR). Estos números introducidos por Kummer intervienen en el estudio de la conjetura de Fermat (V. KUMMER). Un criterio de Kummer permite caracterizarlos simplemente. Se ignora en la actualidad si existe una infinidad de enteros primos regulares; en los límites de las tablas, la cantidad de los números primos regulares es superior a la cantidad de los números primos irregulares.
V. JENSEN, METSÄNKYLÄ.

• *Parte regular de un desarrollo limitado* $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \varepsilon(x) x^n$ *de f en el entorno de* 0. — El polinomio $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.

• *Poliedro regular.* — Poliedro inscriptible en una esfera y cuyas caras son polígonos regulares convexos isométricos. No existen más que cinco: el tetraedro, el cubo (o hexaedro), el octaedro, el dodecaedro, y el icosaedro. Todos son convexos. La tabla siguiente indica el número A de aristas, F de caras, S de vértices, las relaciones entre los radios $r$ y R de las esferas inscritas y circunscritas y la longitud $a$ de una arista.

| | *Tetraedro* | *Cubo* | *Octaedro* | *Dodecaedro* | *Icosaedro* |
|---|---|---|---|---|---|
| S | 4 | 8 | 6 | 20 | 12 |
| A | 6 | 12 | 12 | 30 | 30 |
| F | 4 | 6 | 8 | 12 | 20 |
| $a$ | $2R\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$ | $R\sqrt{2}$ | $R\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}$ | $2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ |
| $r$ | $\frac{R}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}R$ | | $R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{15}}$ | |

V. Area, Cuasi regulares (Poliedros), Platónicos, Volumen.

• *Polígono regular.* — Polígono inscriptible cuyos lados tienen igual longitud; por ejemplo, el cuadrado o el pentágono regular. Cualquiera que sea el entero $n \geqslant 3$ existen polígonos regulares de $n$ lados. Un teorema de Gauss caracteriza los polígonos regulares constructibles con la regla y el compás.
V. Apotema, Area, Cuadrado, Decágono, Dodecágono, Equilátero (Triángulo), Gauss (Teoremas de), Hexágono, Octógono, Pentágono, Perímetro.

• *Politopo regular de* $\mathbf{R}^n$. — Los politopos regulares de $\mathbf{R}^2$ son los polígonos regulares; los de $\mathbf{R}^3$ son los poliedros regulares. Para $n \geqslant 4$ se denomina politopo regular de $\mathbf{R}^n$ un politopo inscriptible en una hiperesfera de $\mathbf{R}^n$ cuyas caras son politopos regulares de $\mathbf{R}^{n-1}$ isométricos. Hay una infinidad de politopos regulares en $\mathbf{R}^2$, hay cinco en $\mathbf{R}^3$, seis en $\mathbf{R}^4$ y tres en $\mathbf{R}^n$ para todo entero $n \geqslant 5$.

• *Potencia regular.* — Entero de la forma $a^b$, donde $a$ y $b$ son dos enteros estrictamente superiores a 1. Todo entero inferior a 10 y diferente de 6 es la diferencia de dos potencias regulares. No se sabe si 6 es la diferencia de dos potencias regulares.

## Regularidad

Propiedad de ser regular.

## Relación

Utilizado a veces por igualdad.
V. Bezout, Chasles, Descartes, Euler, Grassmann, Leibniz, Mac Laurin, Montañés, Newton, Ptolomeo, Simsom, Stewart.

Los matemáticos estudian relaciones entre objetos (paralelismo, pertenencia, orden, equivalencias, funciones, etc.). La noción de relación es, por tanto, una noción base de las matemáticas.
V. Pertenencia, Colectivizante, Igualdad.

• *Relación de un conjunto* E *hacia un conjunto* F *(o correspondencia).* — Triplete de conjuntos $\mathscr{R} = (E, F, G)$, donde G es una parte del producto cartesiano $E \times F$, llamado grafo de la relación. Se dice que $a \in E$ está en relación

con $b \in F$ si y solamente si $(a, b) \in G$, lo cual también se representa por $a \mathcal{R} b$. En la práctica, una relación de E hacia F se define por una «fórmula» o una «propiedad» que permite determinar G.
V. APLICACIÓN, COMPUESTA, FUNCIÓN, FUNCIONAL, GRÁFICO, IMAGEN, RECÍPROCA, SAGITAL (Diagrama).

• *Relación sobre un conjunto* E. — Relación de $E^i$ hacia $E^j$, donde $i$ y $j$ son enteros naturales no nulos.
V. ANTIRREFLEXIVA, ANTISIMÉTRICA, ASIMÉTRICA, BINARIA, COMPATIBLE, DESIGUALDAD, DIVISIBILIDAD, DOMINANCIA, EQUIVALENCIA, HOMOTOPÍA INCLUSIÓN, *n*-ARIA, ORDEN, PARALELISMO, PERPENDICULARIDAD, PREORDEN, REFLEXIVA, SAGITAL, SEMEJANZA, SIMÉTRICA, TERNARIA, TRANSITIVA.

## Relativa

• *Frecuencia relativa.* — Sinónimo de frecuencia. Este calificativo se emplea por aquéllos que emplean el término frecuencia en lugar de efectivo.

• *Vector velocidad (resp. vector aceleración) relativo de un punto* M *móvil por relación a un sistema de referencia* R′ *él mismo móvil en relación a un sistema de referencia fijo* R. — Vector velocidad (resp. vector-aceleración) de M en relación al sistema de referencia móvil R′.
V. ABSOLUTA.

## Relativamente

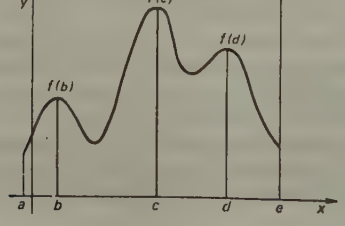
V. COMPACTA.

## Relativo

• *Entero relativo.* — Sinónimo desusado de entero racional.

• *Extremum relativo.* — Maximum o minimum relativo.

• *Maximum (resp. minimum) relativo.* — Una función numérica $f$ definida sobre un espacio topológico E admite un maximum (resp. un minimum) relativo $f(a)$ en $a \in E$ si existe un entorno V de $a$ tal que, para todo $x \in V$, $f(x)$ sea inferior (resp. superior) a $f(a)$. Si $E = \mathbf{R}^n$, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es un maximum (resp. minimum) relativo en $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$ si existe un número real $\varepsilon > 0$ tal que $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_n + h_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant 0$ (resp. $\geqslant 0$) para toda $n$-upla $(h_1, h_2, ..., h_n)$ de números reales inferiores en valor absoluto a $\varepsilon$.
V. FONDO, VÉRTICE.




$f(b)$, $f(c)$, $f(d)$: maximums relativos de $f$ sobre $[\![a, e]\!]$
$f(c)$: maximum (o maximum absoluto) de $f$ sobre $[\![a, e]\!]$

• *Movimiento relativo.* — Movimiento definido por relación a un referencial considerado como móvil en relación a un referencial nominal considerado como fijo.

## Renard, C. (1847-1905)

• *Series de Renard.* — Se llama así a unas progresiones geométricas $R_n$ que tienen 1 por primer término y una raíz $n$-ésima de 10 por razón. Por ejemplo, la serie $R_5$ admite por términos sucesivos:

$$1,\ \sqrt[5]{10},\ \sqrt[5]{10^2},\ \sqrt[5]{10^3},\ \sqrt[5]{10^4},\ 10,\ \sqrt[5]{10^6},\ \sqrt[5]{10^7},\ \ldots$$

En esta serie, el producto [respectivamente el cociente] del término de índice $i$ por el término de índice $j$ es el término de índice $i+j$ [respectivamente de índice $i-j$, suponiendo $i \geqslant j$]. Estas series se utilizan en la industria, donde se toman valores aproximados (V. NÚMEROS NORMALES) de ciertos términos después de la multiplicación por 100 para la normalización de las gamas de piezas fabricadas. En la práctica se consideran esencialmente las series $R_5$, $R_{10}$, $R_{20}$ y $R_{40}$.

## Repartición

• *Repartición de los números primos.* — V. PRIMO.

• *Función de repartición de una variable aleatoria* X. — Función de R en el intervalo $[\![0, 1]\!]$ de R que asocia a $x \in R$ la probabilidad $F(x)$ de que X sea estrictamente inferior a $x$, es decir, la probabilidad del suceso $X^{-1}(]-\infty, \times[)$.
Se tiene pues $F(x) = P(X^{-1}]-\infty, \times K)$, lo que se designa también $F(x) = P(X < x)$. La función F es creciente y, si X es discreta, está en escalera. Algunos autores definen la función F como $F(x) = P(X \leqslant x) = P(X^{-1}]-\infty, \times])$.

## Repeticiones

• *Disposición con repeticiones.* — V. DISPOSICIÓN.

• *Combinación con repeticiones.* — V. COMBINACIÓN.

## Representable

• *Functor covariante representable.* — Functor $F: \mathscr{C} \to Ctos$, donde $\mathscr{C}$ es una categoría, tal que existe un objeto X de $\mathscr{C}$ y un isomorfismo functorial $\Phi$ de F en $Hom_{\mathscr{C}}(X, -)$. Para todo objeto Y, existe, por tanto, un isomorfismo $\Phi_Y: F(Y) \to Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$. Intuitivamente, el objeto X permite «representar» en un cierto sentido el objeto F(Y) por el objeto $Hom_{\mathscr{C}}(X, Y)$.

• *Grafo representable sobre una superficie.* — Un grafo G se llama representable sobre una superficie Σ si se pueden hallar puntos de Σ que representan los vértices de G y arcos de curvas continuos de Σ que representan las aristas de G tales que dos arcos cualesquiera no se encuentran fuera de sus extremidades. El grafo R(G) cuyos vértices son los puntos de Σ y cuyas aristas son los arcos continuos citados anteriormente se denomina representación del grafo G sobre la superficie Σ. Un grafo representable sobre un plano o una esfera es un grafo planario. El grafo no planario de los tres pozos y de las tres casas es representable sobre un toro.
V. CELULARMENTE.

## Representación

• *Representación gráfica de una función.* — V. GRÁFICA.

• *Representación de un grupo* G *en el grupo de las permutaciones* S(E) *de un conjunto* E. — Homomorfismo del grupo G en el grupo S(E).

V. LINEAL (Representación).

• *Representación paramétrica de una curva o de una superficie.* — V. PARAMETRADA, PARAMÉTRICAS (Ecuaciones), RACIONAL.

• *Representación conforme.* — V. CONFORME.

• *Representación de un grafo sobre una superficie.* — V. CELULAR, CARA, REPRESENTABLE.

• *Representación lineal de un grupo.* — V. LINEAL.

## Representante

• *Representante de una clase de equivalencia.* — Elemento de esa clase. Los elementos de la clase son entonces los elementos relacionados por la relación de equivalencia con el representante.

## Representativa

• *Curva representativa de una función.* — Representación gráfica de la función. V. GRÁFICA.

## Residual

• *Clase residual módulo* $n \in \mathbf{N}^*$. — Clase de equivalencia para la congruencia módulo $n$ definida sobre Z. El conjunto de las clases residuales módulo $n$ es el conjunto $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
V. CONGRUENCIA.

• *Clase residual módulo* $\alpha \in \mathbf{R}^*$. — Clase de equivalencia para la congruencia módulo $\alpha$ definida sobre **R**. El conjunto de las clases residuales módulo $\alpha$ es el conjunto $\mathbf{R}/\alpha\mathbf{Z}$.
V. CONGRUENCIA, TORO.

## Residuo

• *Residuo en el infinito de una función f holomorfa en el infinito.* — Residuo de la función:

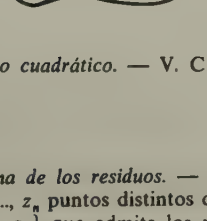
$$z \mapsto -\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

en el punto 0.

• *Residuo de un punto singular* $z_0$ *de una función analítica sobre un abierto convexo* $\mathrm{U} - \{z_0\}$ *de* **C**. — Se llama residuo al coeficiente $a_{-1}$ de $\dfrac{1}{z - z_0}$ en el desarrollo de Laurent de $f$ en el punto $z_0$. Para todo bucle $\gamma : \mathrm{I} \to \mathbf{C}$ tal que $z_0 \notin \gamma(\mathrm{I})$ verifica:

$$a_{-1}\,\mathrm{I}(\gamma,\ z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz$$

Se le representa por $\mathrm{Res}(f,\ z_0)$.
V. INDICE.

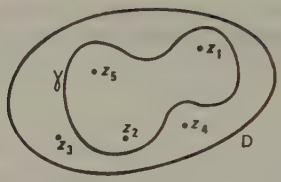



• *Residuo cuadrático.* — V. CUADRÁTICO.

## Residuos

• *Teorema de los residuos.* — Sea D un abierto simplemente conexo de **C**, sean $z_1, \ldots, z_n$ puntos distintos de D, sea $f$ una función analítica en $\mathrm{D}' = \mathrm{D} - \{z_1, \ldots, z_n\}$ que admite los puntos $z_i$ como puntos singulares y sea $\gamma$ un bucle contenido en D'; entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}(\gamma,\ z_k) \cdot \mathrm{Res}(f,\ z_k).$$




Este teorema permite calcular de manera simple, numerosas integrales de funciones reales de variables reales, por ejemplo:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \quad \text{o} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1}\,dx.$$

V. INDICE, RESIDUO.

## Resoluble

• *Ecuación resoluble por radicales.* — Sea $P(X) \in K[X]$ un polinomio. La ecuación $P(X) = 0$ es resoluble por radicales si el cuerpo de descomposición E de P es un subcuerpo de un cuerpo L que tiene la propiedad siguiente: existe una sucesión:

$$L_0 = K \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_n = L$$

de subcuerpos de L donde para $i = 1, \ldots, n$ cada cuerpo $L_i$ es la forma $L_i = L_{i-1}(x_i)$ con $x_i$ raíz de un polinomio $X^m i - a_i \in L_{i-1}[X]$. Así, los elementos de $L_i$ se expresan con la ayuda de radicales de elementos de $L_{i-1}$. Uno de los resultados fundamentales de la teoría de Galois afirma que $P(X) = 0$ es resoluble por radicales si y solamente si $\mathrm{Gal}(E/K)$ es un grupo resoluble; además, el grupo de Galois de la ecuación «general» $X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \ldots + \alpha_0 = 0$ no es otro que $S_n$.
V. GALOIS (Teoría de).

• *Grupo resoluble.* — Un grupo G de elemento neutro *e* se denomina resoluble si existe una sucesión

$$G_0 = \{e\} \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

de subgrupos de G tal que para $i = 1, \ldots, n$, el subgrupo $G_{i-1}$ sea distinguido en $G_i$ y el grupo cociente $G_i/G_{i-1}$ sea conmutativo. Todo grupo conmutativo es resoluble y todo grupo finito de orden $p^n$ ($p$ primo) es resoluble.
V. BURNSIDE, FEIT.
Esta terminología proviene de la teoría de Galois (véase ecuación resoluble por radicales). Se sabe que $S_3$ y $S_4$ son resolubles, pero para $n \geqslant 5$ el grupo $S_n$ no es resoluble.

## Resolvente

• *Resolvente cúbica de una ecuación de cuarto grado.* — V. CUARTO.

## Resolver

V. ECUACIÓN, INECUACIÓN.

## Resto

- *Resto de la división euclídea en un anillo euclídeo.* — V. EUCLÍDEO.
- *Resto de Lagrange.* — V. MAC LAURIN, TAYLOR.
- *Resto de Young.* — V. MAC LAURIN, TAYLOR.
- *Resto de orden p de una serie convergente* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *de vértice* U. — Diferencia $U - S_p$, donde $S_p = \sum_{n=0}^{p} u_i$; es la suma de la serie convergente $\sum_{n\geqslant p+1} u_n$.

## Restos

- *Teorema de los restos chinos.* — Teorema chino.

## Restricción

- *Restricción de una acción* $\varphi$ *de* $\Omega$ *sobre* E *a una parte estable* A *de* E. — Restricción de $\varphi$ a $\Omega \times A$.
- *Restricción de una aplicación f de* E *en* F *de una parte* A *de* E. — Aplicación $f_A$ de A definida en F definida por $f_A(x) = f(x)$ para todo elemento $x$ de A.
- *Restricción de una ley de composición interna* $(x, y) \mapsto x * y$ *sobre un conjunto* E *a una parte estable* A *de* E. — Restricción a $A \times A$ de la aplicación $*$.

## Resultante

- *Resultante de dos ecuaciones algebraicas* $P(x) = 0$ y $Q(x) = 0$. — Resultante R de los polinomios P y Q. Las dos ecuaciones admiten por lo menos una solución común si y solamente si $R = 0$.
- *Resultante de dos polinomios:*

$$P = a_0X^n + \ldots + a_{n-1}X + a_n$$

*y*

$$Q = b_0X^m + \ldots + b_{m-1}X + b_m \text{ de } K[X]$$

*donde* K *es un cuerpo.* — Determinante de orden $n + m$ de la matriz llamada matriz de Sylvester:

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & . & . & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & . & . & 0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 \\
0 & 0 & . & . & . & 0 & a_0 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n \\
b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & 0 & . & . & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & 0 & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & . & 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & 0 \\
0 & . & . & 0 & b_0 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m
\end{pmatrix}$$

Este determinante, introducido por Sylvester (también se le llama determinante de Sylvester) es nulo si y solamente si P y Q tienen un factor común no constante, es decir, un MCD de grado superior o igual a 1. Si $\alpha_1$, ..., $\alpha_n$ y $\beta_1$, ..., $\beta_n$ son las raíces respectivas de P y Q, la resultante de P y Q se expresa por:

$$R = a_0^m b_0^n \Pi(\alpha_i - \beta_j) = a_0^m \Pi Q(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^n \Pi P(\beta_i).$$

De igual forma se definen las resultantes de dos polinomios en dos indeterminadas. Se obtienen dos, una por eliminación de una indeterminada y la otra por eliminación de la segunda indeterminada. Esta noción juega un papel importante para el estudio de las curvas algebraicas planas.

Sea $\Delta$ el discriminante del polinomio P; la resultante R de P y del polinomio P' verifica:

$$R = (-1)^{n(n-1)/2} a_0 \Delta.$$

V. DISCRIMINANTE.

• *Momento resultante de un torsor en relación a un punto* O. — Sea un torsor constituido de $n$ vectores deslizantes $((D_i, V_i))_{i\in[1,n]}$ cuyos momentos con relación a O son $(\overrightarrow{OM}_i)_{i\in[1,n]}$. El vector $\overrightarrow{OK}$ definido por $\overrightarrow{OK} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM}_i$ se llama momento resultante del torsor con relación al punto O.

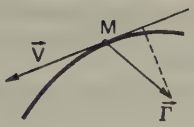
• (Meca.) *Resultante cinética.* — V. CANTIDAD (de movimiento).

• (Meca.) *Resultante general de un torsor.* — Sea un torsor de $n$ vectores deslizantes $((Pi, \overrightarrow{Vi}))_{i\in[1,n]}$. El vector $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{Vi}$ se llama resultante general del torsor.

V. GEOMETRÍA (Suma).

## Retardado

• *Movimiento retardado de un móvil puntual* M. — Movimiento tal que el producto escalar $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ del vector-velocidad $\vec{V}$ y del vector-aceleración $\vec{\Gamma}$ de M sea negativo. En tal movimiento, el valor absoluto de la velocidad $v$ de M es decreciente.




• *Movimiento rectilíneo uniformemente retardado.* — Movimiento rectilíneo retardado tal que la norma del vector-aceleración es constante. Un cuerpo lanzado verticalmente hacia lo alto en el vacío está animado de movimiento rectilíneo retardado en el curso de su subida.
V. VARIADO.

## Reticulado

• *Conjunto reticulado.* — Sinónimo de retículo.

## Retorno

• *Teorema del retorno de Poincaré.* — V. POINCARÉ.

## Retroceso

• *Arista de retroceso de una superficie reglada desarrollable.* — Envolvente de las generatrices de esta superficie.

• *Punto de retroceso.* — Sea M un punto de una curva plana Γ que admite en M una tangente T. El punto M es un punto de retroceso si existe un entorno V de M y una recta D diferente de T que pasa por M, tales que los puntos de $\Gamma \cap V$ pertenecen a un mismo semi-plano por relación a D. El retroceso se denomina de primera (resp. de segunda) especie si existe un entorno V′ de M tal que los puntos de $\Gamma \cap V'$ sean por una y otra parte de T (resp. del mismo lado por relación a T).

Primera especie

Segunda especie

## Retrógrado

Utilizado por oposición a directo.

• *Automorfismo retrógrado de un* R*-espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Automorfismo cuyo determinante es negativo. Si E está orientado, transforma toda base en E en una base de sentido contrario.

• *Automorfismo afín retrógrado.* — Automorfismo afín cuya aplicación lineal asociada es un automorfismo retrógrado.

• *Base retrógrada de un espacio vectorial orientado.* — V. ORIENTACIÓN.

• *Isometría afín retrógrada de un espacio afín euclídeo.* — Isometría afín cuyo automorfismo ortogonal asociado es retrógrado. Tal isometría también se llama un antimovimiento.
V. ANTIMOVIMIENTO.

• *Semejanza retrógrada.* — Semejanza inversa.

## **Reuleaux,** François (1829-1905)

• *Figuras de Reuleaux.* — Curvas de anchura constante que se construyen fácilmente partiendo de polígonos regulares con un número impar de lados y reemplazando esos lados por arcos de círculos centrados sobre los vértices opuestos. Los triángulos de Reuleaux permiten la puesta a punto de ejes que pueden perforar agujeros de sección cuadrada. Se emplea en los aparatos de proyección cinematográfica y en el motor rotativo Wankel.

Triángulo de Reuleaux

## Reunión

• *Reunión de dos conjuntos* A *y* B. — Conjunto de elementos que pertenecen a A o a B (o a ambos). La reunión de A y B se representa $A \cup B$ y se lee «A unión B» o «A reunión B». Sobre el conjunto $\mathfrak{P}(E)$ de las partes de un conjunto E, la reunión es una ley de composición interna asociativa, conmutativa, idempotente y que admite $\phi$ como elemento neutro.
V. DISJUNTA.

Rayado: $A \cup B$

• *Reunión de una familia* $(A_i)_{i \in I}$ *de conjuntos.* — El conjunto representado por $\bigcup_{i \in I} A_i$ (se lee «unión o reunión de A») de los elementos que pertenecen a uno por lo menos de los $A_i$. El plano es la reunión de las rectas que contiene.

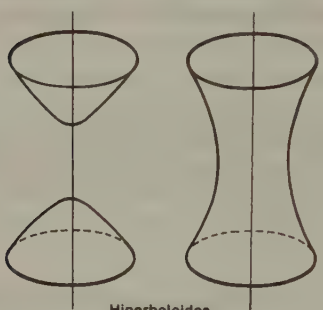
## Revolución

• *Cilindro de revolución.* — Superficie de revolución del que una directriz es una recta paralela al eje de revolución. Es una cuádrica. En un sentido usual, algunos sólidos se denominan cilindros de revolución (V. CILINDRO).

• *Cono de revolución.* — Superficie de revolución de la que una directriz es una recta que corta el eje de revolución. Es una cuádrica. En un sentido usual, algunos sólidos se denominan conos de revolución (V. CONO).

• *Hiperboloide de revolución.* — Hiperboloide engendrado por una hipérbola que gira alrededor de uno de sus ejes de simetría. Según el eje escogido, el hiperboloide de revolución es de una hoja o de dos hojas. El hiperboloide de

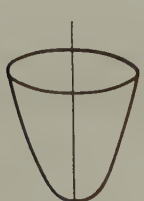
revolución de una hoja está también engendrado por una recta que gira alrededor de un eje no coplanario con la recta.



Hiperboloides

• *Elipsoide de revolución.* — Elipsoide engendrado por una elipse que gira alrededor de uno de sus ejes. La esfera es un elipsoide de revolución particular.
V. ALARGADO, APLASTADO.

• *Paraboloide de revolución.* — Paraboloide elíptico engendrado por una parábola que gira alrededor de su eje.



• *Superficie de revolución.* — Superficie engendrada por una curva, llamada directriz, que gira alrededor de una recta fija llamada eje de revolución.
V. CATENOIDE, LOXODROMA, MERIDIANA, PARALELA, TORO.

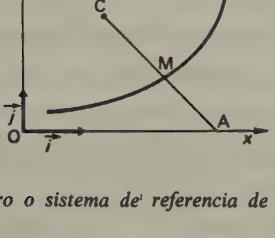
## Ribaucour, Albert (1845-1893)

• *Curvas de Ribaucour.* — Una curva plana $\Gamma$ es una curva de Ribaucour en relación a un sistema de referencia ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$ si para todo punto $M \in \Gamma$ la relación $m = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}}$ es constante, siendo el punto C el centro de curvatura en M y siendo el punto A la intersección de (CM) con el eje de las

abscisas. La curva $\Gamma$ es la representación gráfica de una solución $f$ de la ecuación diferencial:

$$m(1 + y'^2) + yy'' = 0.$$

Los valores $m = -1$, $m = \frac{1}{2}$, y $m = 1$ corresponden respectivamente a cadenetas, parábolas, cicloides y círculos.




• *Triedro o sistema de referencia de Darboux-Ribaucour.* — V. DARBOUX.

## Ricatti, Jacopo Francesco, Conde (1676-1754)

• *Ecuación de Ricatti.* — Ecuación diferencial no lineal del primer orden de la forma:

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x).$$

Si se conoce una solución particular $y = y_0$, su resolución se reduce a la de una ecuación de Bernoulli en $z$ poniendo $y = y_0 + z$.

## Richard, Jules Antoine (1862-1956)

• *Paradoja de Richard.* — Sea $n$ el entero natural definido por el enunciado (R): «$n$ es el entero más pequeño que no se puede definir mediante una frase formada por menos de 100 palabras francesas». Se constata que el enunciado (R) que define $n$ comprende 23 palabras; la contradicción es evidente. Reside en el cambio de significación atribuida a la palabra «definir». Esta paradoja ilustra la necesidad de emplear palabras conservando el mismo sentido a lo largo de una exposición.

## Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826-1866)

• *Conjetura de Riemann.* — V. RIEMANN (Hipótesis de).

• *Criterio o regla de convergencia de Riemann.* — Sea $\Sigma u_n$ una serie de términos reales positivos. Si $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = 0$ con $\alpha > 1$, la serie $\Sigma u_n$ converge; si $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ con $\alpha < 1$, la serie $\Sigma u_n$ diverge.

• *Esfera de Riemann.* — En $\mathbf{R}^3$ provisto de un sistema de referencia ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ se considera el plano complejo $\pi$ provisto de un sistema de referencia $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Sean $\Sigma$ la esfera de centro O y de radio 1 y los puntos P(0, 0, −1) y P′(0, 0, 1) diametralmente opuestos sobre la esfera. Las proyecciones estereográficas $f$ y $f'$ de $\Sigma$ sobre $\pi$, de polos respectivos P y P′, constituyen un atlas de $\Sigma$. La esfera $\Sigma$ provista de dos mapas $f$ y $f'$ se denomina esfera de Riemann. Es homeomorfa al compactificado de Alexandrov de $\mathbf{C}$ y de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

• *Función integrable en el sentido de Riemann.* — V. RIEMANN (Integral).

• *Función zeta de Riemann.* — La función $\zeta$ de variable compleja definida por $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ es holomorfa en el semiplano constituido por los complejos $s = \sigma + it$ tales que $\sigma > 1$; se prolonga analíticamente en una función holomorfa $\zeta$ sobre $\mathbf{C} - \{1\}$ llamada función zeta de Riemann. Constituye una herramienta poderosa para el estudio de la repartición de los números primos. Entre los ceros de esa función figuran los números −2, −4, −6, etc., llamados ceros triviales. En el caso en que $\alpha > 1$ es un número real, $\zeta(\alpha)$ es la suma de la serie de Riemann de término general $1/n^\alpha$. Se encuentra, por ejemplo:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9.450},$$

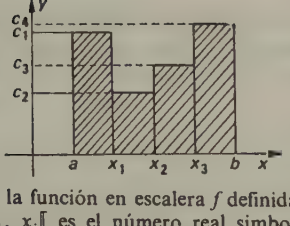
y, más generalmente, $\zeta(2k) = a_k \pi^{2k}$ para $k \in \mathbf{N}^*$ y $a_k \in \mathbf{Q}$. Esto prueba (teniendo en cuenta el teorema de Lindeman) que $\zeta(2k)$ es irracional (e incluso transcendente); por el contrario, a excepción de $\zeta(3)$ (V. APERY), se ignora si $\zeta(2k + 1)$ es o no irracional para $k \geqslant 1$.
V. RIEMANN (Hipótesis de).

• *Fórmula de Green-Riemann o fórmula de Riemann.* — V. GREEN.

• *Geometría de Riemann.* — Geometría fundada sobre un sistema de axiomas en el que el quinto postulado de Euclides es reemplazado por un axioma que exige que, por un punto exterior a una recta, no se puede trazar ninguna paralela a esta recta. Este axioma es equivalente al hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es superior a dos ángulos rectos. En esta geometría, las rectas son necesariamente de longitud finita. Un buen modelo de la geometría plana de Riemann es proporcionado por la geometría de la gavilla. La geometría sobre la esfera, considerando como rectas los círculos máximos de la esfera, constituye otro modelo de la geometría plana de Riemann.
V. CAYLEY, ELÍPTICA, GAVILLA, LOBATCHEVSKI.

• *Hipótesis o conjetura de Riemann.* — Todos los ceros de la función de Riemann distintos a −2, −4, −6, etc., tienen una parte real igual a 1/2. Esta conjetura no demostrada en 1978 ha sido verificada en el ordenador para varios millones de ceros de $\zeta$. Hardy ha probado que una infinidad de ceros de $\zeta$ tenía 1/2 como parte real. Una respuesta afirmativa daría importantes precisiones sobre la distribución de los números primos.

• *Integral de Riemann de una función escalonada.* — Sea $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ una subdivisión del intervalo $[\![a, b]\!]$ con $x_0 = a$ y $x_{n+1} = b$. La integral de Rie-




mann de la función en escalera $f$ definida sobre $[\![a, b]\!]$ por $f(x) = c_i$ para todo $x \in ]\!]x_{i-1}, x_i[\![$ es el número real simbolizado por:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ definido por } \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} c_{i+1}(x_{i+1} - x_i).$$

● *Integral de Riemann.* — Sea $f$ una función real acotada sobre $[\![a, b]\!]$ y sea:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b = x_{n+1}$$

una subdivisión de $[\![a, b]\!]$. Se dice que $f$ es integrable en el sentido de Riemann si las sumas de Riemann:

$$\sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i)$$

tienden hacia un número real I cuando $n$ tiende hacia el infinito y cuando el mayor de los números reales $(x_{i+1} - x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ tiende hacia cero. El número real I simbolizado por $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama integral de Riemann de $f$. Las funciones continuas, las funciones monótonas, las funciones de variación acotada sobre $[\![a, b]\!]$ son integrables en el sentido de Riemann. Las funciones regladas lo son igualmente, sus integrales llamadas de Cauchy-Riemann pueden ser definidas de manera más simple.
V. LEBESGUE, RIEMANN (Integral de Cauchy-).

● *Integral de Riemann-Stieltjes.* — V. STIELTJES.

● *Integral de Cauchy-Riemann de una función reglada f definida sobre un intervalo* $[\![a, b]\!]$ *de* **R**. — Para toda sucesión $(f_n)$ de funciones en escalera que convergen uniformemente hacia $f$, la sucesión $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_n$ converge hacia un único número real simbolizado por $\int_a^b f(x)\,dx$ y llamado integral de Cauchy-Riemann de $f$.

● *Lema de Riemann.* — Si $f$ es una función creciente y acotada sobre el intervalo $]\!]a, b[\![$, entonces, cuando $\lambda$ tiende hacia el infinito,

$$\int_a^b f(n)\cos(\lambda x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_a^b f(n)\,\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx$$

están dominadas por la función $\lambda \to 1/\lambda$.

● *Serie de Riemann.* — Serie de término general $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbf{R}$. Converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leqslant 1$.
V. RIEMANN (Función zeta de).

• *Sumas de Riemann.* — Sea $f$ una función real definida sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ de **R**. Dada una subdivisión $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ de $[\![a, b]\!]$ con $x_0 = a$ y $x_{n+1} = b$ y $n + 1$ reales $(t_i)_{(i=1, \ldots, n)}$ tales que $t_i \in ]\!]x_i, x_{i+1}[\![$, el número real:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) f(t_i)$$

se llama una suma de Riemann.

• *Superficie en hojitas de Riemann.* — Superficie que permite remitir el estudio de una función multiforme a la de una función uniforme. Intuitivamente, el plano es reemplazado por hojitas superpuestas en número igual al de los valores que toma la función multiforme en un punto, estando soldadas esas hojas dos a dos a lo largo de ciertas líneas que permiten el paso de una hoja a otra.

• *Tensor de Riemann-Christoffel.* — Tensor R tres veces covariante y una vez contravariante definido con la ayuda de los símbolos de Christoffel (V. CHRISTOFFEL), por:

$$R^h_{ilk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^h_{il}}{\partial x_k} + \sum_j \Gamma^j_{ik} \Gamma^h_{jl} - \Gamma^j_{il} \Gamma^h_{jk}.$$

• *Teorema de Riemann.* — Para que una función compleja $f$, holomorfa en un entorno V de un punto $z_0 \in \mathbf{C}$, salvo quizá en ese punto, admita una prolongación holomorfa en $z_0$, es necesario y suficiente que $f$ sea acotada en el entorno de $z_0$.

## Riesz, Frigyes o Frédéric (1880-1956)

• *Espacio de Riesz.* — Espacio vectorial ordenado reticulado; ejemplo: el espacio de las funciones numéricas definidas sobre un conjunto o el espacio de las funciones numéricas continuas de soporte compacto sobre un espacio topológico localmente compacto (V. MEDIDA).

• *Teorema de Riesz.* — Teorema base de la teoría de los espacios normados y de la teoría espectral. Puede enunciarse: un espacio normado es localmente compacto si y solamente si es de dimensión finita.

• *Teorema de Fischer- Riesz.* — V. FISCHER.

## Rígida/o

• *Poliedro o superficie rígida.* — Poliedro o superficie cuya forma no puede modificarse sin modificar la longitud de al menos una de las curvas trazadas sobre él o sobre ella. También se dice que ese poliedro o esa superficie es inflexible.

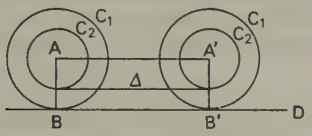
V. BRICARD, CAUCHY, CONNELLY, FLEXAEDRO, FLEXIBLE.

## Robinson, Abraham (1918-1974)

V. NO ESTÁNDAR (Análisis).

## Rodamiento

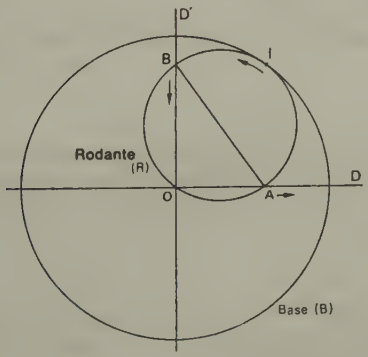
• *Paradoja del rodamiento del círculo.* — Sean dos círculos $C_1$ y $C_2$ concéntricos de centro O considerados como solidarios uno del otro (por ejemplo, una rueda y sus tapacubos). Cuando el círculo grande $C_1$ rueda sobre una recta D y efectúa una vuelta completa, su centro se desplaza una longitud AA′ igual a la longitud BB′ de la circunferencia de $C_1$. Al mismo tiempo, el círculo pequeño $C_2$ ha efectuado una vuelta completa y su centro se ha desplazado de A a




A′. La longitud AA′, que es igual a BB′, ¿representa la longitud de la circunferencia del círculo pequeño? Galileo se interesó en esta paradoja descubierta antes de Aristóteles. Las nociones de rodamiento sin o con deslizamiento p ermiten esclarecerla. El círculo $C_1$ rueda sin deslizarse sobre la recta D, mientras que $C_2$ rueda deslizándose sobre la recta Δ que le es tangente.

## Rodante

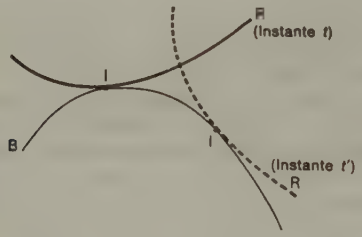
• *Rodante en el movimiento de un plano sobre un plano.* — Si una curva R de un plano P rueda sin deslizarse sobre una curva fija B, la curva R se denomina la rodante y la curva B la base del movimiento del plano móvil ligado a R sobre el plano fijo ligado a B. Sea P′ un plano móvil sobre un plano fijo P. La trayectoria T′ del centro instantáneo de rotación I en el plano P′ rueda sin deslizarse sobre la trayectoria T de I en P y, por consiguiente, T y T′ son respectivamente la base y la rodante del movimiento de P′ sobre P. Por ejemplo, supongamos que los extremos A y B de un segmento de longitud *l* se desplazan sobre dos rectas perpendiculares D y D′ que se cortan en O. La



base y la rodante del movimiento del plano móvil ligado al segmento sobre el plano fijo ligado a D y D' son respectivamente el círculo de centro O, de radio *l* y el círculo cuyo segmento AB es un diámetro.

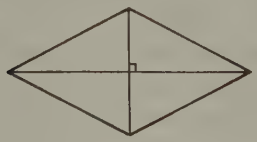
## Rodar

• *Rodar sin deslizarse.* — Sean B una curva fija de un plano P y R una curva móvil de P tangente en cada instante a B en un punto I. Se dice que R rueda sin deslizarse sobre B si la velocidad de arrastre de I en cada instante es nula. El punto I es entonces el centro instantáneo de rotación del movimiento sobre el plano P del plano P' ligado a R; las curvas R y B son la rodante y la base del movimiento de P' sobre P. Esta noción no es ya válida en el espacio donde el rodamiento de una superficie sobre otra va acompañado generalmente de un pivotamiento.



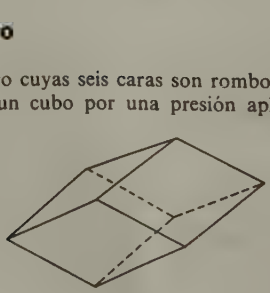

## Rombo

Paralelogramo cuyas diagonales son perpendiculares. Los lados de un rombo tienen igual longitud. Los ángulos opuestos son iguales. Los ángulos adyacentes son suplementarios.



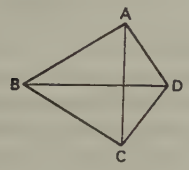
## Romboedro

Hexaedro cuyas seis caras son rombos isométricos. Puede ser obtenido al deformar un cubo por una presión aplicada a dos vértices opuestos.



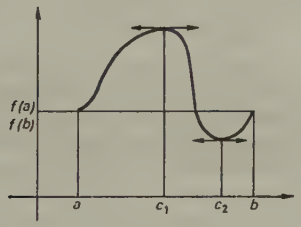
## Rombolde

Cuadrilátero ortodiagonal simétrico con relación a una de sus diagonales.




## Rolle, Michel (1652-1719)

• *Teorema de Rolle.* — Teorema base del cálculo infinitesimal. Sea $f$ una función real definida y continua sobre un intervalo cerrado $[\![a, b]\!]$ de **R**; si $f$ es derivable sobre el intervalo abierto $]\!]a, b[\!]$ y si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número real $c \in ]\!]a, b[\!]$ tal que $f'(c) = 0$.
V. FINITOS (Teorema de los incrementos).




## Romanos

• *Números romanos.* — Símbolos I, V, X, L, C, M... que sirven de soporte a la numeración romana.

## Rosetón

Grafo fuertemente conexo sin bucle y que posee un único nudo. Nombre dado a ciertas curvas que tienen esa forma.

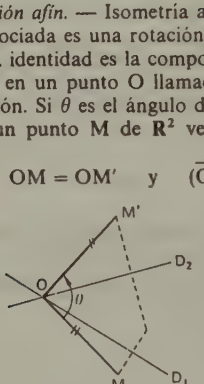
## Rot

V. ROTACIONAL.

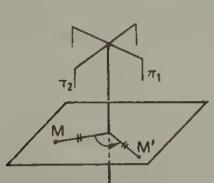
## Rotación

• *Rotación afín.* — Isometría afín de un espacio afín euclídeo cuya aplicación lineal asociada es una rotación vectorial. En $\mathbf{R}^2$ una rotación afín R no reducida a la identidad es la composición de dos simetrías axiales de ejes $D_1$ y $D_2$ secantes en un punto O llamado centro, que es el único punto invariante de la rotación. Si $\theta$ es el ángulo de la rotación vectorial asociada a R, la imagen M' de un punto M de $\mathbf{R}^2$ verifica:

$$OM = OM' \quad y \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta.$$




En $\mathbf{R}^3$, una rotación afín R no reducida a la identidad es la composición de dos simetrías en relación a dos planos secantes $\pi_1$ y $\pi_2$. La recta de intersección de $\pi_1$ y $\pi_2$, llamada eje de la rotación, es el conjunto de los puntos invariantes de la rotación. La restricción de la rotación R a un plano perpendicular al eje es una rotación en ese plano.




• *Rotación vectorial de un espacio vectorial euclídeo* E *de dimensión finita.* — Automorfismo ortogonal de E cuyo determinante es igual a 1. Una rotación es una isometría directa.
V. ROTACIÓN (Matriz de), ROTACIONES (Grupo de las).

• *Angulo de una rotación.* — V. ANGULO.

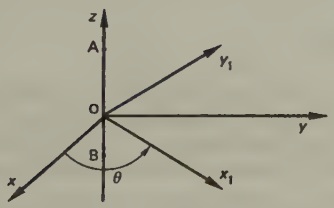
• *Angulo de rotación propio.* — V. EULER.

• *Centro instantáneo de rotación.* — V. INSTANTÁNEO.

• *Matriz de rotación.* — Matriz de una rotación vectorial en relación a una base ortonormada. En un plano vectorial euclídeo, toda matriz de rotación es

de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$; si el plano está orientado y si la base es directa, entonces $a = \text{Cos}\,\theta$ y $b = \text{Sen}\,\theta$, donde $\theta$ es el ángulo de la rotación.

● *Movimiento de rotación de un sólido.* — Movimiento tal que menos dos puntos al A y B del espacio ligados al sólido permanecen fijos en el curso del movimiento. Todos los puntos fijos están situados sobre la recta AB que se denomina el eje de rotación. Cada punto del sólido tiene una trayectoria circular cuyo centro está sobre el eje. Sean $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$ un triedro trirrectángulo fijo tal que $\overrightarrow{Oz}$ coincide con el eje, y $(\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1}, \overrightarrow{Oz})$ un triedro trirrectángulo móvil ligado al sólido. El movimiento de rotación está determinado por el eje y por el ángulo $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ox_1})$, función del tiempo a partir del cual se define la velocidad y la aceleración angular del movimiento.
V. ANGULAR.




● *Vector-rotación de un movimiento de rotación (resp. helicoidal) de eje* $\Delta$. — Vector $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}$, donde $\omega$ es la velocidad angular y $\vec{u}$ un vector director unitario del eje $\Delta$.

● *Vector-rotación instantáneo en el instante t en un movimiento cualquiera de un sólido.* — Vector rotación en el instante $t$ del movimiento helicoidal tangente en el instante $t$ al movimiento.
V. CORIOLIS.

● *Velocidad de rotación.* — Sinónimo de velocidad angular.
V. ANGULAR.

## Rotacional

● *Rotacional de un campo de vectores* $\vec{V}$ *definido sobre un abierto* U *de* $\mathbf{R}^3$ *y de componentes* P, Q, R. — Campo de vectores simbolizado por $\vec{V}$ y de componentes:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

El rotacional es un operador diferencial.
V. CURL, ROTOR, TORBELLINO.

## Rotaciones

• *Grupo de las rotaciones de un espacio vectorial euclídeo* E *de dimensión finita.* El conjunto de las rotaciones de E es un subgrupo del grupo ortogonal O(E). Este subgrupo, simbolizado por $O^+(E)$ o SO(E) se denomina el grupo de las rotaciones de E. Cuando E es un plano euclídeo, SO(E) es isomorfo al grupo aditivo $\mathfrak{U}/$ de los ángulos (orientados) de E.

V. ESPECIAL (Grupo).

## Rotor

Sinónimo de rotacional, empleado por los físicos.

## Rouché, Eugéne (1832-1910)

• *Teorema de Rouché.* — Sean D un abierto simplemente conexo de C, $\Gamma$ una curva simple cerrada y sean $f$ y $g$ dos funciones holomorfas en D. Si $f(z)$ es no nulo y verifica $|g(z)| < |f(z)|$ para todo punto $z$ de $\Gamma$, entonces las funciones $f$ y $f + g$ tienen el mismo número de raíces en el abierto acotado limitado por $\Gamma$.

• *Teorema de Rouché-Fontené.* — Informa sobre la existencia y el número de soluciones de un sistema de $n$ ecuaciones lineales de $p$ incógnitas según el rango $r$ de ese sistema y se resume así:

| | | $r = p$ | $r < p$ |
|---|---|---|---|
| $r = n$ | | Unica solución | Indeterminación |
| $r < n$ | Todos los determinantes característicos son nulos. | Unica solución | Indeterminación |
| | Un determinante característico es no nulo. | No hay solución | No hay solución |

V. CRAMER.

## Ruleta

Sea M un punto ligado al plano $\pi$ de una curva plana que rueda sin deslizarse sobre una curva plana fija C cuyo plano coincide con $\pi$. El lugar de las posiciones que ocupa M en el plano fijo de C se llama una ruleta. Ejemplo, los cicloides.

## Ruptura

• *Cuerpo de ruptura.* — Empleado a veces por cuerpo de dislocación. V. DISLOCACIÓN.

## Rusa

• *Multiplicación rusa.* — Nombre que a veces se da al procedimiento de multiplicación ya conocido por los egipcios ilustrado por la figura que va a continuación para el cálculo de 62 × 18. El número escrito a la izquierda es doblado sucesivamente, mientras que el número escrito a la derecha es el cociente entero de la división por 2 del número precedente. Se halla el resultado de 62 × 18 sumando en la columna de la izquierda los números situados frente a los números impares de la derecha. Presenta la ventaja de no hacer intervenir más que multiplicaciones o divisiones por 2 y adiciones.

| | |
|---|---|
| ~~62~~ | 18 |
| 124 | 9 |
| ~~248~~ | 4 |
| ~~496~~ | 2 |
| 992 | 1 |

62 × 18 = 1 116

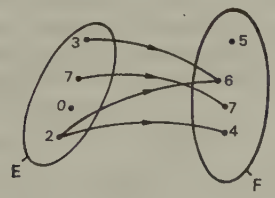
## Russell, Bertrand, tercer conde (1872-1970)

• *Paradoja de Russell.* — Paradoja popularizada bajo la forma de la paradoja de los catálogos: un librero decide hacer el catálogo K de los catálogos que no están catalogados. ¿El catálogo K deberá figurar en este nuevo catálogo? Esta paradoja se parece a la paradoja del barbero (V. BARBERO). Más matemáticamente, se expresa así: sea $\mathscr{C}$ la clase de todos los conjuntos que no pertenecen a ellos mismos. Si $\mathscr{C}$ es un conjunto, no se puede responder a la pregunta «¿$\mathscr{C}$ es un elemento de $\mathscr{C}$?» Esta paradoja prueba que una clase de conjuntos no es necesariamente un conjunto.

# S

## Sagital

• *Diagrama sagital de una relación.* — Esquema que permite representar una relación de un conjunto finito hacia otro. A continuación se representa el diagrama sagital de la relación «divide» de fuente E = {0, 2, 3, 7} y de conjunto final F = {4, 5, 6, 7}.



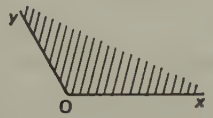

## Saldo

Designa, según la teoría de los juegos, el resultado obtenido por los jugadores al final del juego.

## Saliente

• *Angulo saliente.* — Utilizado abusivamente en el lugar de sector angular saliente.

• *Sector angular saliente.* — Sector angular convexo.

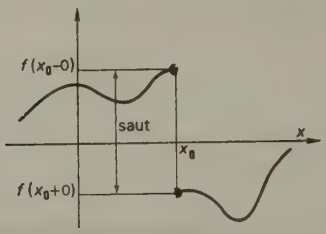



## Salto

Sea $f$ una función numérica de variable real que admite en $x_0$ una discontinuidad de primera especie. Se denomina salto en $x_0$ al número real:

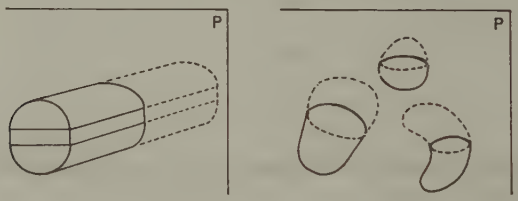
$$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$$

donde $f(x_0 + 0)$ [resp. $f(x_0 - 0)$] designa el límite a derecha (resp. a izquierda) de $f$ en $x_0$. En cada $n \in \mathbf{Z}$, la función «parte entera» posee un salto igual a 1.



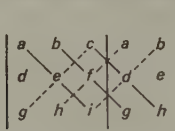

## Sandwich o jamón

• *Teorema del sandwich o jamón.* — Dados tres sólidos del espacio (por ejemplo, dos trozos de pan y la loncha de jamón), existe un solo plano que corta cada uno de los sólidos en dos volúmenes iguales. Este teorema trivial para un sandwich está lejos de ser trivial para tres sólidos cualesquiera.




## Sarrus, Pierre (1798-1861)

• *Regla de Sarrus.* — Regla práctica que permite calcular un determinante de orden 3 de elementos en un cuerpo K. Se reescriben a la derecha del determinante las dos primeras columnas. El determinante es igual a la suma de los




productos de los tripletes de elementos situados sobre una paralela a la diagonal principal disminuida de la suma de los productos de los tripletes de elementos situados sobre una paralela a la diagonal no principal. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

## Saturada

• *Parte saturada para una relación de equivalencia* R *sobre un conjunto* E. — Parte S de E que, para todo $x \in S$, contiene la clase $x$ de módulo R. La parte S es, por tanto, una reunión de clases de equivalencias.

## Schering, Ernst C. (1833-1897)

• *Teorema de Schering-Kronecker.* — Todo grupo abeliano de tipo finito es suma directa de grupos monógenos.

## Schläfli, Ludwig (1814-1895)

• *Integral de Schläfli.* — Da una expresión del polinomio de Legendre de orden $n$:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(t^2 - 1)^n}{2^n (t - z)^{n+1}} dt,$$

donde, en el plano complejo, C es una curva simple cerrada cuyo interior contiene $z$.

• *Principio de Dirichlet-Schläfli.* — V. DIRICHLET.

## Schlömilch, Otto (1823-1901)

• *Fórmula de Schlömilch.* — Muestra que, por ejemplo, las funciones de Bessel $J_n$ son los coeficientes de Fourier de la función $\theta \mapsto e^{ix \operatorname{sen} \theta}$, es decir:

$$e^{ix \operatorname{sen} \theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\theta} J_n(x).$$

## Schmidt, Erhard (1876-1959)

• *Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.* — V. GRAM.

## Schneider, Theodor (1911-1988)

• *Teorema de Gelfond-Schneider.* — V. GELFOND.

## Schoenflies, Arthur M. (1853-1928)

• *Teoremas de Schoenflies.* — Dada una curva de Jordan $\Gamma$ de interior D en $\mathbf{R}^2$, existe un homeomorfismo $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $f(\Gamma)$ y $f(D)$ sean respectivamente la circunferencia unidad y el disco unidad.

## **Schreier,** Otto (1901-1929)

• *Teorema de Nielsen-Schreier.* — V. NIELSEN.

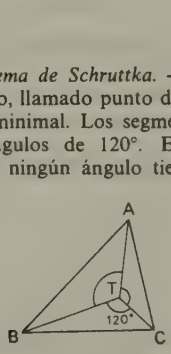
• *Teorema de Schreier.* — Todo sub-grupo de un grupo libre es un grupo libre.

## **Schröder,** Ernst (1841-1902)

• *Teorema de Schröder-Bernstein.* — Nombre dado a veces al teorema de Bernstein.
V. BERNSTEIN.

## **Schruttka**

• *Teorema de Schruttka.* — En todo triángulo acutángulo hay un punto, y uno sólo, llamado punto de Torricelli, cuya suma de las distancias a los vértices es minimal. Los segmentos que le unen a los tres vértices forman entre ellos ángulos de 120°. Este resultado es también válido para un triángulo del que ningún ángulo tiene una medida que exceda de 120°.




## **Schur,** Issai (1875-1941)

• *Lema de Schur.* — Sea M un módulo simple sobre un anillo A. El anillo $\mathrm{End}_A(M)$ es un cuerpo (no necesariamente conmutativo).

## **Schwarz,** Hermann Amandus (1843-1921)

• *Derivada de Schwarz de una función f holomorfa en un abierto* D *de* C. — Si $f'$ no se anula sobre D, se llama derivada de Schwarz de $f$ sobre D a la función:

$$F = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Esta función F es invariante cuando se reemplaza $f$ por una función de la forma $g = \dfrac{af+b}{cf+d}$, donde $a$, $b$, $c$, $d$ verifican $ad - bc \neq 0$ y son tales que $g$ verifica sobre D las mismas hipótesis que $f$.

• *Desigualdad de Schwarz o de Cauchy-Schwarz.* — V. CAUCHY.

• *Lema de Schwartz.* — Sea $f$ una función holomorfa en el disco abierto $D = \{z \in C/|z| < 1\}$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| < 1$ para todo complejo $z \in D$. Entonces, $f$ es tal que $|f(z)| \leqslant |z|$ para todo $z \in D$. Si, además, tenemos la igualdad $|f(z_0)| = |z_0|$ para un complejo $z_0$ no nulo de D, entonces existe un complejo $\lambda$ de módulo 1 tal que $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in D$.

• *Teorema de Schwarz.* — Sea una función numérica $f$ definida sobre un abierto U de $\mathbf{R}^2$. Si las derivadas parciales $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$ existen en un entorno de un punto $a$ de U y son continuas en $a$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a).$$

Este teorema se generaliza a $\mathbf{R}^n$: si una función numérica $f$ definida sobre un abierto U de $\mathbf{R}^n$ es dos veces continuamente diferenciable en $a \in U$, entonces, para todo par $(i, j)$ de enteros comprendidos entre 1 y $n$ tenemos la igualdad:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

## Schwarziana

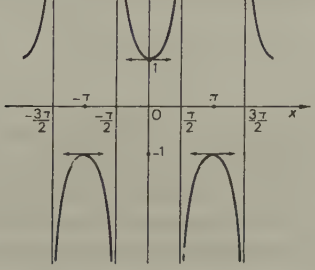
• *Derivada schwarziana.* — Derivada de Schwarz.

## sec

Abreviación utilizada para designar la función secante.

## Secante

Sean E una curva o una superficie y F una curva o una superficie. Se dice usualmente que el conjunto de puntos E es secante con el conjunto de puntos F si no son tangentes y si su intersección es no vacía.
V. SECANTE.




• *Función secante.* — Función trigonométrica, simbolizada por «sec», definida para

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}) \text{ por } \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

• *Recta se cante a una superficie.* — Recta que corta a la superficie en un punto M y que no es tangente a la superficie en M.

## Secantes

• *Circunferencias secantes.* — Dos circunferencias coplanarias son secantes si admiten dos puntos de intersección distintos.

• *Planos secantes.* — Dos planos son secantes si su intersección es una recta.

• *Rectas secantes.* — Dos rectas se denominan secantes si tienen un punto común y uno sólo.

## Sección

• *Sección en un conjunto ordenado.* — V. INICIAL, FINAL.

• *Sección de oro.* — V. ORO.

• *Sección plana de un volumen.* — Intersección de ese volumen con un plano. V. RECTA.

• *Sección de un volumen por una superficie.* — Intersección de ese volumen con la superficie.

## Secciones

V. CÓNICAS, PRINCIPALES.

## Sector

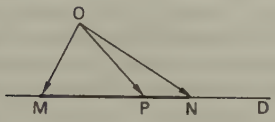
V. ANGULAR, CIRCULAR, ESFÉRICA.

## Segmento

En lenguaje usual, este término era, o es todavía, sinónimo de porción; de igual forma que un segmento de recta es una porción de recta, es decir, el conjunto de los puntos de una recta comprendidos entre dos puntos dados, se hablaba igualmente de segmento circular o segmento de círculo (porción de círculo comprendida entre un arco y la cuerda que lo define), o de segmento esférico (porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos).
V. CIRCULAR, ESFÉRICO.

• *Segmento de recta de extremos* M *y* N *en un espacio afín* $\mathcal{E}$ *de origen* O. — Conjunto de los baricentros de los puntos M y N afectados de coeficientes positivos o nulos. Es también el conjunto de los puntos P de $\mathcal{E}$ tales que

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OM} + (1 - t)\overrightarrow{ON}$ con $0 \leqslant t \leqslant 1$. En realidad, esta definición es independiente del origen O escogido. Se dice corrientemente que el segmento MN es el conjunto de los puntos de la recta (MN) comprendidos entre los dos puntos M y N.




• *Segmento de un espacio vectorial real.* — Sean $a$ y $b$ dos vectores de E, se llama segmento de extremos $a$ y $b$ la imagen del intervalo $[\![0, 1]\!]$ de $\mathbf{R}$ por la aplicación $t \mapsto ta + (1 - t)b$, de $\mathbf{R}$ en E.

• *Segmento de* $\mathbf{R}$. — Intervalo cerrado acotado de $\mathbf{R}$.

## Segmentos

V. ENCAJADOS.

## Sègre, Corrado (1863-1924)

• *Inmersión de Sègre de* $\mathbf{P}_n(\mathbf{K}) \times \mathbf{P}_m(\mathbf{K})$ *en* $\mathbf{P}_{mn+n+m}(\mathbf{K})$, *donde* $\mathbf{K}$ *es un cuerpo.* — Aplicación:

$$s : \mathbf{P}_n(\mathbf{K}) \times \mathbf{P}_m(\mathbf{K}) \mapsto \mathbf{P}_{mn+n+m}(\mathbf{K})$$

definida a partir de las coordenadas homogéneas por:

$$s((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_m)) = (x_0y_0, x_0y_1, \ldots, x_iy_j, \ldots, x_ny_m).$$

## Segunda

• *Derivada segunda.* — Derivada de orden 2.

• *Elemento simple de segunda especie.* — V. SIMPLES.

• *Función o integral euleriana de segunda especie.* — V. EULERIANA.

• *Punto de discontinuidad de segunda especie.* — V. DISCONTINUIDAD.

• *Punto de retroceso de segunda especie.* — V. RETROCESO.

• *Segunda forma cuadrática fundamental.* — V. FUNDAMENTALES.

## Segundo

• *Segundo círculo de Lemoine.* — V. LEMOINE.

• *Segundo cuartil.* — V. CUARTILES.

• *Segundo sexagesimal.* — V. SEXAGESIMAL.

• *Ecuación de segundo grado.* — Ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$ y $a \neq 0$. Si $a$, $b$, $c$ son números reales y si el número real $\Delta = b^2 - 4ac$, llamado discriminante de la ecuación, es positivo, la ecuación admite dos raíces reales distintas o confundidas, dadas por:

$$x_1 = \frac{-b\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

No se sirve uno nunca de la solución equivalente:

$$x_1 = \frac{2c}{-b + \sqrt{\Delta}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{2c}{-b - \sqrt{\Delta}}$$

si $\Delta$ es negativo, la ecuación no tiene raíces reales pero admite dos raíces imaginarias

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Si $a$, $b$, $c$ son complejos; la ecuación admite siempre dos raíces complejas. La ecuación general de segundo grado es resoluble por radicales (V. RESOLUBLE).

## Segura

• *Convergencia casi segura de una sucesión de variables aleatorias.* — Sean $(X_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias y X una variable aleatoria, todas definidas sobre el mismo espacio probabilizado $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Se dice que la sucesión $(X_n)_{n \geq 0}$ converge casi seguramente hacia X si la probabilidad de que $\lim_{n \to +\infty} X_n = X$ es igual a 1. Dicho de otra forma, la parte de $\Omega$ formada por los elementos $\omega \in \Omega$ tales que $\lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)$ tiene una probabilidad nula. La convergencia casi segura trae consigo la convergencia estocástica.

## Seguramente

• *Sucesión de variables aleatorias casi seguramente convergentes.* — V. SEGURA (Convergencia casi).

## Seguro

• *Suceso seguro de un espacio probabilizable* $(\Omega, \mathscr{A})$. — El suceso $\Omega$. Si el espacio está probabilizado su probabilidad es igual a 1.

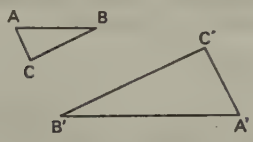
• *Suceso casi seguro de un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. — Suceso de probabilidad igual a 1. El suceso seguro es casi seguro, pero la recíproca no es cierta. Pueden existir sucesos distintos de $\Omega$ y de probabilidad igual a 1.

## Sellos de correos

• *Problema del doblado de los sellos de correos.* — Sea una tira de $n$ sellos de correos de espesor nulo, siendo la anchura la de un sello y haciéndose los pliegues sólo por la derecha (perforada) de separación de los sellos. El problema consiste en encontrar el número de pliegues posibles de la banda. Se puede generalizar en dos dimensiones con mapas de carreteras.

## Semejantes

• *Figuras semejantes.* — Figuras F y F′ del plano tales que existe una semejanza $s$ que verifica $s(F) = F'$. Dos triángulos de un mismo plano son semejantes si y solamente si sus ángulos tienen dos a dos igual medida.
V. SEMEJANZA (Caso de).




• *Matrices semejantes.* — Dos matrices cuadradas M y M′ de $M_n(K)$ son semejantes si existe una matriz cuadrada inversible $A \in M_n(K)$ tal que $M' = AMA^{-1}$.

## Semejanza

• *Semejanza afín de un espacio afín euclídeo $\mathscr{E}$ de dimensión n.* — Automorfismo afín cuya aplicación lineal asociada es una semejanza vectorial. La semejanza afín se denomina directa (resp. retrógrada o inversa) si la semejanza vectorial es directa (resp. retrógrada). Se puede definir una semejanza de $\mathscr{E}$ de tres maneras distintas equivalentes:

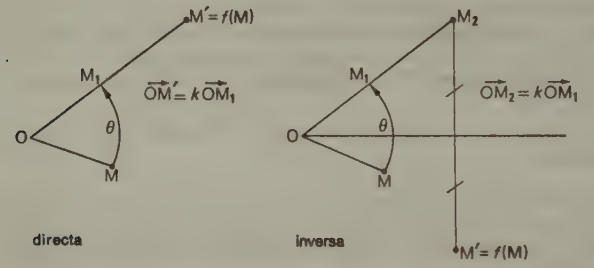
1) Es una aplicación $f$ no constante de $\mathscr{E}$ en $\mathscr{E}$ tal que existe un número real $k > 0$ que verifica $d[f(A), f(B)] = k \cdot d(A, B)$ para todo $(A, B) \in \mathscr{E}^2$.

2) Es una biyección de $\mathscr{E}$ sobre $\mathscr{E}$ tal que $AB \perp CD$ implica:

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} \perp \overrightarrow{f(C)f(D)} \text{ para todo } (A, B, C, D) \in \mathscr{E}^4.$$

3) Es una biyección de $\mathscr{E}$ sobre $\mathscr{E}$ tal que para toda hiperesfera S de $\mathscr{E}$ $f(S)$ sea una hiperesfera.

El conjunto Sem($\mathscr{E}$) de las semejanzas de $\mathscr{E}$ es un subgrupo del grupo afín GA($\mathscr{E}$). Una semejanza directa de $\mathbf{R}^2$ es, bien una traslación, bien el producto en un orden cualquiera de una rotación de centro O y de ángulo $\theta$ y de una homotecia de centro O y de razón $k > 0$; los elementos O, $\theta$, $k$ se llaman respectivamente centro, ángulo y razón de la semejanza. Una semejanza retrógrada de $\mathbf{R}^2$ es el producto de una semejanza directa y de una simetría ortogonal.




Una propiedad característica de una semejanza $f$ directa (resp. retrógrada) de $\mathbf{R}^2$ es verificar respecto a ángulos orientados la propiedad:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)})}$$

$$[\text{resp. } \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = -\widehat{(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)})}]$$

para todo triplete (A, B, C) de puntos distintos.
Si $\mathscr{E}$ es el plano complejo, una aplicación $f: \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ es una semejanza directa (resp. retrógrada) si para todo punto M de afijo $z$ el afijo de $f$(M) es de la forma $z' = az + b$ (resp. $z' = ai + b$), donde $a \in \mathbf{C}^*$ y $b \in \mathbf{C}$.
V. SEMEJANTES.

• *Semejanza en un conjunto* E. — Relación binaria sobre E que es reflexiva y simétrica (pero no necesariamente transitiva). Por ejemplo, la relación $\mathscr{R}$ definida sobre $(E) - \{\phi\}$ por $A \mathscr{R} B$ si y sólo si $A \cap B \neq \phi$.

• *Semejanza vectorial de un espacio vectorial euclídeo* E *de dimensión n.* — Un automorfismo $f$ de E se denomina semejanza vectorial si existe un número real $\alpha > 0$ tal que $||f(x)|| = \alpha||x||$ para todo $x \in E$. El conjunto de las semejanzas de E es un sub-grupo, simbolizado GO(E), del grupo lineal GL(E). Toda semejanza $f$ es de la forma $f = \sqrt{\alpha} \cdot g$, donde $g \in O(E)$. El número real $\sqrt{\alpha}$ es la razón de la semejanza. Cuando $f$ es un automorfismo directo, la semejanza $f$ se denomina directa y $g$ pertenece al grupo $O^+(E)$ de rotaciones. Cuando $f$ es un automorfismo retrógrado, la semejanza $f$ se denomina retrógrada o inversa y $g$ pertenece a $O^-(E) = O(E) - O^+(E)$.

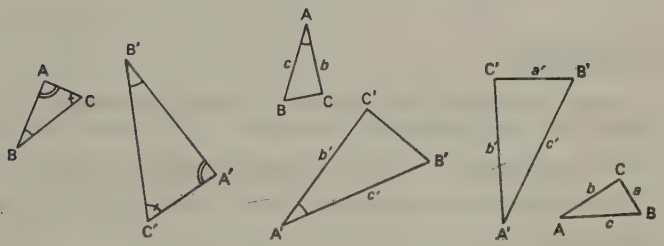
• *Casos de semejanza de triángulos.* — Nombre dado recientemente a tres con-

diciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean semejantes. Dos triángulos son semejantes si y solamente si:

1.er caso: los ángulos del uno tienen igual medida que los ángulos del otro.

2.º caso: dos lados del uno tienen longitudes proporcionales a las longitudes de los dos lados del otro y la medida del ángulo comprendido entre esos dos lados es la misma en cada triángulo.

3.er caso: los lados del uno tienen longitudes proporcionales a las longitudes de los lados del otro.




Primer caso $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$ Segundo caso $\begin{cases} \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases}$ Tercer caso $\left\{ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right.$

## Semi-abierto

• *Intervalo semi-abierto.* — Un intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha se llama también intervalo semi-abierto a izquierda (o intervalo semi-cerrado a derecha). Igualmente, un intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda también se llama semi-abierto a derecha (o semi-cerrado a izquierda).

## Semi-armónica

• *Serie semi-armónica.* — Serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Es convergente y converge hacia Log 2.

## Semi-continua

• *Aplicación semi-continua o continua a izquierda (resp. a derecha).* — Una aplicación $f$ definida sobre un intervalo $]a, x_0]$ (resp. $[x_0, b[$) de $\mathbf{R}$ es semi-continua a izquierda (resp. a derecha) en $x_0$ si $f$ admite un límite a izquierda (resp. a derecha) en $x_0$ igual a $f(x_0)$.

• *Función real semi-continua inferiormente (resp. superiormente).* — Noción introducida por René Baire.
V. INFERIORMENTE, SUPERIORMENTE.

## Semi-continuidad

Propiedad de ser semi-continua.
V. SEMI-CONTINUA.

## Semi-convergente

• *Integral generalizada semi-convergente.* — Integral generalizada que es convergente pero no absolutamente convergente.

• *Serie semi-convergente.* — Serie convergente de términos complejos o reales que no es absolutamente convergente; ejemplo: la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ llamada semiarmónica.

## Semi-cúbica

• *Parábola semi-cúbica.* — Evoluta de una parábola. Si la ecuación cartesiana de la parábola es $y^2 = 2px$, la ecuación cartesiana de la parábola semi-cúbica es $27py^2 - 8(x - p)^3 = 0$. Es una cúbica con punto de retroceso.

## Semi-cerrada

• *Intervalo semi-cerrado.* — V. SEMI-ABIERTO.

## Semi-distancia

• *Semi-distancia sobre un conjunto* E. — Aplicación $d$ de $E^2$ en $\mathbf{R}_+$ que verifica para todos los puntos $x$, $y$ y $z$ de E:

1) $d(x, y) = d(y, x)$;
2) $d(x, x) = 0$;
3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Contrariamente a una distancia, se puede tener $d(x, y) = 0$ con $x \neq y$.
V. DESVIACIÓN, SEMI-MÉTRICA.

## Semi-eje

- *Semi-eje focal.* — V. FOCAL.
- *Semi-eje no focal.* — V. FOCAL.

## Semi-eje mayor

- *Semi-eje mayor de una elipse.* — Sinónimo de semi-eje focal.
V. FOCAL.

## Semi-eje menor

- *Semi eje menor de una elipse.* — Sinónimo de semi-eje no focal.
V. FOCAL.

## Semi-espacio

Sea H un hiperplano de un espacio afín $\mathscr{E}$ asociado a un **R**-espacio vectorial E. Existe una forma lineal $f$ sobre E, un real $a$ y un punto O de $\mathscr{E}$ tales que H sea el conjunto de los puntos M que verifican $f(\overrightarrow{OM}) = a$. El conjunto $P_1$ de los puntos M de $\mathscr{E}$ tales que $f(\overrightarrow{OM}) \geqslant a$ (resp. $f(\overrightarrow{OM}) > a$ y el conjunto $P_2$ de los puntos M de $\mathscr{E}$ tales que $f(\overrightarrow{OM}) \leqslant a$ (resp. $f(\overrightarrow{OM}) < a$) son dos partes de $\mathscr{E}$ que admiten H como frontera común. Son denominados semi-espacios cerrados (resp. abiertos) de frontera H. Sean $a \in \mathbf{R}$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ números reales no todos nulos; el conjunto de los puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ tales que:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leqslant a \ (\text{o} \geqslant a;\ \text{o} < a;\ \text{o} > a)$$

es un semi-espacio cuya frontera es el hiperplano de ecuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = a.$$

Los semi-espacios de un plano afín son semi-planos. Los de una recta afín son semi-rectas.

## Semi-grado

- *Semi-grado del vértice de un grafo.* — V. EXTERIOR, INTERIOR.

## Semi-grupo

Sinónimo de monoide.

## Semi-lineal

• *Aplicación semi-lineal de un* K*-espacio vectorial* E *en un* K*-espacio vectorial* F *relativamente a un automorfismo* $\sigma$ de K. — Aplicación $f$ de E en F tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(\alpha \cdot x) = \sigma(\alpha) \cdot f(x)$ para todo par $(x, y) \in E^2$ y todo $\alpha \in K$. Si $\sigma$ es la identidad de K, entonces $f$ es lineal. Otro caso particular importante, aquél en que $K = C$ y en el que $\sigma$ es el automorfismo $z \mapsto \bar{z}$. V. NÚCLEO, RANGO.

• *Forma semi-lineal.* — Aplicación semi-lineal de un K-espacio vectorial E en K.

## Semi-lineales

• *Aplicaciones semi-lineales asociadas a una forma sesquilineal.* — Sean $E^*$ y $F^*$ los duales de dos espacios vectoriales E y F y $\varphi$ una forma sesquilineal sobre $E \times F$ relativamente a un automorfismo $\sigma$ de K. Se llaman aplicaciones semi-lineales asociadas a $\varphi$ a las aplicaciones semi-lineales $\varphi_g$ de E en $F^*$ y $\varphi_d$ de F en $E^*$ definidas por:

$$\varphi_g(x): y \mapsto \sigma(\varphi(x, y)) \quad \text{y} \quad \varphi_d(x): y \mapsto \varphi(y, x).$$

En el caso en que $E = F$ y en que $\varphi$ es hermitiano, la aplicación $\varphi_d$ es igual a $\varphi_g$ y se denomina aplicación semilineal asociada a $f$.

## Semi-métrico

• *Espacio semi-métrico.* — Un conjunto E se denomina semi-métrico si existe una familia $(d_i)_{i \in I}$ de semi-distancias sobre E tal que, para toda parte finita J de I, existe $k \in I$ que verifica $d_k \geqslant d_j$ para todo $j \in J$.

## Semi-norma

• *Semi-norma sobre un espacio vectorial* E. — Aplicación $p$ de E en $\mathbf{R}_+$ tal que para todo escalar $\alpha$ y todo par $(x, y) \in E^2$ tengamos $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ y $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$. Ejemplo: la aplicación $p: E \mapsto \mathbf{R}_+$ definida por $p(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$, donde $\varphi$ es el producto escalar sobre un espacio prehilbertiano E. La aplicación $d: E^2 \mapsto \mathbf{R}_+$ definida por $d(x, y) = p(x - y)$ es una semi-distancia sobre E.

Una semi-norma $p$ es una norma si y solamente si $p(x) = 0$ equivale a $x = 0$. V. CUADRÁTICA (Convergencia en media), MEDIA (Convergencia en).

## Semi-plano

• *Semi-plano de un plano afín real.* — Semi-espacio de ese plano. Sean $a$, $b$, $c$, reales, $(a, b) \neq (0, 0)$; el conjunto $P_1$ de los puntos $(x, y)$ tales que $ax + by \geqslant c$ (resp. $ax + by > c$) y el conjunto $P_2$ de los puntos $(x, y)$ tales que $ax + by \leqslant c$ (resp. $ax + by < c$) son semiplanos cerrados (resp. abiertos) de $\mathbf{R}^2$ cuya frontera es la recta de ecuación $ax + by = c$.

• *Semiplano de Poincaré.* — V. POINCARÉ.

## Semi-polares

• *Coordenadas semipolares.* — Sinónimo de coordenadas cilíndricas.

## Semi-recta

• *Semi-recta de un espacio afín real* $\mathscr{E}$. — Sean O un punto de $\mathscr{E}$ y $\vec{u}$ un vector no nulo del espacio vectorial E asociado a $\mathscr{E}$. El conjunto de los puntos M tales que $\overrightarrow{OM} = \alpha \cdot \vec{u}$, con $\alpha$ número real *positivo*, se denomina semirrecta de origen O y de vector director $\vec{u}$. Si $\mathscr{E}$ es una recta afín, una semirrecta de origen O es un semi-espacio de frontera O.
V. OPUESTAS.

• *Semirrecta vectorial de un espacio vectorial real.* — V. VECTORIAL.

## Semi-regular

• *Poliedro semi-regular.* — Poliedro cuyo grupo de isometrías dejándole invariante opera transitivamente sobre sus vértices. Existen 13, más los 5 poliedros regulares, más dos sucesiones infinitas de poliedros que se obtienen al considerar un polígono regular P de $n$ lados, su imagen P′ por una traslación de vector $\vec{V}$ ortogonal a P (resp. un atornillamiento de vector $\vec{V}$ y de ángulo $\pi(n)$) y uniendo sus vértices al formar unos rectángulos (resp. de los triángulos isósceles) isométricos (V. CUASI REGULAR).

## Semi-retículo

V. INFERIOR, SUPERIOR.

## Semi-tangente

• *Semi-tangente a una parte* E *de un espacio afín euclídeo en un punto de acumulación* A *de* E. — Semirrecta AT tal que existe una sucesión de puntos $M_i$ de E que tiende hacia A de manera que la sucesión de medidas del ángulo

$\widehat{M_1AT}$ tiende hacia cero. En el caso en que E sea una curva que admita en A una tangente, la curva E admite dos semi-tangentes $AT_1$ y $AT_2$ que tienen como soporte la recta tangente. Una curva puede admitir en un punto una o dos semi-tangentes sin admitir una tangente. En el caso en que E sea una superficie que admita en A un plano tangente, ese plano tangente es el conjunto de las semi-tangentes en A con E. Una superficie puede admitir en un punto semi-tangentes sin admitir un plano tangente.
V. ANGULOSO, CONTINGENTE, PARATINGENTE.

## sen

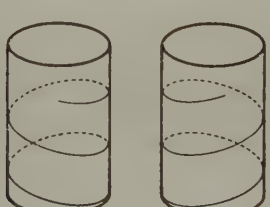
Abreviación de seno.

## $\text{sen}^{-1}$

Notación que en informática designa la función Arcseno.

## Senestrorsum

De la derecha hacia la izquierda.
Se dice de una hélice circular si un observador supuesto colocado en el interior del cilindro paralelamente al eje la ve ante él «subir» de la derecha hacia la izquierda. En el vértice de una rosca de tornillo es, en general, una hélice cuya sentido es senestrorsum.
V. DEXTRORSUM.



Dextrorsum Senestrorsum

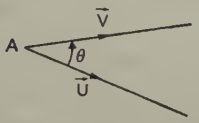
## Seno

• *Seno de un ángulo $\theta$ de un plano vectorial euclídeo orientado.* — Sea R la rotación de ángulo $\theta$. En relación a una base ortonormada directa, la matriz de R es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + b^2 = 1$. El número real, independien-

temente de la elección de la base ortonormada directa, se llama seno del ángulo $\theta$ y se representa por Sen $\theta$. Cuando se cambia la orientación del plano, el seno de $\theta$ se cambia en su opuesto. Si $\theta$ representa a un ángulo de semirectas del espacio euclídeo orientado $\mathbf{R}^3$, tenemos:

$$|\operatorname{Sen}\theta| = \frac{\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\|},$$

donde $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son vectores directores de las semi-rectas. Si la medida en radianes de $\theta$ es $x$, entonces $\operatorname{Sen}\theta = \operatorname{sen} x$, donde $\operatorname{sen} x$ designa la imagen de $x$ por la función seno. V. COSENO, RECTÁNGULO (Triángulo).



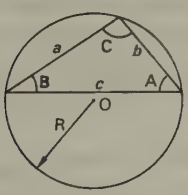

• *Seno integral.* — V. INTEGRAL.

• *Función seno.* — Función de **R** en **R** simbolizada por sen y definida por $\operatorname{sen} x = \operatorname{Im}(e^{ix})$. También es la restricción en **R** de la función seno complejo. Su representación gráfica es una sinusoide. V. COSENO (Función), DESARROLLO (en serie entera).

• *Función seno complejo.* — V. COMPLEJOS (Funciones trigonométricas).

• *Función seno hiperbólico.* — V. HIPERBÓLICO.

• *Leyes de los senos.* — Si R es el radio del círculo circunscrito a un triángulo de lados *a*, *b* y *c* y de ángulos A, B y C, entonces:




$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R.$$

## Sentido

No debe confundirse con dirección.

• *Base de sentido directo de un espacio vectorial orientado* E. — Base directa de E. V. ORIENTACIÓN.

• *Base de sentido retrógrado de un espacio vectorial orientado* E. — Base retrógrada de E.
V. ORIENTACIÓN.

• *Bases de igual sentido (resp. de sentido contrario) de un espacio vectorial* E. — Dos bases B y B′ se denominan de igual sentido (resp. de sentido contra-

rio) si el determinante de la matriz de paso de B a B′ es positivo (resp. negativo).
V. NEGATIVO, POSITIVO.
• *Sentido geométrico.* — V. TRICONOMÉTRICO.

## Señal

Noción de base en informática. Una señal es el soporte material o abstracto de una información elemental.

• *Teoría de la señal.* — Expresión tomada a veces como sinónimo de: «Teoría matemática de la información».
V. BIT, INFORMACIÓN.

## Separable

• *Espacio separable.* — Espacio métrico que posee una parte densa numerable; ejemplo: **R** provisto de la distancia usual $d(x, y) = |y - x|$.

## Separación

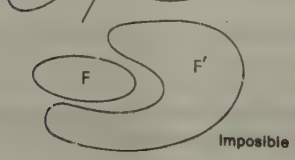
• *Separación de una raíz* $x_0 \in I$ *de una ecuación* $f(x) = 0$, *donde* $f$ *es una función real continua sobre un intervalo* I *de* **R** *en* **R**. — Determinación de un intervalo $[\![a, b]\!] \subset I$ que contiene únicamente la raíz $x_0$.

• *Axiomas de separación.* — V. ACCESIBLE [$T_1$], FRÉCHET [$T_1$], HAUSDORFF [$T_2$], KOLMOGOROV [$T_0$], NORMAL [$T_4$], REGULAR [$T_3$], URYSOHN.

El estudio de espacios topológicos cada vez más diversos: **R**, $\mathbf{R}^n$ espacios funcionales, espectros de anillos, etc., ha conducido a diferenciar las nociones de separación. La más importante es la de separación en el sentido de Hausdorff: se pueden separar dos puntos por dos entornos. Según los casos, se debilita esta noción (espacio accesible y espacios de Kolmogorov) separando dos puntos por un entorno del uno o (rep. y) del otro o por el contrario se la refuerza (espacios normales y espacios regulares) separando un punto y un cerrado, o dos cerrados, por entornos. Con la terminología aquí utilizada, tenemos la cadena de implicaciones:

$$\text{normal} \Rightarrow \text{regular} \Rightarrow \text{Hausdorff} \Rightarrow \text{accesible} \Rightarrow \text{Kolmogorov}.$$

• *Teoremas de separación.* — Los teoremas de separación dan condiciones para que dos conjuntos convexos disjuntos puedan ser separados por un hiperplano.



Ejemplos:

1) Sean F una parte cerrada convexa de $\mathbf{R}^n$ y P un punto de $\mathbf{R}^n$ que no pertenece a F; existe un hiperplano H que contiene a P y tal que F esté contenido en uno de los semi-espacios abiertos determinados por H.

2) Sean dos partes convexas disjuntas F y F' de un espacio vectorial normado E. Si F y F' son las dos cerradas, siendo una compacta, o bien si F y F' son las dos abiertas, entonces existe un hiperplano afín cerrado H de E que separa estrictamente F y F'.

V. HAHN-BANACH (Teorema de).

## Separada

• *Topología separada.* — Topología de un espacio de Hausdorff.

## Separadas

• *Ecuación diferencial de variables separadas.* — Ecuación diferencial de la forma $g(y) \cdot y' = f(x)$. Su solución general viene dada por:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C.$$

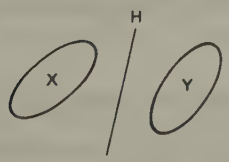
## Separado

• *Espacio prehilbertiano separado real (resp. complejo).* — Espacio prehilbertiano cuya forma bilineal simétrica (resp. sesquilineal hermitiana) es definida positiva. Por tanto, es un espacio euclídeo (resp. hermitiano).

• *Espacio separado.* — Cuando se habla de espacio separado sin otra precisión, se trata siempre de espacio separado en el sentido de Hausdorff. Para las diferentes nociones de separación: V. SEPARACIÓN (Axiomas de).

## Separados

• *Conjuntos separados por un hiperplano.* — Sea E un espacio vectorial o un espacio afín y sean X e Y dos partes de E. Se dice que los conjuntos X e Y están separados por un hiperplano H de E si X e Y están respectivamente en uno y en otro de los dos semi-espacios de frontera H.



• *Puntos separados por un conjunto de funciones.* — Dados dos conjuntos E y F, los puntos de E se denominan separados por un conjunto A de funciones de E en F si para todo par $(x, y)$ de puntos distintos de E existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

• *Puntos separados por una parte de un espacio métrico.* — Dos puntos $x$ e $y$ de un espacio métrico E se denominan separados por una parte A de E si $x$ e $y$ no pertenecen a A y si las componentes conexas de $x$ e $y$ en E-A son distintos.

## Séptico

Curva algebraica plana de orden 7.

## Serie

Generalización de la noción de suma (de un número finito de términos). Antiguamente, la palabra serie se empleaba como sinónimo de «suite» [sucesión] pero ese empleo ha caído en desuso.

• *Serie en un espacio vectorial normado* E. — Par $((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (S_n)_{n\in\mathbf{N}})$ constituido de una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de elementos de E y de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$, donde $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$. La serie $((u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (S_n)_{n\in\mathbf{N}})$ se representa a menudo $\sum_{n\geq 0} u_n$. Se lee «serie de término general $u_n$» y $S_n$ se denomina la suma parcial de orden $n$ de la serie. El estudio de una serie de término general $u_n$ es por definición el estudio de la sucesión de término general $S_n$. Cuando $E = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, la serie se denomina numérica (por ejemplo, las series de Riemann) y cuando E es un espacio vectorial de funciones, se llama serie de funciones (por ejemplo, las series trigonométricas).
V. Abel (Criterios, Lema), Alembert (Regla de D'), Alternada, Armónica, Binomio, Cauchy (Criterios, producto de), Césaro, Convergencia, Convergente, Dirichlet, Divergente, Entera, Euler (Transformación de), Fourier, Geométrica, Hipergeométrica, Laurent, Mac Laurin, Producto, Raabe-Darboux-Duhamel (Regla de), Renard, Restó, Riemann, Semi-armónica, Semi-convergente, Suma, Taylor, Trigonométrica.

• *Desarrollo en serie entera.* — V. Desarrollo.

• *Serie estadística.* — V. Estadística.

## Serpentina

Nombre que también se da a la Anguinea, también llamada cúbica serpentina.

## Serret, Joseph Alfred (1819-1885)

• *Triedro de Serret-Frenet.* — Triedro llamado frecuentemente triedro de Frenet.
V. Frenet.

## Sesgado

• *Estimador sesgado.* — Estimador mal centrado.
V. CENTRADO.

## Sesgo

• *Estimador con (resp. sin)* sesgo. — Estimador mal (resp. bien) centrado.
V. CENTRADO.

## Sesquilineal

• *Aplicación semi-lineal asociada a una forma sesquilineal.* — V. SEMI-LINEALES.

• *Automorfismo de una forma sesquilineal.* — V. AUTOMORFISMO.

• *Forma sesquilineal.* — Dados dos K-espacios vectoriales E y F, se llama forma sesquilineal sobre $E \times F$ relativa a un automorfismo involutivo $\sigma$ de K a una aplicación $\varphi$ de $E \times F$ en K tal que, para todo $(x_0, y_0) \in E \times F$, las aplicaciones $x \mapsto \varphi(x, y_0)$ de E en K e $y \mapsto \sigma[\varphi(x_0, y)]$ de F en K sean lineales. Cuando $\sigma = \mathrm{id}_K$, entonces $\varphi$ es una forma bilineal y si $K = C$ con $\sigma(z) = \bar{z}$, la forma sesquilineal $\varphi$ se denomina compleja. Si $E = F$, también se dice que $\varphi$ es una forma sesquilineal sobre E.
V. ADJUNTA, ANTIAUTO-ADJUNTA, ANTIHERMITIANA, AUTOADJUNTA, DEGENERADA, HERMITIANA.

• *Matriz asociada a una forma sesquilineal.* — V. MATRIZ.

## Sexagesimal

• *Grado sexagesimal.* — Unidad de medida de los ángulos y de los arcos de círculos tal que un ángulo llano o un semi-círculo mida 180 grados (se representa por 180°).
V. MEDIDA.

• *Minuto sexagesimal.* — Unidad igual a 1/60 de grado. Un grado vale, por tanto, 60 minutos ($1° = 60'$).

• *Segundo sexagesimal.* — Unidad igual a 1/60 de minuto sexagesimal. Un minuto vale, pues, 60 segundos; un grado vale 3.600 segundos ($1' = 60''$; $1° = 3.600''$).

• *Sistema sexagesimal.* — Sistema de numeración de posición con base sesenta. Se utiliza, por ejemplo, para la medida de los ángulos y de los arcos.
V. SEXAGESIMAL (Grado), SEXAGESIMAL (Minuto, segundo).

## Séxtica

Curva algebraica de orden 6. Ejemplos: la nefroide o la astroide.

## Sextillón

V. DECIMAL (Sistema).

## sh

Abreviación de seno hiperbólico.

## Sheffer, H. M. (1883-1964)

• *Símbolo o barra de Sheffer.* — Conector simbolizado por | también llamado «NO Y», «negación alternada», «incompatibilidad» o «NAND» y definido por $A|B = \neg(A \wedge B)$. Todo conector puede ser definido a partir de la negación alternada, puesto que $\neg A = A|A$ y $A \wedge B = (A|B)|(A|B)$.
V. PEIRCE.

| A | B | A \| B |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | V |

■

## Sheppard, William Fleetwood (1863-1936)

• *Corrección de Sheppard.* — Para calcular la varianza V de un carácter cuantitativo continuo X cuyos valores tomados están reagrupados en clases de igual amplitud $l$, se utilizan a menudo los centros de las clases en lugar de los valores realmente tomados por X. La varianza V' hallada de este modo debe ser corregida; Sheppard propuso tomar como valor de V el número real $V' - l^2/12$.

## SI

Cuando el enunciado $P \Rightarrow Q$ es verdadero, se dice a menudo «si P es verdadero, entonces Q es verdadero».

## Sicigias

De una palabra griega que significa «reunión».
En astronomía, una sicigia es una conjunción u oposición de la Luna (y por extensión de un planeta) con el Sol en relación a la Tierra.

• *Teorema de las sicigias de Hilbert.* — Uno de sus casos particulares precisa el comportamiento de las cadenas de ideales primos en el anillo $K[X_1, ..., X_n]$, donde K es un cuerpo; si $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset ... \subset \mathfrak{P}_m$ es una cadena estrictamente creciente para la inclusión, entonces $m \leqslant n$. Este teorema, que fue

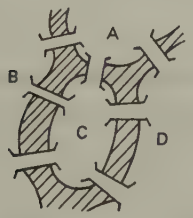
uno de los resultados fundamentales de la teoría de los invariantes, forma parte en la actualidad del álgebra homológica. La expresión «sicigias», debida a Sylvester, designaba ciertos polinomios de coeficientes complejos.
V. INVARIANTES (Teoría de los).

## Sierpinski, Waclaw (1882-1969)

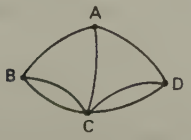
• *Problema de Sierpinski.* — La ecuación $(x + y + z)^3 = xyz$ ¿tiene una solución entera? En 1960, Sierpinski enumeró más de una cuarentena de problemas de este género.

## Siete

• *Problema de los siete puentes de Koenigsberg.* — La ciudad de Koenigsberg (Kaliningrado en la actualidad), atravesada por el río Prégel, poseía siete puentes dispuestos como indica el esquema dibujado a continuación. Euler resolvió por la negativa el problema siguiente: un peatón, paseando, puede atravesar




cada puente una vez y una sola. Este problema está considerado hoy como uno de los antepasados de la topología y de la teoría de los grafos; en términos de esta teoría, equivale a probar que el grafo planario que a continuación se representa asociado al esquema precedente no es euleriano. Los habitantes de Kaliningrado han transformado materialmente el problema: ¡han construido un octavo puente!
V. EULER (Teoremas de).




## Sigma (σ)

Letra griega representada por $\sigma$ en minúscula y $\Sigma$ en mayúscula.
V. SUMA.

## σ-aditiva

• *Aplicación σ-aditiva sobre una tribu $\mathscr{B}$ de un conjunto* E. — Una aplicación $\mu$ de $\mathscr{B}$ en $\overline{\mathbf{R}}$ se llama σ-aditiva si para toda sucesión $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de elementos de $\mathscr{B}$, disjuntos dos a dos, la familia $(\mu(A_n))_{n\geqslant 0}$ es sumable y verifica:

$$\sum_{n\geqslant 0} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right).$$

## σ-aditividad

• *Axioma de σ-aditividad.* — Axioma de aditividad completa.
V. KOLMOGOROV (Axiomas de).

## σ-álgebra

• *σ-álgebra de partes de* E. — σ-anillo de partes de E que contiene E.
V. TRIBU.

## σ-anillo

• *σ-anillo de partes de* E. — Un anillo $\mathscr{B}$ de partes de E se denomina un σ-anillo si, para toda sucesión $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de elementos de $\mathscr{B}$, la parte $\bigcup_{n\geqslant 0} A_n$ es un elemento de $\mathscr{B}$.

## Signatura

• *Signatura de una forma cuadrática.* — V. SYLVESTER.

• *Signatura de una permutación de* $S_n$. — Número de sus inversiones.

## Signo

• *Signo de pertenencia.* — V. PERTENENCIA.

• *Signo de un lenguaje.* — V. LENGUAJE.

• *Signo menos.* — V. MENOS.

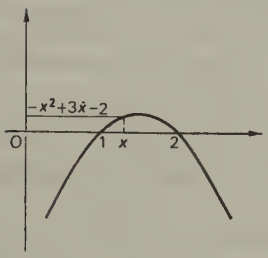
• *Signo más.* — V. MÁS.

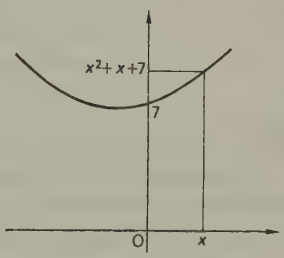
• *Signo de un número real a.* — Si *a* es positivo (resp. negativo), se dice a veces «que es de signo +» (resp. de signo −) aunque esta expresión no tenga ningún sentido operatorio.

• *Signo suma.* — V. SUMA.

• *Signo del trinomio* $ax^2 + bx + c$, *donde* $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ *y* $a \neq 0$. — Signo del

número real $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es positivo, entonces $f(x)$ tiene el signo de $-a$ si y solamente si $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, donde $x_1$ y $x_2$ son las raíces del trinomio. Si el discriminante es estrictamente negativo, entonces $f(x)$ tiene el signo de $a$ cualquiera que sea el número real $x$. Por ejemplo, el trinomio $-x^2 + 3x - 2$ que admite dos raíces 1 y 2 es positivo para $x \in [\![1, 2]\!]$ y estrictamente negativo para $x \notin [\![1, 2]\!]$; el trinomio $x^2 + x + 7$ que no tiene raíz es siempre positivo.




• *Variación de signo de un polinomio.* — V. VARIACIÓN.

## Signos

• *Signos de cuantificación.* — V. CUANTIFICACIÓN.

• *Reglas de los signos.* — Nombre dado a ciertas relaciones entre la adición, la sustracción y la multiplicación en un anillo conmutativo unitario. Pueden remitirse a las cuatro condiciones siguientes:

$$(+1) \cdot (+1) = (+1)$$
$$(+1) \cdot (-1) = (-1)$$
$$(-1) \cdot (-1) = (+1)$$
$$(-1) \cdot (+1) = (-1)$$

A veces se enuncian mediante frases como «menos por menos, más», etc.

## Siguiente

• *Siguiente de un entero a.* — Sinónimo de sucesor.

## sii

Abreviación empleada a veces, pero poco recomendable en una buena redacción, de «si y solamente si». Es el equivalente de *iff* en inglés.

## Silogismo

Término y noción fundamental de la lógica formal clásica. Conjunto de tres

proposiciones: dos premisas (la mayor y la menor) y una conclusión, tal que la conclusión se deduzca del acercamiento de la mayor y de la menor. Modelo, según Aristóteles, en la Lógica formal clásica, de todo razonamiento deductivo, el silogismo y el conjunto de sus transformaciones (la silogística) ha sido transcrito por Lukasiewicz a la Lógica matemática.
V. MODUS PONENS.

## Silla

• *Punto de silla de una superficie.* — Puerto de esa superficie.

## Símbolo

V. CHRISTOFFEL, CUANTIFICACIÓN, KRONECKER, LEGENDRE, PEIRCE, SHEFFER, SUMA, SUSTITUCIÓN.

• *Símbolo de un lenguaje.* — V. LENGUAJE.

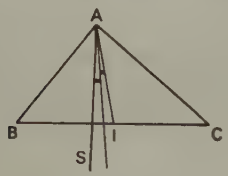
• *Símbolo existencial.* — V. PREDICADOS.

• *Símbolo mutificante.* — V. MUTIFICADOR.

• *Símbolo universal.* — V. PREDICADOS.

## Simediana

• *Simediana en un triángulo.* — Ceviana S simétrica de una mediana en relación a la bisectriz interior trazada desde el mismo vértice (V. SIMEDIANO).




## Simediano

• *Punto simediano de un triángulo.* — Otro nombre que se da al punto de Lemoine que está en la intersección de las simedianas del triángulo.

## Simetría

• *Simetría de una relación.* — Propiedad de una relación de ser simétrica.

• *Simetría afín en un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Aplicación afín $f$ involutiva. La aplicación lineal asociada a $f$ es una simetría vectorial del espacio vectorial asociado

a $\mathscr{E}$. Una simetría tiene necesariamente puntos invariantes cuyo conjunto es una variedad lineal afín V de $\mathscr{E}$. Se diferencian las simetrías según la dimensión de V.

• *Simetría vectorial en un espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Endomorfismo involutivo $f$ de E. El conjunto F de los vectores invariantes de E y el conjunto G de los vectores $x$ de E tales que $f(x) = -x$ constituyen dos subespacios vectoriales suplementarios de E. Todo vector $u$ de E se escribe, por tanto, de una manera única $u = x + y$ con $x \in F$ e $y \in G$ y tiene para imagen por la simetría $f$ el vector $x - y$. Se dice que $f$ es la simetría de dirección G en relación a F.

• *Simetría en relación a una recta* D. — Simetría cuyo conjunto de puntos invariantes es la recta D. Cuando en un espacio euclídeo se habla de la simetría en relación a D, se trata de la simetría ortogonal, que está enteramente determinada por la recta D denominada eje de la simetría.

• *Simetría en relación a un plano* P. — Simetría cuyo conjunto de puntos invariantes es el plano P. Cuando en un espacio euclídeo se habla de la simetría en relación a P, se trata de la simetría ortogonal, que está enteramente determinada por el conjunto P de sus puntos invariantes.

• *Simetría en relación a un punto* O. — Simetría de un espacio afín $\mathscr{E}$ cuyo conjunto de puntos invariantes es el singleton {O}. La imagen de M es el punto M′ tal que O sea el punto medio de MM′. Si $\mathscr{E}$ es euclídeo es una isometría.

• *Simetría axial.* — Simetría ortogonal en relación a una recta.

• *Simetría central.* — Simetría en relación a un punto.

• *Simetría oblicua.* — V. OBLICUA.

• *Simetría ortogonal.* — V. ORTOGONAL.

• *Centro de simetría de una figura* F *de* $\mathbf{R}^3$. — Punto O de $\mathbf{R}^3$ tal que F sea globalmente invariante por la simetría en relación a O.

• *Eje de simetría de una figura* F *de* $\mathbf{R}^2$ (*o* $\mathbf{R}^3$). — Recta D de $\mathbf{R}^2$ (o $\mathbf{R}^3$) tal que F sea globalmente invariante por la simetría ortogonal en relación a D.

• *Plano de simetría de una figura* F *de* $\mathbf{R}^3$. — Plano P de $\mathbf{R}^3$ tal que F sea globalmente invariante por la simetría ortogonal en relación a P.
V. ASIMETRÍA, DISIMETRÍA.

## Simétrica

• *Simétrica de un elemento.* — Simétrica a izquierda y a derecha de ese elemento.

• *Simétrica a izquierda (resp. a derecha) de un elemento* $x$ *de un magma* (E, $*$) *que posee un elemento neutro* $e$. — Elemento $y$ de E tal que $y * x = e$ (resp. $x * y = e$).

• *Aplicación simétrica.* — Sean dos conjuntos E y F. Una aplicación $f$ de

$E^n (n \geq 2)$ en F se denomina simétrica si para toda permutación $\sigma \in S_n$ y para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ verifica:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

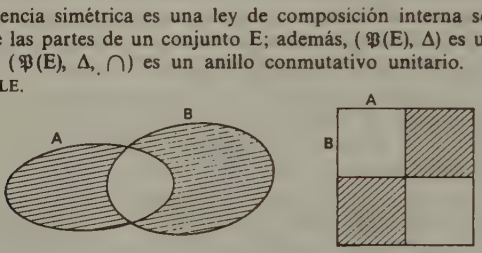
En particular, para $n = 2$, la aplicación $f$ es simétrica si $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ para todo $(x_1, x_2) \in E^2$.

• *Aplicación lineal asociada a una forma bilineal simétrica.* — V. LINEALES.

• *Diferencia simétrica de dos conjuntos* A *y* B. — Conjunto representado por $A \Delta B$ de los elementos que pertenecen, bien a A, bien a B, pero no a su intersección. Tenemos:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

La diferencia simétrica es una ley de composición interna sobre el conjunto $\mathfrak{P}(E)$ de las partes de un conjunto E; además, $(\mathfrak{P}(E), \Delta)$ es un grupo conmutativo y $(\mathfrak{P}(E), \Delta, \cap)$ es un anillo conmutativo unitario.
V. BOOLE.




Rayado: $A \Delta B$

• *Endomorfismo simétrico de un espacio vectorial* E *relativamente a una forma bilineal simétrica* $\varphi$ *sobre* E. — Endomorfismo $u$ igual a su adjunto, es decir, tal que $\varphi(x, u(y)) = \varphi(u(x), y)$, cualquiera que sea $(x, y) \in E^2$.

• *Figura simétrica de* $\mathbf{R}^3$. — Figura globalmente invariante por una simetría ortogonal $f$ de $\mathbf{R}^3$. Si $f$ es una simetría en relación a un punto (resp. en relación a una recta o en relación a un plano), la figura se denomina simétrica en relación a ese punto (resp. a esa recta o a ese plano).

• *Forma bilineal simétrica sobre un* K*-espacio vectorial* E. — Forma bilineal sobre $E \times E$ tal que, para todo par $(x, y) \in E \times E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
V. DEFINIDA, INDEFINIDA, NEGATIVA, NÚCLEO, POSITIVA, RANGO.

• *Forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica.* — V. CUADRÁTICA.

• 1*-grafo simétrico.* — Un 1-grafo (S, U) es simétrico si $(x, y) \in U$ implica $(y, x) \in U$.

• *Grupo simétrico de un conjunto* E. — Grupo S(E) constituido por el conjunto de las permutaciones de E provisto de la ley de composición de las aplicaciones. También se simboliza por $S_n$ cuando $E = \{1, 2, ..., n\}$. El grupo $S_n$ es de orden $n!$

• *Matriz simétrica.* — Matriz cuadrada igual a su transpuesta. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si E es un K-espacio vectorial de dimensión finita, la matriz de una forma bilineal simétrica sobre E en relación a una base B de E es simétrica.

• *Polinomio simétrico en n* ($n \geqslant 2$) *indeterminadas* $X_1, X_2, ..., X_n$. — Polinomio $P(X_1, X_2, ..., X_n)$ tal que, para toda permutación $\sigma \in S_n$, tengamos:

$$P(X_1, X_2, ..., X_n) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, ..., X_{\sigma(n)})$$

• *Relación simétrica.* — Relación binaria $\mathcal{R}$ sobre un conjunto E tal que $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$ para todo par $(x, y)$ de $E^2$. La relación de paralelismo en el conjunto de las rectas del plano es simétrica.

## Simétricas

• *Figuras simétricas.* — Dos figuras F y F' de $\mathbf{R}^3$ son simétricas en relación a un punto O (resp. en relación a una recta o a un plano) si existe una simetría ortogonal S en relación a ese punto (resp. en relación a esa recta o a ese plano) tal que $F' = S(F)$.

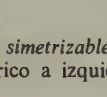
• *Funciones simétricas elementales.* — V. ELEMENTALES.

## Simetrizable

• *Elemento de un magma* (E, $*$) *simetrizable a izquierda (resp. a derecha).* — Elemento que admite un simétrico a izquierda (resp. a derecha).

## Simetrización

• *Simetrización de un monoide conmutativo unitario* (M, $*$) *cuyos elementos todos son simplificables.* — Construcción de un par (G, $\varphi$), donde G es un grupo conmutativo y $\varphi: M \to G$ un homomorfismo inyectivo de monoides, tal que, si $(G', \varphi')$ es otro par análogo, existe un único homomorfismo del grupo $\sigma: G \to G'$ que verifica $\varphi' = \sigma \circ \varphi$.




Este problema universal admite una solución canónica: se pone $G = (M \times M)/R$, donde R es la equivalencia definida por $(x, y)\ R\ (x', y')$ si y solamente si $x * y' = x' * y$; la ley $\circledast$ de G es definida por:

$$(x, y) \circledast (x', y') = (x * x', y * y') \text{ y } \varphi: M \to G$$

es definida por $\varphi(x) = (x, e)$, donde $e$ es el elemento neutro de M. Se construye Z [resp. $(\mathbf{Q}_+^*, .)$] por simetrización del monoide $(\mathbf{N}, +)$ [resp. $(\mathbf{N}^*, .)$].

• *Simetrización de Steiner.* — V. STEINER.

## Simetrizado

• *Simetrizado de un compacto.* — V. STEINER (Simetrización de).

• *Grupo simetrizado de un monoide conmutativo unitario.* — Grupo G obtenido por simetrización del monoide. El grupo aditivo Z es el simetrizado del monoide aditivo N.
V. SIMETRIZACIÓN.

## Simple

Utilizado según los casos por oposición a uniforme (convergencia, continuidad) o por oposición a múltiple (integral, raíz...).

• *Arco de curva simple.* — Arco de Jordan.

• *Cadena (resp. camino) simple.* — Cadena (resp. camino) que no utiliza dos veces el mismo arco.

• *Continuidad simple de una aplicación.* — V. CONTINUA (Simplemente).

• *Convergencia simple de una serie de funciones.* — Sinónimo de convergencia simple de la sucesión de sus sumas parciales.

• *Convergencia simple de una sucesión de funciones.* — Una sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ de funciones de un conjunto E de valores en un espacio métrico F converge simplemente hacia una función $f: E \to F$ si, para todo $x \in E$, la sucesión $(f_n(x))_{n\geq 0}$ converge hacia $f(x)$ en F. La sucesión $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplemente hacia $f$ si y solamente si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge hacia $f$ en el espacio $F^E$ provisto de la topología de la convergencia simple.

• *Curva cerrada simple.* — Curva de Jordan.

• *Elemento simple de primera o de segunda especie.* — V. SIMPLES.

• *Grafo simple.* — Multigrafo (S, E) sin trazos tal que, para dos vértices $x$ e $y$ cualesquiera, existe como máximo una arista que admita $x$ e $y$ como extremos. En este caso, E es identificable a una parte del conjunto $\mathfrak{P}_2(S)$ de pares de elementos de S.

• *Grupo simple.* — Grupo G del que los únicos grupos distinguidos son G y {1}. Ejemplos: $A_n$ para $n \geq 5$, los grupos finitos de orden primo y $PSL_n(K)$ con excepción de $PSL_2(F_2)$ y de $PSL_2(F_3)$. Existe un grupo simple infinito engendrado por cuatro elementos.
La determinación (clasificación) de los grupos simples es objeto de numerosos trabajos en la hora actual (V. FEIT) (Teorema de Feit-Thomson), en particular el estudio de los grupos esporádicos. Todos los grupos simples de orden $\leq 20.000$ son conocidos.
V. ESPORÁDICOS, MATHIEU.

• *Módulo simple.* — Módulo no nulo M del que los únicos submódulos son M y {0}.

• *Punto simple de una curva parametrada.* — Punto cuyo orden de multiplicidad es 1.

• *Raíz simple de una función, de un polinomio o de una ecuación.* — Raíz cuyo orden de multiplicidad es 1. Por ejemplo, para el polinomio $(X - 5)^2 (X + 3)$ de R[X], la raíz $-3$ es simple, mientras que la raíz 5 es doble.

• *Topología de la convergencia simple.* — Dado un conjunto E y un espacio métrico F, la topología producto sobre el conjunto $F^E$ de funciones de E en F se denomina topología de la convergencia simple.
V. SIMPLE (Convergencia).

## Simpléctico

• *Automorfismo simpléctico.* — Sea E un K-espacio vectorial simpléctico. Se llama automorfismo simpléctico de E un automorfismo de la forma bilineal alternada no degenerada S definida sobre E.

• *Espacio vectorial simpléctico.* — Espacio vectorial E sobre un cuerpo conmutativo K provisto de una forma bilineal alternada no degenerada S. Si E es de dimensión finita $n$, entonces $n$ es necesariamente par.

• *Grupo simpléctico.* — Sub-grupo de SL($2r$, K) constituido por los automorfismos simplécticos de $K^{2r}$. Se lo representa por Sp($2r$, K) o $Sp_n(K)$ con $n = 2r$. El grupo $Sp_4(F_2)$, isomorfo de $S_6$, es de orden 720.

• *Grupo proyectivo simpléctico.* — Cociente del grupo $Sp_n(K)$ por su centro. Se lo representa $PSp_n(K)$ donde PSp($2r$, K). Los grupos $Sp_n(K)$ son simples a excepción de $PSp_2(F_2)$, $PSp_2(F_3)$ y $PSp_4(F_2)$. El grupo $PSp_3(F_3)$ [resp. $PSp_4(F_2)$] es de orden 25.920 [resp. 1.451.520]; aparece en geometría algebraica como el grupo de las 27 rectas de una superficie cúbica [resp. como el grupo de las 28 bitangentes de una curva plana de grado 4].

## Simplemente

• *Acción simplemente transitiva de un grupo* G *que opera sobre un conjunto* E. — Se dice cuando G opera libremente y transitivamente sobre E.

• *Aplicación simplemente continua.* — V. CONTINUA.

• *Espacio simplemente conexo.* — V. CONEXO.

• *Sucesión o serie de funciones simplemente convergente.* — V. SIMPLE (Convergencia).

## Simples

• *Descomposición en elementos simples de una fracción racional* P/Q *de* K(X), *donde* K *es un cuerpo.* — Sea $Q = q_1^{r_1} q_2^{r_2} \dots q_n^{r_n}$ la descomposición de Q en factores irreductibles. La fracción racional P/Q se escribe entonces de manera única:

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{h_{ij}}{q_i^j},$$

donde A y $h_{ij}$ son polinomios tales que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y todo $j \in \{1, \dots, r_i\}$ el grado de $h_{ij}$ es estrictamente inferior al de $q_i$. Las fracciones raciona-

les $h_{ij}/g_i^j$ se denominan elementos simples. En el caso en que $K = C$, los elementos simples son de la forma:

$$\frac{b}{(X-a)^j} \quad \text{con} \quad a \in C \text{ y } b \in C.$$

En el caso en que $K = R$, los elementos simples son, bien de la forma:

$$\frac{b}{(X-a)_j} \text{ con } a \in R \text{ y } b \in R,$$

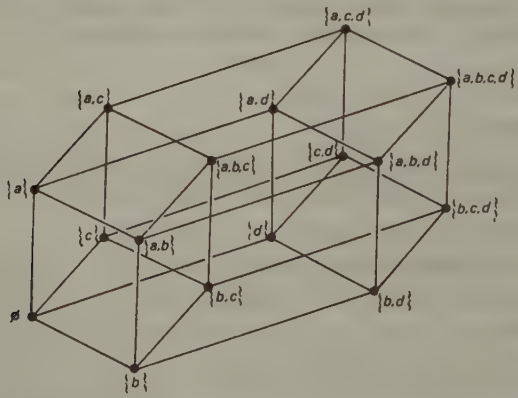
bien de la forma:

$$\frac{aX+b}{((X-c)^2+d^2)^j} \text{ con } a,\ b,\ c,\ d \text{ reales.}$$

Los primeros se denominan de primera especie, los segundos se llaman de segunda especie.

## Símplice

• (Combinatoria.) *Símplice construido sobre un conjunto* E. — Se emplea para designar el conjunto $\mathfrak{P}(E)$ de las partes de E ordenado por la inclusión; pueden utilizarse representaciones como las que aparecen a continuación, donde $E = \{a, b, c, d\}$.




• (Geometría.) *Símplice o símplice geométrico de dimensión r en un espacio afín.* — Envolvente convexa de $r+1$ puntos independientes de un espacio afín; estos puntos son los vértices del símplice. Para $r = 1$ [resp. 2, 3] es un segmento [resp. un triángulo, un tetraedro]. Esta noción juega un papel fundamental en topología algebraica.

## Símplices

• *Complejo de símplices.* — V. SIMPLICIAL (Complejo).

## Simplicial

• *Complejo simplicial o complejo de símplices.* — Sub-conjunto de un espacio euclídeo reunión finita de símplices cuyas intersecciones dos a dos son vacías o caras de cada uno de ellos. La dimensión del complejo es la más grande de las dimensiones de los símplices que lo constituyen. Esta noción se debe a Poincaré. Ejemplo de complejos simpliciales: todo símplice; la reunión de las caras de un tetraedro; la reunión de los 12 triángulos obtenidos al trazar una diagonal sobre cada una de las seis caras de un cubo. La característica de Euler-Poincaré de un complejo simplicial K es:

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s(i)$$

donde $s(i)$ es el número de símplices de dimensión $i$ de K.
V. TRIANGULABLE.

## Simplificable

• *Elemento simplificable.* — Elemento simplificable a izquierda y a derecha.

• *Elemento simplificable a derecha (resp. a izquierda) en un magma* (E, $*$). — Elemento $a$ de E tal que, para todo par $(x, y)$ de elementos de E, la igualdad $x * a = y * a$ (resp. $a * x = a * y$) implica la igualdad $x = y$.

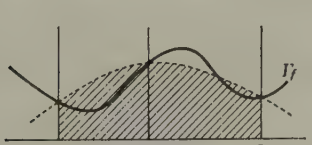
## Simpson, Thomas (1710-1761)

• *Método de Simpson.* — Método de cálculo por aproximación de la integral definida:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

de una función continua sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$. Se considera la subdivisión $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ definida por:

$$a_i = a + \frac{i}{n}(b - a);$$




se pone $h = \dfrac{b-a}{n}$ y $K_n = \dfrac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left[f(a_{i-1}) + 4f\left(\dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}\right) + f(a_i)\right]$.

Sobre cada intervalo $[\![a_{i-1}, a_i]\!]$ se reemplaza $f$ por el único polinomio de interpolación de grado $\leqslant 2$ y que toma los mismos valores que $f$ en los pun-

tos $a_{i-1}$, $a_i$ y $\frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$. Si, por ejemplo, $f$ es de clase $C^3$ sobre $[\![a, b]\!]$ y si $||f^{(3)}||_\infty = M$, se muestra que:

$$|I - K_n| \leqslant \frac{M(b-a)}{6} \cdot \frac{h^3}{32}.$$

Numerosas mayoraciones distintas pueden obtenerse; por ejemplo:

$$|I - K_n| \leqslant \frac{M(b-a)^5}{180(2n)^4}, \text{ donde } M = ||f^{(4)}||_\infty.$$

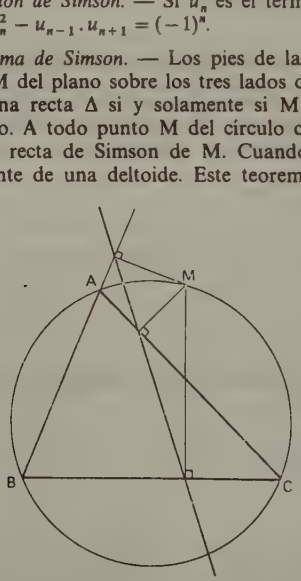
V. TRAPECIOS.

## Simson, Robert (1687-1768)

• *Recta de Simson.* — V. SIMSON (Teorema de).

• *Relación de Simson.* — Si $u_n$ es el término general de la sucesión de Fibonacci, $u_n^2 - u_{n-1} \cdot u_{n+1} = (-1)^n$.

• *Teorema de Simson.* — Los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto M del plano sobre los tres lados de un triángulo ABC están alineados sobre una recta $\Delta$ si y solamente si M pertenece al círculo circunscrito al triángulo. A todo punto M del círculo circunscrito corresponde una recta $\Delta$ llamada recta de Simson de M. Cuando M varía sobre el círculo, $\Delta$ es la envolvente de una deltoide. Este teorema fue descubierto por Wallace.




## Sine-Gordon

• *Ecuación de Sine-Gordon.* — Nombre dado a la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = -K \operatorname{sen} \theta,$$

donde $K \in \mathbf{R}$ y $(u, v)$ es un sistema de coordenadas curvilíneas de $\theta$. Esta ecuación fue introducida en unos problemas sobre la «copa de los vestidos» estudiados por Tchebychev. De hecho, están relacionados con la geometría diferencial.
V. TCHEBYCHEV.

## Singleton

Conjunto E constituido por un solo elemento: $E = \{x\}$.

## Singular

- *Cardinal singular.* — Cardinal transfinito que no es regular, por ejemplo: $\aleph_\Omega$. El más pequeño cardinal singular es $\aleph_\omega$.

- *Función singular de Lebesgue.* — V. LEBESGUE.

- *Haz de círculos de punto singular.* — V. HAZ.

- *Matriz cuadrada singular.* — Matriz cuadrada no inversible; su determinante es nulo.

- *Punto singular de una curva plana* $\Gamma$ *de ecuación cartesiana* $f(x, y) = 0$, *donde* $f$ *es una función numérica de clase* $C^1$ *en un abierto* U *de* $\mathbf{R}^2$. — Punto M de $\Gamma$ cuyas coordenadas $(x, y)$ verifican:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

- *Punto singular de una superficie* S *de ecuación cartesiana* $f(x, y, z) = 0$, *donde* $f$ *es una función numérica de clase* $C^1$ *en un abierto* U *de* $\mathbf{R}^3$. — Punto M de S cuyas coordenadas $(x, y, z)$ verifican:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

- *Punto singular aislado de una función compleja.* — Sea $f$ una función compleja holomorfa sobre un disco punteado $0 < |z - z_0| < \rho$ de centro $z_0$ de C. El punto $z_0$ se denomina punto singular aislado si $f$ no puede prolongarse en una función holomorfa sobre el disco $|z - z_0| < \rho$. El punto $z_0$ es punto singular aislado si y solamente si en el desarrollo de $f$ en serie de Laurent:

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

existe $n < 0$ tal que $a_n \neq 0$. Si existe una infinidad de índices $n < 0$ tales que $a_n \neq 0$, el punto singular se denomina esencial, en caso contrario, se denomina polo de $f$.
V. PICARD (Teorema de), WEIERSTRASS (Teoremas de).

- *Solución singular de una ecuación diferencial.* — V. SOLUCIONES.

## Singulares

• *Hipótesis de los cardinales singulares.* — Si $\aleph_\alpha$ es singular y si para todo ordinal $\beta < \alpha$ tenemos $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\omega$ entonces $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

## Sintética

• *Geometría sintética.* — Sinónimo de geometría pura.

## Sinusoidal

Se dice de una curva cuyo grafo presenta arcos que recuerdan los de la sinusoide (incluso si tienen longitudes desiguales).

• *Espiral sinusoidal.* — Espiral cuya ecuación polar es de la forma $\rho^\alpha = a^\alpha \cos\alpha\theta$; es una lemniscata de Bernoulli para $\alpha = 2$, una recta para $\alpha = -2$, una cardioide para $\alpha = \frac{1}{2}$, una parábola para $\alpha = -\frac{1}{2}$ y una cúbica de Tschirnhausen para $\alpha = -\frac{1}{3}$.

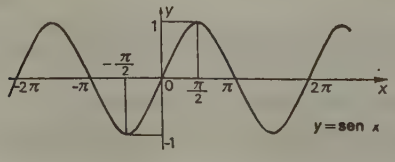
• *Movimiento rectilíneo sinusoidal de un móvil puntual* M. — Movimiento cuya trayectoria es un segmento AB tal que la abscisa $x$ de M sobre un eje de origen O (punto medio de AB) y de soporte AB verifique la ecuación horaria $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, donde $\omega$, $\varphi$ y $a$ son constantes ($a > 0$). Es un movimiento periódico de período $2\pi/\omega$. Puede interpretarse como que es el movimiento de la proyección sobre AB de un móvil puntual P que describe el círculo de diámetro AB con un movimiento uniforme de velocidad angular $\omega$. La ecuación horaria $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ de un movimiento sinusoidal cualquiera representa la solución general de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

V. Amplitud, Fase, Pulsación.

## Sinusoide

Curva plana que admite en cierto sistema de referencia ortonormado la ecuación $y = \operatorname{sen} x$. Pero en otro sistema de referencias ortonormado, su ecuación puede ponerse bajo la forma $y = \cos x$. Es una curva trascendente (V. Cosinusoide).



## Sistema

Utilizado en ciertos casos como sinónimo de familia; por ejemplo, en la expresión «sistema de vectores libre».
V. COMPLETO, EJES, GENERADORES, TOTAL.

● *Sistema de ecuaciones.* — Familia finita $\Sigma$ de ecuaciones $f_i(x) = g_i(x)$ para $i = 1, \ldots, n$ que generalmente se escribe bajo la forma:

$$\Sigma \begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases}$$

Si los $f_i$ y $g_i$ para $i = 1, \ldots, n$ son funciones de un conjunto E en un conjunto F, resolver el sistema $\Sigma$ en E es determinar la parte S de E, denominada conjunto de las soluciones, definida por:

$$S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i,$$

donde $S_i$ es el conjunto de las soluciones de la ecuación $f_i(x) = g_i(x)$.
Se define de manera análoga un sistema de inecuaciones.
V. COMPATIBLE, CRAMER, DETERMINANTE, HOMOGÉNEO, INCOMPATIBLE, INDETERMINADO, RANGO, ROUCHÉ.

● *Sistema de ecuaciones de Hamilton o de Poisson-Hamilton.* — V. HAMILTONIANO.

● *Sistema de ecuaciones de Lagrange.* — V. LAGRANGIANO.

● *Sistema fundamental de entornos.* — V. FUNDAMENTAL.

● *Sistema hipercomplejo.* — V. HIPERCOMPLEJO.

● *Sistema de numeración.* — V. NUMERACIÓN.

## Sistema de referencia

### Sistema de referencia

De manera general, un sistema de referencia en un espacio es la base «de elementos» a partir de los cuales se define un sistema de coordenadas.
V. AFÍN, CARTESIANO, DARBOUX, ORTOGONAL, ORTONORMADO, PROYECTIVO.

## Situs

● *Análisis situs.* — V. ANÁLISIS.

**Sí y sólo sí**

Cuando el enunciado $P \Leftrightarrow Q$ es verdadero, se dice a menudo que «P es verdadero si y sólo si Q es verdad. Abreviatura: ssi.

**Skewes,** S.

• *Número de Skewes.* — Número S introducido en teoría analítica de los números $S = e^{e^{e^{79}}}$; aproximativamente tenemos $S = 10^{10^{10^{34}}}$, es decir, que ese número se escribe con $10^{10^{34}}$ cifras. Skewes (alumno de J. E. Littlewood) mostró que existe $x < S$ tal que $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) > 0$. El número de Skewes ilustra bien la diferencia de mentalidades entre el matemático —que no debe excluir jamás la posibilidad de ocurrencias análogas— y todas las demás actividades humanas que se contentan con el «principio de inducción» considerado como perfectamente suficiente en las ciencias experimentales, las técnicas y la vida corriente.
V. GRANDES (Números), INDUCCIÓN.

**Skolem,** Thoralf Albert (1887-1963)

• *Teorema de Skolem.* — Existe algún sistema axiomático dado en un lenguaje de primer orden que no puede caracterizar la aritmética clásica de forma categórica.
V. NO ESTÁNDAR (Análisis).

• *Teorema de Lowenheim-Skolem.* — V. LOWENHEIM.

**Slip**

• *Slip de Möbius.* — V. MÖBIUS.

**Sluse,** René François (1622-1685)

• *Problema de Sluse.* — Por un punto dado en el interior de un sector angular, trazar una secante que determine un triángulo de área mínima.

**Snedecor,** G. W. (1881-1974)

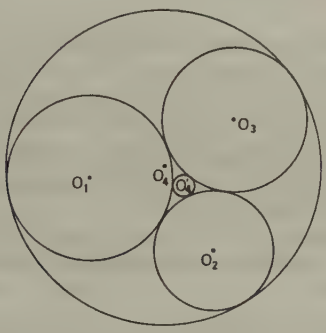
• *Ley de Fisher-Snedecor.* — V. FISHER.

**Soddy,** Frédéric (1877-1956)

• *Teorema de Soddy.* — Si tres círculos coplanarios son tangentes exteriormente dos a dos, existe por lo menos un cuarto círculo que sea tangente a los

tres primeros. Hay, en general, dos soluciones, una de las cuales es un círculo que contiene a los otros tres. Además, las inversas $a$, $b$, $c$ y $d$ de los radios de tres círculos de partida y de uno de los cuartos círculos posibles verifican:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a + b + c + d)^2.$$




## Solenoidal

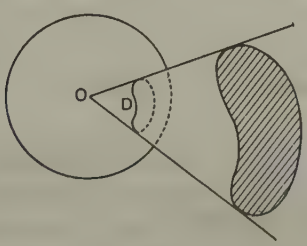
• *Campo de vectores solenoidal.* — Campo de vectores $\vec{V}$ tal que $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

## Sólido

Designa usualmente un objeto en $\mathbf{R}^3$ para el que la distancia entre dos puntos es invariante en todo desplazamiento. Un cuadrilátero articulado no es un sólido. Un sólido posee, por tanto, un volumen (palabra que usualmente se toma en el mismo sentido), una superficie y, eventualmente, unas líneas o puntos notables.

• *Sólido platónico.* — V. PLATÓNICOS.

• *Angulo sólido.* — Dado un punto O y una esfera $\Sigma$ de centro O, se llama ángulo sólido de vértice O al volumen engendrado por las semirrectas Ox de origen O que encuentran un dominio D de la esfera $\Sigma$. Si $D = \Sigma$, el ángulo sólido es el espacio entero. V. ESTEREORRADIAN, POLIEDRO (Angulo).



## Sólo si

V. SÍ Y SÓLO SÍ.

## Soluciones

• *Soluciones o integrales de una ecuación diferencial* $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$. — Funciones $f$ que verifican $F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$. A menudo se puede determinar una función $g:(c_1, c_2, ..., c_n, x) \mapsto g(c_1, c_2, ..., c_n, x)$ llamada solución general de la ecuación que proporciona una infinidad de soluciones cuando se le da valores a los parámetros $c_1, c_2, ..., c_n$. Una solución que escapa a la solución general se denomina solución singular; la representación gráfica de tal solución es la envolvente de las representaciones gráficas de soluciones dadas por la solución general.

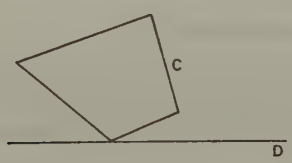
• *Conjunto de las soluciones o de las raíces de una ecuación* $f(x) = g(x)$ *de incógnita* $x \in E$. — Conjunto de los elementos $a \in E$ tales que la igualdad $f(a) = g(a)$ sea verdadera.

• *Conjunto de soluciones de una inecuación* $f(x) \leqslant g(x)$ *de incógnita* $x \in E$. — Conjunto de elementos $a \in E$ tales que la desigualdad $f(a) \leqslant g(a)$ sea verdadera.

• *Conjunto de las soluciones de un sistema de ecuaciones o de inecuaciones.* — V. SISTEMA.

## Soporte

• *Soporte de una función numérica f definida sobre un espacio topológico* E. — Adherencia del conjunto de los puntos de E que tienen una imagen no nula por *f*.




• *Función de soporte compacto.* — V. COMPACTO.

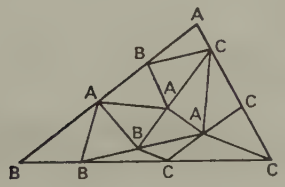
• *Recta soporte de una curva plana* C. — Recta que tiene un punto común y sólo uno con la curva C y que la deja toda entera de un mismo lado del plano. Una recta soporte no es necesariamente una tangente y una tangente no es necesariamente una recta soporte.

## Soroban

Abaco japonés.
V. ABACO.

## Sperner, Emanuel (1905-1980)

• *Teorema de Sperner.* — Consideremos un triángulo ABC dividido en un número finito de triángulos elementales, es decir, que cada uno de ellos tiene un lado común o un vértice común con un triángulo adyacente. Los vértices de estos triángulos situados sobre un lado del triángulo inicial se designan arbitrariamente por el nombre de uno de los dos vértices de ese lado. Los vértices interiores al triángulo inicial se designan arbitrariamente por A, B o C. El teorema de Sperner afirma que existe un número impar de triángulos elementales, y uno por lo menos, que tienen por vértices A, B, C. El mismo teorema o un teorema análogo puede ampliarse al tetraedro y a los símplices de dimensiones superiores.




## Spin

Elemento particular de un álgebra de Clifford (V. CLIFFORD). Esta noción desempeña un papel fundamental en física de las partículas.

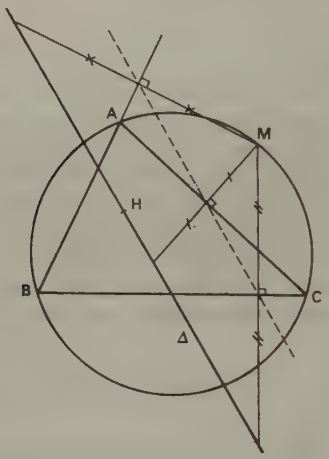
## Staudt, Karl Georg Christian, von (1798-1867)

• *Teorema de Von Staudt.* — Sean $p$ un entero primo y $n$ un entero par. Si $p-1$ no divide a $n$, entonces el $n$-ésimo número de Bernoulli $b_n$ es un elemento de $\mathbf{Z}_{(p)}$ localizado de $\mathbf{Z}$ en $p\mathbf{Z}$. Si $p-1$ divide a $n$, entonces $pb_n$ está en $\mathbf{Z}_{(p)}$ y tenemos $pb_n \equiv -1 \mod p\mathbf{Z}_{(p)}$.

## Steiner, Jakob (1796-1863)

• *Recta de Steiner de un punto* M *del círculo circunscrito al triángulo* ABC. — Recta $\Delta$ deducida de la recta de Simson de M por la homotecia de centro M

y de razón dos. Pasa por el ortocentro H del triángulo y por los puntos simétricos de M por relación a los lados del triángulo.




• *Elipse de Steiner.* — Se llama elipse de Steiner de un triángulo a la elipse circunscrita al triángulo que admite por centro el centro de gravedad del triángulo.

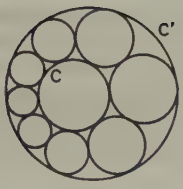
• *Hipocicloide de Steiner.* — Deltoide.

• *Porisma o alternativa de Steiner.* — Sean dos círculos C y C′ uno de los cuales es interior al otro y sea $(\Gamma_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ una sucesión de círculos tales que para todo $i \in \mathbf{N}^*$ el círculo $\Gamma_i$ sea tangente a los círculos C y C′ y sea tangente exteriormente al círculo $\Gamma_{i+1}$. Los círculos C y C′ verifican una de las propiedades siguientes:

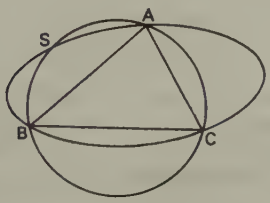
— o bien existe $n \in \mathbf{N}^*$ tal que $\Gamma_{n+1} = \Gamma_1$ y esto cualquiera que sea el círculo inicial $\Gamma_1$ (toda sucesión de círculos se «encierra» en el $n$-ésimo círculo);
— o bien $\Gamma_i \neq \Gamma_j$ para todo par $(i, j)$ de enteros distintos no nulos y esto cualquiera que sea el círculo inicial $\Gamma_1$. (Ninguna sucesión de círculos se «encierra».)

Para que la primera propiedad se verifique es necesario y suficiente que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \frac{a-b}{a+b}$, donde $a$ y $b$ $(b < a)$ son los radios de dos círculos concéntricos obtenidos como imágenes de los círculos C y C′ por una inversión convenientemente escogida.

V. PONCELET (Gran Teorema de).

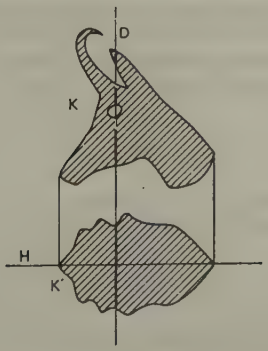



• *Punto de Steiner.* — Se llama punto de Steiner de un triángulo al punto S distinto de los vértices del triángulo, en el que la elipse de Steiner encuentra al círculo circunscrito al triángulo.



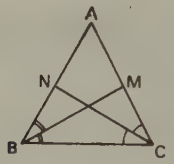

• *Superficie de Steiner.* — Superficie de cuarto orden que pasa doblemente por las aristas de un triedro y triplemente por su vértice.

• *Simetrización de Steiner.* — Sea $\mathscr{E}$ un espacio afín euclídeo y sea H un hiperplano de $\mathscr{E}$. La simetrización de Steiner consiste en asociar a todo compacto K de $\mathscr{E}$ un compacto K′ (llamado simetrizado de Steiner de K por relación a H). Si consideramos a todas las rectas D de $\mathscr{E}$ ortogonales de H, el compacto K′ está definido por las condiciones siguientes:
si $K \cap D \neq \phi$, entonces $K' \cap D = \phi$; si $K \cap D \neq \phi$, entonces $K' \cap D$ es el segmento que coincide con D, cuyo punto medio pertenece a H y cuya longitud es la medida sobre D del compacto $K \cap D$. Los compactos K y K′ tienen el mismo volumen y el diámetro de K′ es inferior al de K.



• *Teorema de Steiner.* — No se puede hallar el centro de un círculo con una sola regla en un número finito de operaciones. Este teorema fue demostrado por Hilbert.

• *Teorema de Steiner-Lehmus.* — Sean M y N los pies de las bisectrices interiores trazados desde los vértices B y C de un triángulo ABC. El teorema de Steiner-Lehmus afirma que, si CN y BM tienen igual longitud, el triángulo es isósceles.




## **Steinhaus,** Hugo Dyonis (1887-1972)

• *Teorema de Banach-Steinhaus.* — V. BANACH.

## **Steinitz,** Ernst (1871-1928)

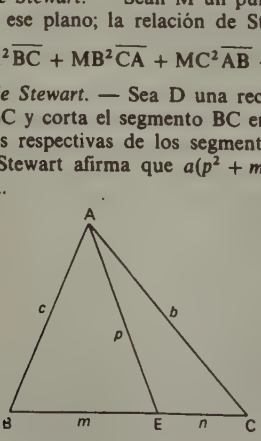
• *Teorema de Steinitz.* — Todo cuerpo conmutativo K admite un cierre algebraico; dos cierres algebraicos de K son isomorfos.

## **Stewart,** Matthew (1717-1785)

• *Relación de Stewart.* — Sean M un punto del plano y A, B, C tres puntos alineados de ese plano; la relación de Stewart afirma que:

$$MA^2\overline{BC} + MB^2\overline{CA} + MC^2\overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0.$$

• *Teorema de Stewart.* — Sea D una recta que pasa por el vértice A de un triángulo ABC y corta el segmento BC en un punto E y sean $a$, $b$, $c$, $m$, $n$, $p$ las longitudes respectivas de los segmentos BC, AC, AB, BE, EC y AE. El teorema de Stewart afirma que $a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$.
V. MEDIANA.



## Stieltjes, Thomas-Jan (1856-1894)

• *Integral de Riemann-Stieltjes.* — Sean $I = [\![a, b]\!]$ un intervalo real cerrado, F una función numérica de variación acotada definida sobre I y $g$ una función numérica continua sobre $[\![a, b]\!]$. Para toda subdivisión $\sigma$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = b \quad \text{de} \quad [\![a, b]\!]$$

se considera el número real $S_\sigma = \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i))$, donde $\xi_i$ es un número real del intervalo $[\![x_i, x_{i+1}]\!]$. Cuando el más grande de los números $x_{i+1} - x_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ tiende hacia 0, entonces $S_\sigma$ tiene un límite finito representado por $\int_a^b g(x)\, dF(x)$ y llamado integral de Stieltjes de $g$ relativa a F. En el caso en que F es continua y derivable sobre I, es igual a la integral de Riemann $\int_a^b g(x)\, F'(x)\, dx$. Cuando F es la aplicación idéntica sobre I se encuentra la integral de Riemann de $g$ sobre I.

• *Medida de Stieltjes definida por una función numérica* F *continua a derecha en todo punto de* R. — Unica medida positiva $\mu$ sobre la tribu de Borel tal que, para todo intervalo de $[\![a, b]\!]$ de R, $\mu([\![a, b]\!]) = F(b) - F(a)$. Si F es la aplicación idéntica sobre R, entonces $\mu$ es la medida de Lebesgue.

## Stifel, Michael (1486-1567)

• *Triángulo de Stifel.* — Triángulo de Pascal.

## Stirling, James (1692-1770)

• *Fórmula de Stirling.* — Afirma que $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + \varepsilon_n)$, donde $\varepsilon_n$ tiende hacia 0 cuando $n$ tiende hacia el infinito. Permite obtener un valor aproximado de $n!$ cuya precisión aumenta con $n$. De este modo, juega un gran papel en análisis y en probabilidad.

• *Números de Stirling de primera especie.* — El coeficiente de $x^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ en el desarrollo del polinomio:

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

de grado $n \geqslant 1$ se representa por $S_n^k$ o también $s(n, k)$. Se plantea $S_0^0 = 1$. Los números $S_n^k$ así definidos se llaman números de Stirling de primera especie. Verifican la fórmula de recurrencia:

$S_{n+1}^k = S_n^{k-1} - nS_n^k$, pero no se conoce expresión que dé $S_n^k$ en función de $n$ y $k$.

• *Números de Stirling de segunda.* — Sea $x^{(k)}$ $(k \in \mathbf{N}^*)$ el polinomio

$x(x-1)\dots(x-k+1)$. Todo polinomio $x^n (n \in \mathbf{N}^*)$ se escribe de manera única:

$$x^n = \sum_{k=1} \sigma_n^k x^{(k)}.$$

Se plantea $\sigma_0^0 = 1$. Los números $\sigma_n^k$, representados también $S(n, k)$, así definidos se denominan números de Stirling de segunda especie. Vienen dados por:

$$\sigma_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} C_k^j j^n$$

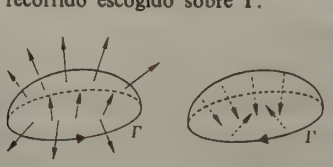
y verifican la fórmula de recurrencia $\sigma_{n+1}^k = \sigma_n^{k-1} + k\sigma_n^k$.
Se muestra que $\sigma_n^k$ es el número de particiones en $k$-clases de un conjunto de $n$ elementos y que $k!\sigma_n^k$ es el número de suprayecciones de un conjunto de $n$ elementos hacia un conjunto de $k$ elementos.

## Stokes, George Gabriel (1819-1903)

• *Fórmula o teorema de Stokes.* — Sea $\Gamma$ una curva rectificable, frontera de una porción de superficie $\Sigma$ de $\mathbf{R}^3$, cuadrable no cerrada y orientable. Sean P, Q y R unas funciones continuas sobre $\Sigma$ y que poseen derivadas parciales continuas sobre $\Sigma$. La fórmula de Stokes afirma que:

$$\int_{\Gamma^+} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = \iint_{\Sigma} \left[ \gamma \left( \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \right) + \alpha \left( \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} \right) + \beta \left( \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x} \right) \right] d\sigma$$

donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son las componentes del vector unitario $\vec{n}$ normal a $\Sigma$ que indica una orientación de $\Sigma$ escogida según ciertas convenciones hechas con el sentido de recorrido escogido sobre $\Gamma$.

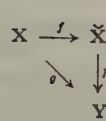



Si $\vec{\mathrm{V}}$ es el campo de vectores de componentes P, Q, R se la representa también:

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\, \vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{d}\sigma = \int_{\Gamma^+} \vec{\mathrm{V}} \cdot \vec{d}s.$$

## Stone, Marshall Harvey (1903-1989)

• *Compactificado de Stone-Čech de un espacio topológico* X. — Par $(\check{\mathrm{X}}, f)$, donde $\check{\mathrm{X}}$ es un espacio compacto y $f: \mathrm{X} \to \check{\mathrm{X}}$ una aplicación continua tal que, si $(\mathrm{Y}, g)$ es otro par análogo, existe una única aplicación continua $h: \check{\mathrm{X}} \to \mathrm{Y}$ tal que $g = h \circ f$. Es, por tanto, la solución de un problema universal.




• *Teorema de Stone.* — Toda álgebra de Boole finita es isomorfa a un álgebra de Boole $(\mathfrak{P}(E), \cup, \cap, \complement_E)$, donde E es un conjunto finito. En particular, este teorema prueba que un conjunto finito cuyo cardinal no es de la forma $2^n$ $(n \in \mathbf{N})$ no puede estar provisto de una estructura de álgebra de Boole.

• *Teorema de Stone-Weierstrass.* — Sea $\mathscr{C}(\mathbf{I}, \mathbf{R})$ el conjunto de las funciones reales continuas sobre un intervalo cerrado I de R. El teorema de Stone-Weierstrass afirma que el sub-conjunto de $\mathscr{C}$ (I, R) constituido por las funciones polinomias definidas sobre I es denso en $\mathscr{C}$ (I, R) para la norma de la convergencia uniforme: para todo $f \in \mathscr{C}$ (I, R) y para todo $\varepsilon > 0$, existe una función polinomio P tal que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

## Student (Pseudónimo de Gosset W.) (1876-1937)

• *Ley de Student-Fisher de n grados de libertad.* — Sean X una variable aleatoria normal reducida y Z una variable según una ley de $\chi^2$ de $n$ grados de libertad. La ley de probabilidad de la variable $t = \sqrt{n}X/\sqrt{Z}$ se denomina ley de Student-Fisher o también ley de $t$. Su densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \times \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

## Sturm, Jacques Charles François (1803-1855)

• *Problema de Sturm-Liouville.* — Sean un intervalo cerrado $\mathrm{I} = [\![a, b]\!]$ de R y una ecuación diferencial lineal de la forma $y'' - u(x)y + \lambda y = f(x)$, donde $\lambda \in \mathbf{C}$, donde $u$ es una función de valores reales, continua en I, y donde $f$ es una función de valores complejos continua en I, salvo eventualmente en un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie que pertenece al interior de I. El problema de Sturm-Liouville consiste en buscar soluciones con valores complejos $y$ de esa ecuación diferencial que satisfagan las condiciones de los límites:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \quad \text{y} \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$

donde $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y $\delta$ son números reales tales que $(\alpha, \beta)$ y $(\gamma, \delta)$ sean diferentes de (0, 0).

• *Teorema de Sturm.* — Sea P un polinomio de grado $n$ de R[X] que no tiene más que raíces simples. Se considera la sucesión $P, P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_k$ de polinomios, donde $P_0$ es el polinomio derivado de P, donde $-P_1$ es el

resto de la división euclídea de P por $P_0$ y donde para todo $i \in \{2, 3, ..., k\}$, el polinomio $-P_i$ es el resto de la división de $P_{i-2}$ por $P_{i-1}$, siendo constante el polinomio $P_k$. Dados dos números reales $\alpha$ y $\beta$ ($\alpha < \beta$), el teorema de Sturm afirma que si $p$ es el número de variaciones de signos en la sucesión $P(\alpha)$, $P_0(\alpha)$, ..., $P_i(\alpha)$, ..., $P_k(\alpha)$ y $q$ el número de variaciones de signos en la sucesión $P(\beta)$, $P_0(\beta)$, ..., $P_i(\beta)$, ..., $P_k(\beta)$, entonces el polinomio P posee $p - q$ raíces reales entre $\alpha$ y $\beta$. «El teorema cuyo nombre tengo el honor de llevar», decía Sturm, profesor de la Politécnica.

## Sub-álgebra

• *Sub-álgebra de un* K-*álgebra.* — Parte P de E estable para las leyes de E y que, provista de las leyes inducidas, presenta una estructura de K-álgebra.

## Sub-anillo

• *Sub-anillo de un anillo* A. — Parte P de A estable para las leyes de A y que, provista de las leyes inducidas sobre P por las de A, presenta una estructura de anillo. Así, **Z** y **Z**[*i*] son sub-anillos de **C**.
V. ENGENDRADO.

## Sub-categoría

Una categoría $\mathscr{C}$ es una sub-categoría de una categoría $\mathscr{D}$ si todo objeto de $\mathscr{C}$ es objeto de $\mathscr{D}$ y si, cualquiera que sean los objetos X e Y de $\mathscr{C}$, tenemos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, Y).$$

## Sub-conjunto

• *Sub-conjunto de un conjunto* E. — Parte de E.
V. COMPLEMENTARIO, PARTE.

• *Sub-conjunto flou.* — V. FLOU.

## Sub-cuerpo

• *Sub-cuerpo de un cuerpo* K. — Parte P de K estable para las leyes de K y que, provista de las leyes inducidas sobre P por las de K, presenta una estructura de cuerpo. Así **Q** y **Q**(*i*) son sub-cuerpos de **C**.
V. ENGENDRADO.

## Sub-espacio

V. AFÍN, MÉTRICO, PROYECTIVO, TOPOLÓGICO, VECTORIAL.

## Sub-grafo

• *Sub-grafo de un grafo* G = (S, U) *engendrado por una parte* A *de* S. — Grafo $G_A$ cuyos vértices son los puntos de A y cuyos arcos son los arcos de G que tienen sus dos extremidades en A.
V. PARCIAL.

## Sub-grupo

• *Sub-grupo de un grupo* (G, *). — Parte estable S de G que es un grupo para la ley inducida sobre S por la de G. Una parte S no vacía de G es un sub-grupo si y solamente si para todo $(x, y) \in S^2$ tenemos $x * y' \in S$, donde $y'$ es el simétrico de $y$. Los enteros pares 2Z forman un sub-grupo aditivo de Z.
V. CENTRALIZADOR, CONJUGADO, DISCRETO, DISTINGUIDO, ENGENDRADO, FRATTINI, INVARIANTE, NORMAL, SYLOW, TRANSITIVO.

## Sub-módulo

• *Sub-módulo de un* A*-módulo* M. — Parte P de M, estable para las leyes de M y que, provista de las leyes inducidas, presenta una estructura de A-módulo.
V. MÓDULO, SUMA.

## Sub-múltiplo

• *Sub-múltiplo decimal de una unidad.* — V. MÚLTIPLO.

## Sub-sucesión

Sinónimo poco empleado de sucesión extraída.

## Sub-variedad lineal

• *Sub-variedad lineal de un espacio afín* $\mathcal{E}$. — Sinónimo de sub-espacio afín.
V. AFÍN.

## Sub-variedades transversales

V. TRANSVERSALES.

## Subdivisión

• *Subdivisión de un intervalo* $[\![a, b]\!]$ *de* R. — Sucesión finita $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de números reales tales que $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

## Subordinada

• *Geometría subordinada a otra.* — La geometría de un conjunto de puntos E, sobre el que opera un grupo G', se denomina subordinada a la geometría del mismo conjunto E, sobre el que opera un grupo G, si G' es un sub-grupo de G.

## Substitución

Permutación sobre un conjunto finito.

• (Lógica.) *Substitución de un símbolo σ' por un símbolo σ en un ensamblaje* $\mathscr{A}$. — Ensamblaje $\mathscr{A}'$ obtenido a partir de $\mathscr{A}$ al reemplazar $\sigma$ por $\sigma'$ en cada una de sus ocurrencias. Se escribe $\mathscr{A}' = (\sigma'/\sigma)\mathscr{A}$.

## Substracción

• *Substracción en un grupo aditivo* (G, +). — Todo elemento $x \in G$ posee un opuesto simbolizado por $-x$; para todo $(a, b) \in G^2$ se simboliza por $a - b$ el elemento $a + (-b)$. La ley de composición interna $(a, b) \mapsto a - b$ se llama substracción en el grupo G; efectuar la substracción de $a$ por $b$ es encontrar el único $x \in G$ llamado diferencia de $a$ y $b$, solución de la ecuación $b + x = a$. En Z, tenemos, por ejemplo:

$$(-2) - (-5) = 3 \quad \text{y} \quad (-2) - (+5) = -7.$$

• *Substracción en* N. — Restricción en N de la substracción de Z; no es una ley de composición interna.
V. DIFERENCIA.

## Sucesión

• *Sucesión de elementos de un conjunto* E. — Aplicación $f$ de una parte P de N en E; dicho en otros términos, una sucesión es una familia de elementos de E indizada por una parte P de N. La imagen $f(n)$, también simbolizada por $u_n$, del entero $n$ por $f$ se denomina término general de rango $n$ de la sucesión. La sucesión $f$ se simboliza por $(u_n)_{n \in P}$; si P = N también se simboliza $(u_n)_{n \geq 0}$. Si E es R o C, la sucesión se llama numérica; por ejemplo, la sucesión $(2n)_{n \geq 0}$ de los números pares.
V. ACOTADA, ADHERENCIA (Valor), ARITMÉTICA, ARITMÉTICO-GEOMÉTRICA, CANTOR, CAUCHY, CÉSARO (Suma), CONVERGENCIA, CONVERGENTE, CRECIENTE, DECRECIENTE, DIVERGENTE, ESTACIONARIA, EULER (Transformación de), EXACTA, EXTRAÍDA, FIBONACCI, FINITA, GEOMÉTRICA, INFINITA, JORDAN-HÖLDER, LONGITUD, MAJORADA, MINORADA, MONÓTONA, MÚLTIPLE, NO CRECIENTE, NO DECRECIENTE, PRODUCTO, PROGRESIÓN, SERIE, SUMA.

- *Sucesión doble.* — V. MÚLTIPLE (Sucesión).
- *Límite de una sucesión convergente.* — V. CONVERGENCIA (de una sucesión).

## Suceso

Noción primitiva del cálculo de probabilidades.

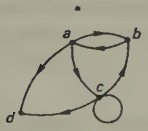
- *Noción de un espacio probabilizable* $(\Omega, \mathscr{A})$. — Parte de $\Omega$ que pertenece a $\mathscr{A}$.

V. CIERTO, CONTRARIO, ELEMENTAL, ESTOCÁSTICO, IMPOSIBLE.

## Sucesor

- *Sucesor de un vértice x de un grafo.* — Vértice que es el extremo terminal de un arco cuyo extremo inicial es $x$. El conjunto de los sucesores de $x$ se representa $\Gamma^+(x)$.

$$\Gamma^+(c) = \{c,\ b,\ d\}.$$




- *Sucesor de un entero natural* $a = \text{Card A}$. — El entero natural:

$$b = \text{Card}(A \cup \{\alpha\}),$$

donde $\alpha$ es un elemento que no pertenece a A.

V. ORDINAL, PEANO.

## Sucesos

V. EQUIPROBABLES, INCOMPATIBLES, INDEPENDIENTES.

- *Algebra de sucesos sobre un conjunto* E. — Tribu de partes de E.

## Suficiente

- *Condición suficiente.* — Si la proposición $P \Rightarrow Q$ es verdadera, se dice que la proposición P es una condición suficiente para que la proposición Q sea verdadera. Una condición suficiente para que un número sea divisible por 5 es que la escritura en base diez de ese número termine en un cero. Esta condición no es evidentemente necesaria: 15 no termina en 0 y, sin embargo, 15 es divisible por 5.
- *Condición necesaria y suficiente.* — V. NECESARIA.

## Suma

• *Símbolo de suma.* — Letra Σ (sigma) utilizada para simbolizar la suma de una sucesión de términos de un espacio vectorial. La suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ se simboliza por $\sum_{i=1}^{n} \omega_i$. La suma de una serie convergente de término general $u_n$ se simboliza $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Por abuso cómodo, se simboliza $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ o $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ una serie de término general $u_n$, incluso si esa serie no es convergente.

El signo de integración es un signo de suma generalizada: $\int$ es una S deformada.

V. ABEL, CÉSARO, SUMA.

## Suma

De forma general, cuando una ley de composición interna asociativa y conmutativa sobre un conjunto E se simboliza aditivamente, el compuesto $a + b$ de dos elementos $a$ y $b$ de E se denomina suma de los términos $a$ y $b$. Más generalmente, se define por recurrencia una suma de $n$ términos de E.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n.$$

V. CARDINAL, CHASLES (Relación de), GEOMÉTRICA, IDEALES, ORDINAL.

• *Suma de dos ángulos.* — Sean $\theta$ y $\theta'$ dos ángulos del grupo aditivo $\mathfrak{U}$ de los ángulos de semi-rectas (resp. del grupo aditivo $\mathfrak{U}_0$ del grupo de los ángulos de rectas). El ángulo $\theta + \theta'$ de $\mathfrak{U}$ (resp. de $\mathfrak{U}_0$) se llama suma de los ángulos $\theta$ y $\theta'$.

• *Suma de una familia sumable.* — V. SUMABLE.

• *Suma de dos funciones numéricas f y g de* E *en* C. — Función, representada por $f + g$, de E en C, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

• *Suma de dos matrices* A $(n, p)$ *y* B$(n, p)$ *de elementos en un cuerpo* K. — Matriz C$(n, p)$ cuyo término general $c_{ij}$ es definido por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

• *Suma de dos números.* — Resultado de la adición de esos dos números.

• *Suma de dos polinomios* $P = \sum_{i=i}^{n} a_i X^i$ y $Q = \sum_{i=i}^{p} b_i X^i$. — Polinomio:

$R = \sum_{i=i}^{s} c_i X^i$, donde $c_i = a_i + b_i$ ($s$ es el mayor entero tal que $a_i + b_i \neq 0$).

• *Suma de dos series de términos generales* $u_n$ *y* $v_n$. — Serie de término general $w_n = u_n + v_n$.

• *Suma de una serie convergente.* — Límite $\lambda$ hacia la que converge la sucesión de las sumas parciales de la serie (V. CONVERGENCIA).

• *Suma de una serie divergente.* — V. BOREL (Sumas de), REGULAR.

• *Suma de dos sub-espacios vectoriales* $E_1$ *y* $E_2$ *de un espacio vectorial* E. — Sub-espacio vectorial simbolizado por $E_1 + E_2$ engendrado por $E_1 \cup E_2$: todo vector $x$ de $E_1 + E_2$ puede escribirse $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in E_1$ y $x_2 \in E_2$ (V. DIRECTA).

• *Suma de dos sub-módulos* $M_1$ *y* $M_2$ *de un módulo* M. — Sub-módulo de M simbolizado por $M_1 + M_2$ engendrado por $M_1 \cup M_2$. Todo elemento $x$ de $M_1 + M_2$ puede escribirse $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$ (V. DIRECTA).

• *Suma de dos sucesiones numéricas* $(u_n)$ *y* $(v_n)$. — Sucesión de término general $u_n + v_n$.

• *Suma directa de dos objetos de una categoría.* — V. DIRECTA.

• *Suma parcial de una serie.* — V. SERIE.

• *Juegos de suma nula.* — V. NULA.

• *Signo suma.* — Nombre dado al signo « $\int$ » (se lee «suma») utilizado en la escritura de las integrales.

## Sumable

• *Familia sumable en un espacio vectorial normado* E. — Una familia $(u_i)_{i \in I}$ de elementos de E se denomina sumable de suma S si, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe una parte finita J de I tal que para toda parte de I finita K que contiene J. Se tenga:

$$\|S - \sum_{i \in K} u_i\| \leqslant \varepsilon.$$

Ejemplo: las series dobles convergentes.
V. CONMUTATIVA (Convergencia).

• *Familia absolutamente o normalmente sumable en un espacio vectorial normado* E. — Familia $(u_i)_{i \in I}$ de elementos de E tal que $(\|u_i\|)_{i \in I}$ sea una familia sumable en **R**. Si E es un espacio de Banach, toda familia normalmente sumable es sumable. En un espacio de dimensión finita una familia es sumable si y solamente si es normalmente sumable.

## Sumantes

• *Sumantes de una partición de enteros.* — PARTICIÓN.

## Sumas

V. CÉSARO-FÉJER, DARBOUX, EULER, RIEMANN.

## Sumatoria

• *Fórmula sumatoria de Euler-Mac Laurin.* — V. EULER.

## Sumergida

• *Superficie sumergida.* — V. INMERSIÓN.

## Sumergir

V. INMERSIÓN.

## sup

Abreviación de extremo superior.
V. SUPERIOR.

## Superabundante

• *Número superabundante.* — V. ABUNDANTE.

## Superaceleración

La noción de superaceleración no tiene en mecánica y en física la importancia de la noción de aceleración.

• *Vector-superaceleración de un móvil* M. — Vector derivado $d\vec{\Gamma}/dt$ en relación al tiempo del vector-aceleración $\vec{\Gamma}$ de M:

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \frac{d^2\vec{V}}{dt^2} = \frac{d^3\overrightarrow{OM}}{dt^3}$$

(donde $\vec{V}$ es el vector-velocidad de M).

## Supercuerpo

• *Supercuerpo de un cuerpo* K. — Sea L un cuerpo del que K es un subcuerpo; se dice entonces que L es un supercuerpo (o una extensión) del cuerpo K. Así, $\mathbf{R}((X))$ es un supercuerpo de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

## Superestructura

(Lógica.) Dado un conjunto E, se llama superestructura sobre E al conjunto V(E) definido por:

$$V_0(E) = E;\ V_1(E) = V_0(E) \cup \mathfrak{P}(V_0(E));\ V_{n+1}(E) = V_n(E) \cup \mathfrak{P}(V_n(E))$$

para $n \geqslant 0$ y $V(E) = \overline{\bigcup_{n \geqslant 0}} V_n(X)$.

## Superficie

Se confunde a veces superficie que designa un conjunto de puntos y área que designa la medida de una superficie. Como la palabra curva, no se puede definir sola la palabra superficie. Una hoja de papel (arrugada o no), las fronteras de diversos sólidos pueden dar una idea intuitiva de la noción de superficie. En topología se la define como un espacio topológico en el que cada punto tiene un entorno homeomorfo de un disco cerrado de $\mathbf{R}^2$ (V. VARIEDAD). Las superficies (algebraicas, parametradas) son las variedades (algebraicas, diferenciales) de dimensión 2 (V. PARAMETRADA). Ciertas superficies de $\mathbf{R}^3$ pueden ser definidas por una ecuación cartesiana o por ecuaciones paramétricas, otras son engendradas por una familia de curvas.
V. ALGEBRAICA, ANGULO, AREA, BOY, BRETZEL, CAYLEY, CERRADO, CILINDRO, CILÍNDRICA, CIRCULAR (Punto), CONO, CÓNICO, CONOIDE, CROMÁTICO (Número), CRUZADO (Gorro), CUÁDRICA, CÚBICA, CURVATURA, DESARROLLABLE, DIFERENCIAL (Variedad), DIVISORIA (Líneas de), DUPIN (Cíclico, indicatriz de), ESFERA, ELIPSOIDE, ELÍPTICA (Parábola, Punto), ESTACIONARIO (Punto), EQUIPOTENCIAL, EQUIVALENTES (Topológicamente), EULER-POINCARÉ (Característica de), EVOLUTA, FLEXIBLE, FONDO, FUNDAMENTALES (Formas cuadráticas), GÉNERO, GEODÉSICA, HELICOIDE, HIPERBÓLICA (Paraboloide, punto), HIPERBOLOIDE, HIPERSUPERFICIE, IMAGINARIO, INMERSIÓN, JORDAN, KLEIN (Botella de), KUMMER, LOXODROMIA, MERIDIANA, MÖBIUS, MONGE, NAPA, NIVEL, NO ORIENTABLE, NORMAL (Vector), NORMAL, OMBLIGO, ORIENTABLE, ORIENTACIÓN, PARABÓLICA, PARABOLOIDE, PARAMETRADA, PARALELA, PENDIENTE, PIRAMIDAL, PRINCIPALES (Secciones), PRISMÁTICO, PSEUDO-ESFERA, REGLADA, REVOLUCIÓN, RIEMANN, SINGULAR (Punto), STEINER, TANGENTE (Plano), TANGENTES, THALWEG (Línea de), TORO, VÉRTICE, WEDDLE.

• *Integral de superficie.* — Generalización en $\mathbf{R}^3$ del procedimiento que permite en $\mathbf{R}^2$ definir la integral curvilínea a partir de la integral simple. La definimos en el caso particular en que S es una porción de superficie de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $z = f(x, y)$ ($f$ de clase $C^1$) cuya proyección sobre el plano $xOy$ es un dominio D cuadrable. La integral sobre la superficie S de una función numérica F definida y continua en todo punto de S es el número real definido por:

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D F(x, y, z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

donde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ y $z = f(x, y)$.

## Superior

Cuando una relación de orden sobre un conjunto E se representa $\geqslant$, la expresión $x \geqslant y$ se lee «$x$ es superior a $y$».

En la enseñanza primaria o secundaria, «superior» se emplea a menudo por «estrictamente superior» y $\geqslant$ se lee «superior o igual a» o también «mayor que».

• *Semi-retículo superior.* — Conjunto ordenado E tal que toda parte $\{x, y\}$ de E de dos elementos admite un extremo superior (simbolizado por $x \vee y$).

• *Estrictamente superior.* — Cuando una relación de orden estricto sobre un conjunto E se representa por $>$, la expresión $x > y$ se lee «$x$ es estrictamente superior a $y$».

• *Extremo superior de una parte* A *de un conjunto ordenado* E. — Elemento más pequeño, si existe, del conjunto de los mayorantes de A. El extremo superior de A representado por $\sup_{x \in A} x$ puede no pertenecer a A. Toda parte mayorada de **R** admite un extremo superior. Una parte mayorada de **Q** no admite uno necesariamente; es el caso, por ejemplo, de $\{x \in \mathbf{Q};\ x^2 \leqslant 2\}$.
V. MAXIMUM.

• *Envolvente superior de una familia* $(f_i)_{i \in I}$ *de funciones definidas sobre un conjunto* E *y de valores reales.* — Función $f$ representada $\sup_{i \in I} f_i$ definida sobre E por $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$.

• *Límite superior.* — V. INFERIOR (Límite).

• *Matriz triangular superior.* — Matriz cuadrada $M = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

• *Semi-continuidad superior.* — V. SUPERIORMENTE (Semi-continua).

• *Suma de Darboux superior.* — V. DARBOUX.

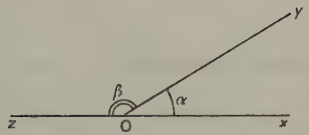
## Superiormente

• *Función real semi-continua superiormente en* $x_0$. — Función $f$ definida en el entorno de $x_0 \in \mathbf{R}$ y tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mu > 0$ para el que $|x - x_0| \leqslant \mu$ implica $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$.

• *Parte de un conjunto ordenado acotado superiormente.* — Parte mayorada.

## Suplementarios

• *Angulos suplementarios.* — Angulos $\alpha$ y $\beta$ cuya suma es igual al ángulo llano.




• *Sub-espacios afines suplementarios.* — Sea $\mathscr{E}$ un espacio afín asociado a un espacio vectorial E. Dos sub-espacios afines $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ de $\mathscr{E}$ se llaman suplementarios si los subespacios vectoriales $E_1$ y $E_2$ de E asociados a $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ son suplementarios. La intersección de $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ se reduce a un punto.

• *Subespacios proyectivos suplementarios.* — Subespacios proyectivos P(A) y P(B) de un espacio proyectivo P(E), tales que los subespacios vectoriales A y B de E sean suplementarios.

• *Subespacios vectoriales suplementarios.* — Subespacios vectoriales $E_1$ y $E_2$ de un espacio vectorial E tal que E sea igual a su suma directa: $E = E_1 \otimes E_2$.

## Supralenguaje

Dada una realización $\alpha$ de un lenguaje L, se llama supralenguaje obtenido al añadir a L los elementos del dominio de $\alpha$ (que se puede suponer disjunto de L) el lenguaje representado por L ($\alpha$) obtenido al añadir a L, como individuos, los elementos del dominio de $\alpha$, de tal suerte que dos elementos distintos en el dominio de $|\alpha|$ permanezcan idénticos en L ($\alpha$).

## Supraosculador

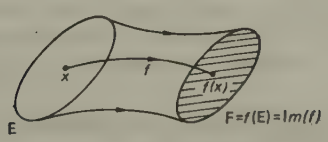
• *Círculo supraosculador de una curva plana en un punto* M. — Círculo osculador en M a la curva cuyo orden de contacto en M es superior o igual a 4.

## Suprayección

Aplicación suprayectiva.
V. CANÓNICA.

## Suprayectiva

• *Aplicación suprayectiva de un conjunto* E *sobre un conjunto* F. — Aplicación $f$ de E hacia F tal que todo elemento de F sea la imagen por lo menos de un elemento de E. La imagen $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ de E por $f$ es, por tanto, igual a F.



## Supremum

Sinónimo poco utilizado de extremo superior.
V. SUPERIOR (Extremo).

## Swan-Pan

Abaco chino.
V. ABACO.

## Sylow, Peter Ludwig Mejdell (1832-1918)

• *p-subgrupo de Sylow.* — V. Subgrupo de Sylow.

• *Subgrupo de Sylow de un grupo finito.* — Sean $p > 0$ un entero primo y G un grupo finito de orden $mp^h$ con $h \geqslant 1$ y $m$ extraño a $p$. Un subgrupo de Sylow o un $p$-subgrupo de Sylow de G es un subgrupo de orden $p^h$. La existencia de tales subgrupos fue establecida por uno de los teoremas de Sylow.

• *Teorema de Sylow.* — Constituyen uno de los útiles de base para el estudio de los grupos finitos. Sean $p > 0$ un entero primo y G un grupo finito de orden $n = mp^h$ con $h \geqslant 1$ y $m$ extraño a $p$. Los teoremas de Sylow pueden enunciarse así:

— existe en G un $p$-subgrupo de Sylow H;
— los $p$-subgrupos de Sylow de G son todos los conjugados de H; su número es un divisor de $n$, congruente con 1 módulo $p$ e igual al índice del normalizador de H en G;
— si G posee un solo $p$-subgrupo de Sylow H, entonces H es distinguido en G;
— para todo entero $k \leqslant h$, el grupo G contiene un subgrupo de orden $p^k$.

## Sylvester, James Joseph (1814-1897)

• *Determinante de Sylvester.* — Determinante de la matriz de Sylvester.

• *Ley de inercia de Sylvester.* — Sean E un espacio vectorial real de dimensión $n$, una forma cuadrática Q de rango $r$ sobre E, una base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E ortogonal relativamente a la forma polar de Q y sean $p$ el número de índices $i$ tales que $Q(e_i) > 0$ y $q$ el número de índices $i$ tales que $Q(e_i) < 0$. La ley de inercia de Sylvester afirma que, para cualquier otra base ortogonal $(e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ el número de índices $i$ tales que $Q(e'_1) > 0$ es igual a $p$ y el número de índices $i$ tales que $Q(e'_i) < 0$ es igual a $q$ y que $p + q = r$. El par $(p, q)$ se llama la signatura de Q.

• *Matriz de Sylvester.* — V. RESULTANTE de dos polinomios.

## Szilassi, Lajos

• *Poliedro de Szilassi.* — Poliedro anular de 7 caras y 14 vértices cuyas caras todas son polígonos. Descubierto en 1977 por el matemático húngaro Lajos Szilassi, es topológicamente equivalente a un toro y comparte con el tetraedro la propiedad de que cada par de caras posee una arista común. No posee, por tanto, ninguna diagonal. Hasta que el programa de ordenador de Szilassi determinó su estructura se ignoraba si un poliedro semejante podía existir. Indica cómo dibujar sobre el toro un mapa de siete colores. Su dual es el poliedro de Csaszar.

V. CSASZAR.

# T

## t

• *Ley de t.* — Ley de Student-Fisher.

## Tabla

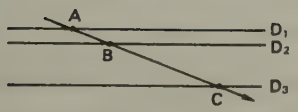
Colección de datos agrupados de forma sistemática con vistas a una consulta fácil.
V. CUADRO, NUMÉRICA, PITÁGORAS, VERDAD.

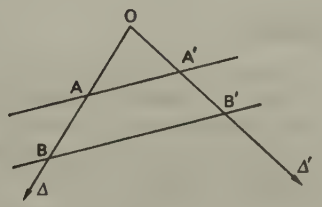
## Tablillas

• *Tablillas de Néper.* — V. NÉPER.

## Tales de Mileto (624-546 a. de C.)

• *Teorema o axioma de Tales.* — Si, en un plano, un eje corta tres rectas paralelas $D_1$, $D_2$ y $D_3$ en A, B y C, la razón $\overline{AB}/\overline{AC}$ es independiente del eje escogido. El teorema, considerado a menudo como «axioma» en la enseñanza secundaria, posee otras formas de enunciados; por ejemplo: las medidas algebraicas de los segmentos determinados por dos rectas paralelas D y D′ sobre todas rectas secantes son proporcionales: $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$.

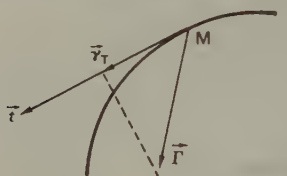



## Tangencial

• *Aceleración tangencial de un móvil puntual* M. — Componente $\gamma_T$ del vector-

aceleración $\vec{\Gamma}$ sobre el vector unitario tangente $\vec{t}$ del triedro de Frenet. Su valor es $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$, designando $v$ la velocidad de M. El vector $\vec{\gamma}_T = \frac{dv}{dt}\vec{t}$ tiene la dirección de la tangente en M a la trayectoria.




● *Coordenadas tangenciales de un hiperplano afín* V *de un espacio afín* $\mathcal{E}$ *de dimensión n.* — Sea $\hat{\mathcal{E}}$ el completado proyectivo de $\mathcal{E}$. Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ son las coordenadas homogéneas de $M \in \hat{\mathcal{E}}$, la ecuación de V en $\hat{\mathcal{E}}$ se escribe:

$$u_1x_1 + \cdots + u_nx_n + u_{n+1}x_{n+1} = 0$$

el sistema $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ se llama sistema de coordenadas tangenciales de V.

● *Ecuación tangencial de una curva plana* $\Gamma$ *de ecuación* $f(x, y, t) = 0$ *en coordenadas homogéneas.* — Relación $g(u, v, w) = 0$ que expresa una condición necesaria y suficiente para que la recta de coordenadas tangenciales $(u, v, w)$ sea tangente a la curva $\Gamma$. Si $f$ es diferenciable se obtiene la ecuación tangencial al eliminar $x$, $y$ y $t$ entre las ecuaciones:

$$ux + vy + wt = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_t}{w}.$$

● *Ecuación tangencial de una superficie* $\Sigma$ *de ecuación* $f(x, y, z, t) = 0$ *en coordenadas homogéneas.* — Relación $g(u, v, w, h) = 0$ que expresa una condición necesaria y suficiente para que el plano de coordenadas tangenciales $(u, v, w, h)$ sea tangente a la superficie $\Sigma$. Si $f$ es diferenciable, se obtiene la ecuación tangencial eliminando $x$, $y$, $x$ y $t$ entre las ecuaciones:

$$ux + vy + wz + ht = 0 \quad \text{y} \quad \frac{f'_x}{u} = \frac{f'_y}{v} = \frac{f'_z}{w} = \frac{f'_t}{h}.$$

## Tangente

● *Espacio vectorial tangente en un punto* $M_0$ *de una superficie parametrada* $(\Sigma, f)$ *de* $\mathbf{R}^3$. — Espacio vectorial engendrado por todos los vectores tangentes en $M_0$ a todas las curvas parametradas de clase $C^1$ trazadas sobre $\Sigma$, que pasan por $M_0$ y para las que $M_0$ es un punto regular. Se lo representa por $T_{\Sigma,M_0}$. El espacio tangente en el vértice de un cono de $\mathbf{R}^3$ es $\mathbf{R}^3$; en un punto distinto al vértice es un plano.

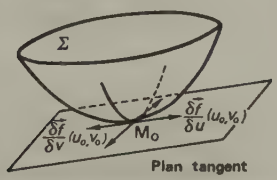
● *Función tangente compleja.* — V. COMPLEJAS (Funciones trigonométricas).

● *Función tangente hiperbólica.* — V. HIPERBÓLICA.

● *Hiperplano tangente a una hipersuperficie.* — Sea $\Sigma$ una hipersuperficie de $\mathbf{R}^n$ de ecuación $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ con $F \in \mathbf{R}[X_1, X_2, ..., X_n]$. Se llama hiperplano tangente en el punto $M(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma$ al hiperplano afín de ecuación:

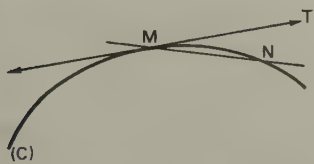
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a_i) = 0, \text{ donde } \lambda_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}(M).$$

● *Plano tangente en un punto* M *de una superficie parametrada* $(\Sigma, f)$ *de* $\mathbf{R}^3$. — Sean una superficie parametrada $(\Sigma, f)$ de clase $C^k$ y $M_0(u_0, v_0)$ un punto de $\Sigma$. Si los vectores $\overrightarrow{\partial f}/\partial u(u_0, v_0)$ y $\overrightarrow{\partial f}/\partial u(u_0, v_0)$ son linealmente independientes, entonces, $\Sigma$ posee en $M_0$ un plano vectorial tangente $T_{\Sigma, M_0}$ cuyas derivadas parciales $\overrightarrow{\partial f}/\partial u(u_0, v_0)$, $\overrightarrow{\partial f}/\partial u(u_0, v_0)$ constituyen una base. El plano afín que pasa por $M_0$ y de dirección $T_{\Sigma, M_0}$ se llama plano tangente a $\Sigma$ en $M_0$. En su vértice, un cono no admite plano tangente.




● *Recta tangente en un punto* M *de una curva de* $\mathbf{R}^3$. — Sea N un punto cualquiera de la curva. Si la recta (MN) tiene una posición límite T, cuando las coordenadas de N tienden hacia las de M, se dice que T es la tangente en M a la curva. Para una curva plana de ecuación cartesiana $y = f(x)$ si $f'(x_0)$ existe la curva admite en $M(x_0, y_0)$ una tangente de ecuación $(x - x_0) f'(x_0) = y - y_0$. Para una curva parametrada $(\Gamma, f)$ de $\mathbf{R}^3$ que admite en $M_0(t_0)$ un vector tangente $\overline{V}$, la curva admite una tangente en $M_0$ de vector director $\overline{V}$. Una circunferencia de centro O admite en todo punto M una tangente que es perpendicular en M a la recta (OM).

V. SEMI-TANGENTE.




● *Vector tangente en un punto* $M_0$ *de una curva parametrada* $(\Gamma, f)$ *de* $\mathbf{R}^3$. — Sean una curva parametrada $(\Gamma, f)$ de clase $C^k$ y $M_0(t_0)$ un punto de $\Gamma$. Si existe un entero $p \leqslant k$ tal que $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$ sea el vector derivado no nulo de más pequeño orden de derivación, se denomina vector tangente a $\Gamma$ en $M_0$ a todo vector no nulo $\overline{V}$ colineal a $\overrightarrow{f^{(p)}}(t_0)$.

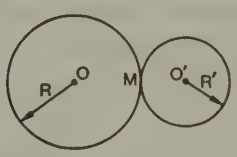
V. TANGENTE.

• (Trigonometría.) *Función tangente.* — Función numérica de variable real definida para todo número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ por $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

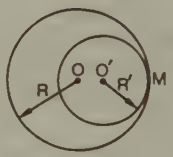
V. RECTÁNGULO (Triángulo).

## Tangentes

• *Circunferencias tangentes exteriormente (resp. interiormente).* — Dos circunferencias coplanarias tangentes C y C′ se denominan tangentes exteriormente si el interior de una está incluido en el exterior de la otra. Se dice que son tangentes interiormente si el interior de una está incluido en el interior de la otra.




$OO' = R + R'$
Exteriormente




$OO' = |R - R'|$
Interiormente

• *Curva de tangentes iguales.* — Nombre que también se da a la tractriz.

• *Curvas tangentes en un punto* M. — Curvas que admiten en M una tangente común.

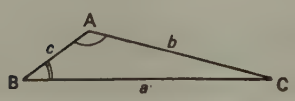
• *Funciones numéricas tangentes.* — Dos funciones numéricas $f$ y $g$ de variables reales son tangentes en $x_0 \in \mathbf{R}$ si:

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$$

tiene por límite 0 cuando $x$ tiende hacia $x_0$.

• *Ley de las tangentes.* — Nombre que se da a veces a la fórmula de trigonometría plana (debida a Viète):

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}}$$




donde A y B son los ángulos que corresponden a los lados $a$ y $b$ de un triángulo.

• *Movimientos tangentes.* — Dos movimientos se denominan tangentes el uno en relación al otro en un instante $t$ si cada uno de ellos tiene el mismo campo de velocidades en el instante $t$. Un movimiento cualquiera de un sólido en $\mathbf{R}^3$ es tangente en cada instante a un movimiento helicoidal.

• *Superficies tangentes en un punto* M. — Superficies que admiten en M el mismo plano tangente.

## Tarry, Gaston

V. OFICIALES (Problema de los treinta y seis).

## Tarski, Alfred (1902-1983)

• *Algebra de Lindenbaum-Tarski.* — V. BOOLE (Algebra de).

• *Teorema o paradoja de Banach-Tarski.* — V. BANACH.

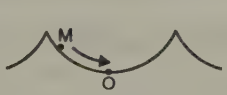
## Tasa

• *Tasa de crecimiento de una función numérica f definida sobre un intervalo* $[\![a, b]\!]$ *de* $\mathbf{R}$ *en un punto* $x_0$ *del intervalo* $]\!]a, b[\![$. — Función numérica T definida para todo $h$ tal que $x_0 + h \in ]\!]a, b[\![$ por:

$$T(h) = \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)).$$

## Tautócrona

• *Curva tautócrona.* — Curva $\Gamma$ tal que el tiempo utilizado por un punto material M al desplazarse sobre $\Gamma$ para alcanzar un punto $O \in \Gamma$ sea independiente del punto de la curva de donde se suelta M con una velocidad inicial nula. La cicloide es tautócrona.




## Tautología

Enunciado cuya función de verdad no toma más que el valor verdadero (V. VERDADERO). Una tautología se llama también un enunciado verdadero. Para algunos, la matemática no sería más que una vasta tautología en el sentido de que los teoremas están implícitamente contenidos en los sistemas de axiomas sobre los que descansan sus demostraciones, se conozca o no una demostración tal. Así, cualquiera que sea la respuesta aportada a la conjetura de Fermat (verdadera, falsa o indecidible), estaría «en la naturaleza de las cosas».

## Taxonomía o taxinomía

Dominio de las matemáticas aplicadas (análisis de datos), consagrada a los problemas de clasificación. V. DATOS (Análisis de).

## Taylor, Brook (1685-1731)

• *Fórmula de Taylor con resto de Lagrange.* — Sea $f$ una función numérica de clase $C^n$ sobre un intervalo cerrado $[\![a, b]\!]$ tal que $f^{(n+1)}$ existe sobre $]\!]a, b[\![$; existe un número $c$ de $]\!]a, b[\![$ tal que:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

El número $R = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ se llama resto de Lagrange. Si $f^{(n+1)}$ es continua sobre $[\![a, b]\!]$ puede escribirse:

$$R = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

V. MAC LAURIN.

• *Fórmula de Taylor con resto de Young.* — Sea $f$ una función numérica definida en un intervalo I de $\mathbf{R}$ que contiene $a$. Si las $n$ primeras derivadas de $f$ existen en $a$, entonces para todo $x$ que pertenezca a I:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a^2)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \varepsilon(x)(x-a)^n$$

donde $\varepsilon$ es una función, llamada resto de Young, tal que $\varepsilon(x)$ tiende hacia 0 cuando $x$ tiende hacia $a$.

• *Fórmula de Taylor para un polinomio* $P \in K[X]$ *de grado n.* — Afirma que, para todo $a \in K$, tenemos:

$$P(X) = P(a) + (X-a)P'(a) + \frac{(X-a)^2}{2!} P''(a) + \cdots + \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

• *Serie de Taylor.* — Sea $f$ una función numérica de variable real definida en un entorno de un número real $x_0$ e indefinidamente derivable en $x_0$. La serie:

$$\Sigma \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

se llama la serie de Taylor de $f$ en $x_0$. Si $f$ es analítica en $x_0$, existe un intervalo abierto I que contiene $x_0$ tal que, para todo $x \in I$, la serie de Taylor de $f$ converge hacia $f(x)$.

**Tchebychev,** Pafnuti Livovic (o: **Chebichev,**

o **Tschbytschew)** (1821-1894)

• *Función de Tchebychev.* — Función $\theta$ definida sobre $\mathbf{R}_+^*$ por:

$$\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \operatorname{Log} p,$$

donde la suma se extiende a todos los enteros primos $p$ tal que $0 < p \leqslant x$. Esta función interviene en la teoría de números.

• *Desigualdad de Bienaymé-Tchebychev.* — V. BIENAYMÉ.

• *Polinomios de Tchebychev.* — Polinomios ortogonales sobre $I = ]-1, 1[$ en relación al peso

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Representados $T_n$, verifican para $(p, q) \neq (0, 0)$:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{T_p(x)\, T_q(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \delta_{p,q} \text{ (símbolo de Kronecker).}$$

Vienen dados por:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2}\, \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x^2)^{n-1/2}]$$

y pueden construirse a partir de las funciones trigonométricas:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Verifican la fórmula de recurrencia $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$, son soluciones de la ecuación diferencial $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ y son coeficientes del desarrollo en serie:

$$\frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(x) t^n.$$

Los primeros polinomios son $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$; $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ...
V. JACOBI, ULTRAESFÉRICOS.

• *Teorema de Tchebychev.* — Da las fórmulas que permiten determinar los contornos impuestos a dos, tres o cuatro trozos de tela para recubrir la superficie de una esfera con la mejor aproximación posible. Más matemáticamente, este problema se expresa por una ecuación en derivadas parciales de Sine-Gordon. Este teorema de geometría diferencial sirve de punto de partida a Hilbert para demostrar su teoría sobre las superficies de curvatura negativa constante.
V. HILBERT. V. SINE-GORDON.

• *Teorema de Tchebychev o postulado de Bertrand.* — Para todo entero $n > 1$, existe un número primo comprendido entre $n$ y $2n$. Más exactamente, Tchebychev probó en 1851 que si $\pi(x)$ es el número de los números primos inferiores o iguales a $x$, tenemos:

$$0{,}9 \frac{x}{\operatorname{Log} x} \leqslant \pi(x) \leqslant 1{,}2 \frac{x}{\operatorname{Log} x}$$

para todo $x \geqslant 30$. Este resultado ha sido mejorado después y esas cuestiones todavía constituyen objeto de numerosos trabajos. Se sabe, por ejemplo, que:

$$\frac{3x}{\operatorname{Log} x} < \pi(2x) - \pi(x) < \frac{7x}{5 \operatorname{Log} x} \text{ para todo } x \geqslant 21.$$

Tchebychev había mostrado desde 1848 que si $\dfrac{\pi(x) \operatorname{Log} x}{x}$ tiende hacia un límite (cosa que él no sabía probar), entonces ese límite es 1.

## Tchudnovsky

V. CHOODNOVSKY, Grigory.

## Teja

• *Teja de un pavimento de un plano euclidiano.* — Sinónimo de pavimentado. V. PAVIMENTO.

## Telegrafistas

• *Ecuaciones en derivadas parciales de los telegrafistas.* — Ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial v}{\partial t} + bv \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial t} + u;$$

por eliminación $u$ y $v$ resultan ser solución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = ac \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (a + bc) \frac{\partial w}{\partial t} + bw.$$

Estas ecuaciones intervienen en el estudio de la propagación de la diferencia de potencial $u$ y de la intensidad $v$ de una corriente sobre una línea de transmisión.

## Tender hacia

Considerada fuera de contexto, las expresiones «$x$ tiende hacia $a$» o «$f(x)$ tiende hacia $\lambda$» no tienen sentido. Por el contrario, si $f$ es una función numérica de variable real, «$f(x)$ tiende hacia $\lambda$ cuando $x$ tiende hacia $a$ (o hacia el infinito)» es sinónimo de «$f(x)$ tiene por límite $\lambda$ cuando $x$ tiende hacia $a$ (o hacia el infinito)». Por extensión, se define la expresión «$f(x)$ tiende hacia el infinito cuando $x$ tiende hacia $a$ (o hacia el infinito)».
V. LÍMITE.

## Tensor

Elemento de un producto tensorial.

• *Tensor $p$ veces covariante y $q$ veces contravariante con $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.* — Sean

A un anillo conmutativo unitario, M un A-módulo y M* su dual; se pone $E_i = M$ para $1 \leqslant i \leqslant p$ y $F_j = M^*$ para $1 \leqslant j \leqslant q$. Un elemento:

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{p} E_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i=1}^{q} F_j\right)$$

se denomina un tensor $p$ veces covariante y $q$ veces contravariante o tensor de especie $(p, q)$. Si $q = 0$ (resp. $p = 0$), el tensor se denomina covariante (resp. contravariante). Si se supone M módulo libre de tipo finito, de base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tal tensor T puede expresarse sobre la base formada de los

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_q}^*$$

por componentes que se representan:

$$T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \in A$$

también llamadas coordenadas o coeficientes del tensor T. Durante mucho tiempo, y aún en la actualidad para los físicos, un tensor es el dato de tales componentes, y su preocupación es conocer su comportamiento en el cambio de bases, aspecto que les hace considerar al cálculo tensorial como un «super» cálculo matricial.

- *Tensor de inercia.* — V. INERCIA.
- *Tensor de Riemann-Christoffel.* — V. RIEMANN.

## Tensorial

- *Cálculo tensorial.* — Reglas de cálculo práctico en los productos tensoriales que se remiten, bien al estudio de cambio de bases (V. TENSOR), bien a consecuencias triviales de las definiciones, por ejemplo:

$$x \otimes (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \otimes y) + \beta(y \otimes z).$$

- *Functor producto tensorial.* — Dado un anillo unitario conmutativo A y un A-módulo M, el functor producto tensorial de **Mod**(A) en **Mod**(A) es definido por $N \mapsto N \otimes_A M$ y para toda aplicación A-lineal $u : N \to N'$ por $u \mapsto u \otimes \mathrm{id}_M$. Este functor covariante simbolizado por $- \otimes_A M$ es el adjunto a izquierda en la categoría de los A-módulos del functor $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ propiedad que se deduce del isomorfismo canónico de:

$$\text{A-módulo } \mathrm{Hom}_A(X \otimes_A Y, Z) \to \mathrm{Hom}_A(X, \mathrm{Hom}_A(Y, Z))$$

donde X, Y, Z son A-módulos.
V. HOM, ADJUNTO.

- *Producto tensorial de n módulos* $E_1, \dots, E_n$ *sobre un anillo conmutativo unitario* A. — El par $(E_1 \otimes_A \dots \otimes_A E_n, \varphi)$, donde $E_1 \otimes_A \dots \otimes_A E_n$ es un A-módulo y $\varphi : E_1 \times \dots \times E_n \to E_1 \otimes_A \dots \otimes_A E_n$ una aplicación multilineal, tales que, si M es un A-módulo y $\psi : E_1 \times \dots \times E_n \to M$ una aplicación multilineal, existe una única aplicación lineal $\sigma : E_1 \otimes_A \dots \otimes_A E_n \to M$ tal que $\psi = \sigma \circ \varphi$. Por tanto, es la solución de un problema universal (V. UNIVERSAL).

$$E_1 \times \cdots \times E_n \xrightarrow{\varphi} E_1 \otimes_A \cdots \otimes_A E_n$$

Por abuso, $E_1 \otimes_A \cdots \otimes_A E_n$ se denomina producto tensorial de los A-módulos $E_i$(1). También se lo representa por $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i$(2). La imagen por $\varphi$ de $(x_1, \ldots, x_n)$, simbolizada $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ se llama producto tensorial de los vectores $x_i$. Si E y F son dos A-módulos libres que admiten respectivamente $(e_i)_{i\in I}$ y $(f_j)_{j\in J}$ por bases, entonces $E \otimes F$ es un A-módulo libre que admite $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ por bases. Por tanto, si A es un cuerpo:

$$\dim_A(E \otimes F) = (\dim_A E)\ (\dim_A F).$$

• *Producto tensorial de dos aplicaciones lineales* $u: E \to E'$ y $v: F \to F'$. — La aplicación lineal $w: E \otimes_A F \to E' \otimes_A F'$ definida por $w(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$ y también representada por $w = u \otimes v$.

## Teorema

• *Teorema de una teoría.* — Enunciado verdadero.
V. TEORÍA.

## Teoría

Datos de signos, de alfabetos, de reglas de formación de ensamblajes y de enunciados, de axiomas y de reglas de deducción que permiten decir que ciertos enunciados son verdaderos (teoremas de la teoría). Ejemplos: el cálculo proposicional o la teoría de los conjuntos.
V. AUTÓMATAS, AXIOMATIZAR, CATEGORÍAS, CATEGÓRICA, COMPLETA, COMUNICACIÓN, CONJUNTOS, ELÉCTRICOS (Circuitos), ESPECTRAL, GRAFOS, INFORMACIÓN, INTEGRACIÓN, JUEGOS, MEDIDA, MODELO, NUDOS, PROBABILIDADES, SEÑAL, TRABAJO, UTILIDAD.

## Tera

V. MÚLTIPLE.

## Tercer

• *Ecuación general de tercer grado.* — Ecuación de la forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

donde los $a_i$ son números complejos. Poniendo $y = x + \frac{1}{3}a_1$, se obtiene la ecuación $y^3 + py + q = 0$ cuyas raíces vienen dadas por la fórmula de Cardano:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

La ecuación general del tercer grado es resoluble, por tanto, por radicales. El estudio de su solución ha jugado un papel importante al mostrar que no es posible evitar la noción y el cálculo sobre números complejos incluso si las tres raíces son reales (V. *n*-ÉSIMO, RESOLUBLE).

• *Tercer cuartil.* — V. CUARTILES.

## Tercio

• *Principio del tercero excluido.* — V. EXCLUIDO.

## Terminal

• *Extremo terminal de un arco de un grafo.* — V. ARCO.

(1) $E \otimes_A F$ se lee «E tensorial F».

(2) $\bigotimes_{i=1}^{\cdot} E_i$ se lee «Producto tensorial de los $E_i$».

## Término

• *Término de un par o de una n-upla.* — V. UPLA.

• *Término general de una sucesión o de una serie.* — V. SERIE, SUCESIÓN.

• (Lógica.) Ensamblaje $t$ para el que existe una sucesión finita de ensamblajes $t_0, t_1, ..., t_n$ con $t_n = t$ y tales que para cada $i \leqslant n$ tengamos una de las condiciones siguientes:

1) $t_i$ es una variable;
2) $t_i$ es un individuo;
3) existe un signo funcional $f$ de peso $p$ e $i_1, ..., i_p < i$ tales que $t_i = f(t_{i_1}, ..., t_{i_p})$.

V. CERRADO.

• *Término de una aplicación* $f: E \to E$. — El conjunto F.

• *Término de un morfismo* $f: E \to E$. — El objeto F.

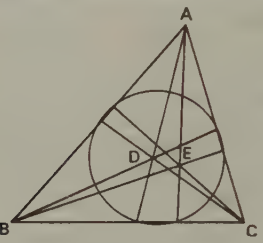
## Ternario

• *Relación ternaria.* — V. *n*-ARIA.

## Terquem, Olry (1782-1862)

• *Problema de Terquem.* — ¿Cuántas aplicaciones estrictamente crecientes $f$ de $E = \{1, 2, ..., k\}$ existen en $F = \{1, 2, ..., n\}$ $(k \leqslant n)$ tales que $f(x)$ y $x$ sean de igual paridad para todo $x \in E$? La respuesta es $\binom{q}{k}$, donde $q$ es el más grande entero inferior o igual a $\frac{1}{2}(n + k)$.

• *Teorema de Terquem.* — El círculo que pasa por los pies de tres cevianas concurrentes determina otros tres puntos que son los pies de otras tres cevianas concurrentes. Tal círculo se denomina círculo de Terquem y los seis puntos precedentes situados sobre ese círculo son puntos de Terquem.




## Tesséract

Cubo de $\mathbf{R}^4$, también llamado hipercubo. A diferencia del cubo, el problema de su duplicación (V. DUPLICACIÓN) con la regla y el compás posee una solución.

## Test

• *Test de hipótesis.* — Un problema importante en estadísticas es poder conocer los riesgos de errores que se pueden cometer aceptando o rechazando una hipótesis formulada a priori. De forma más precisa, verificar una hipótesis inicial $H_0$, llamada hipótesis nula a partir de los resultados de un segundo sondeo es:

1) definir y calcular un parámetro que refleja la desviación entre los resultados observados y los resultados esperados bajo la hipótesis $H_0$;
2) determinar, en el caso en que $H_0$ sea verdadero, la probabilidad de obtener esa desviación;
3) aceptar o rechazar la hipótesis según la probabilidad hallada anteriormente.

La probabilidad $\alpha$ de equivocarse rechazando $H_0$ mientras $H_0$ es verdadera se denomina riesgo de primera especie. La probabilidad $\beta$ de equivocarse al aceptar $H_0$ mientras $H_0$ es falsa se denomina riesgo de segunda especie. La probabilidad de no equivocarse al aceptar $H_0$ es, por tanto, $1 - \alpha$. La probabilidad de no equivocarse al rechazar $H_0$ es $1 - \beta$.

• *Test del* $\chi^2$. — V. JI o CHI.

## Tetraédricas

• *Coordenadas tetraédricas relativamente a un tetraedro.* — Generalización de las coordenadas trilineales de $\mathbf{R}^2$ en el espacio $\mathbf{R}^3$: sean $a_iX + b_iX + c_iZ + d_iT = 0$ ($i = 1, 2, 3$ ó 4), las ecuaciones en coordenadas homogéneas de las caras del tetraedro. A todo cuadruplete $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbf{R}^4$ corresponde un único punto M cuyas coordenadas homogéneas $(x, y, z, t)$ constituyen la única solución del sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_4 = a_4x + b_4y + c_4z + d_4t. \end{cases}$$

El cuadruplete $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ se denomina sistema de coordenadas tetraédricas de M.

## Tetraedro

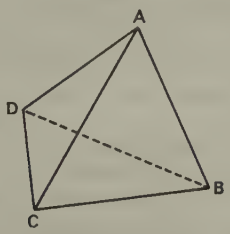
Poliedro de cuatro vértices. Es una pirámide que admite que seis aristas y cuatro caras que son triángulos. Cada par de caras tienen una arista común, no poseen (como los poliedros de Czaszar y Szilassi) ninguna diagonal. Existen tetraedros regulares; sus cuatro caras son triángulos equiláteros isométricos. Aunque el tetraedro sea la generalización en $\mathbf{R}^2$ de la noción del triángulo en $\mathbf{R}^3$, las propiedades del triángulo no se extienden todas al tetraedro; las medianas de un tetraedro son concurrentes, pero sus alturas no lo son por regla general.
V. (COLMO), MÖBIUS.

En función de la longitud de la arista a la superfície del tetraedro es:

$$S = \sqrt{3}\,a^2 = 1{,}7321 \cdot a^2$$

y su volumen es:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = 0{,}1179 \cdot a^3.$$




Véase en VOLÚMENES estas medidas en función del radio de la esfera circunscrita.

## tg

Abreviatura de tangente.

## tg$^{-1}$

Notación que designa en informática la función Arctg.

**th**

Abreviatura de tangente hiperbólica.
V. HIPERBÓLICA.

**Thalweg**

• *Líneas de thalweg de una superficie.* — Los puntos de una curva de nivel en los que la pendiente de la superficie admite un maximum relativo describen, cuando la curva de nivel varía, curvas llamadas líneas de thalweg o de mayor pendiente o de divisoria de las aguas.
V. DIVISORIA (Líneas de).

**Thompson,** John G. (1932- )

• *Teorema de Feit-Thompson.* — V. FEIT.

**Thue,** Axel (1863-1922)

• *Problema de Thue.* — V. PALABRAS (Problemas de las).

**Tierra**

• *Línea de tierra.* — V. DESCRIPTIVA.

**Tietze,** Heinrich Franz Friedrich (1880-1964)

• *Teorema de Tietze-Urysohn.* — V. URYSOHN.

**Tihonov**

V. TYCHONOV.

**Tijdeman,** Robert (1943- )

• *Teorema de Tijdeman.* — Existe una constante C tal que $y^n < x^m < C$ para toda solución de la ecuación de Catalán $x^m - y^n = 1$. Esta ecuación no tiene, por lo tanto, más que un número finito de soluciones. Una primera evaluación de M. Langevin da $C \leqslant \exp(\exp(\exp 230))$. Ese gran número (exp 230 se escribe ya con 100 cifras) excluye el empleo de un ordenador para verificar todas las soluciones que pueden considerarse para esa ecuación.

**Tipo**

• *Tipo de una gramática formal.* — V. CHOMSKI (Clasificación de).

• *Tipo de orden.* — Dos conjuntos bien ordenados tienen igual tipo de orden si son isomorfos. Si existe un isomorfismo tal, es único. La relación entre conjuntos así definida es reflexiva, simétrica y transitiva. Si se asocia a un conjunto bien ordenado E su ordinal $\alpha(E)$ dos conjuntos bien ordenados son isomorfos (o tienen igual tipo de orden) si y solamente si $\alpha(E) = \alpha(F)$.

• *Desviación típica.* — V. DESVIACIÓN.

• *Grupo o módulo de tipo finito.* — V. FINITO.

• *Nudos de igual tipo.* — Dos nudos se denominan de igual tipo si son isótopos o si uno es isótopo al simétrico del otro en relación a un plano. Dos nudos de igual tipo se llaman también equivalentes.
V. TRIVIAL.

## Topología o Topología general

Rama de las matemáticas nacida del estudio sobre las superficies y en el espacio usual de las propiedades conservadas por una deformación continua y ligadas a la noción de entornos. Ciertos problemas de *analysis situs* como el de los siete puentes marcan en el siglo XVII los verdaderos inicios de la topología y de la teoría de los grafos que pronto se convirtieron en dos dominios autónomos. La topología ha permitido, sobre todo en geometría, aclarar un gran número de hipótesis superfluas. Limitada al principio a conjuntos de puntos, de rectas o de círculos, considerada como una geometría particular cuyo grupo es el de los homorfismos, fue aplicada después a conjuntos de funciones (análisis funcional). En 1914, Hausdorff definió axiomáticamente las topologías, lo que permitió luego el estudio de espacios no necesariamente metrizables. En la actualidad, la topología constituye una de las bases del análisis y de la geometría y juega un papel importante en la mayoría de las ramas de las matemáticas: álgebra conmutativa, grafos, etc. A veces, está en relaciones estrechas con la lógica formal y con la lógica matemática.
V. ALGEBRAICA, COMBINATORIA, CONJUNTISTA.

• *Topología sobre un conjunto* E. — Conjunto $\mathcal{O}$ de partes de E que verifica las propiedades siguientes:

1) la reunión de toda familia de elementos de $\mathcal{O}$ pertenece a $\mathcal{O}$;
2) la intersección de dos elementos de $\mathcal{O}$ pertenece a $\mathcal{O}$;
3) E y la parte vacía $\phi$ pertenecen a $\mathcal{O}$.

Los elementos de $\mathcal{O}$ se denominan abiertos o partes abiertas de la topología. El complementario en E de un abierto se denomina un cerrado o una parte cerrada de la topología. La topología se dice entonces definida por los abiertos; es posible, de forma lógicamente equivalente, definir una topología sobre un conjunto E dando las partes cerradas o dando los entornos de E.

V. DÉBIL, DISCRETA, SSPECTRAL, ENGENDRADA, ENTORNOS (Axioma de los), CERRADOS (Axioma de los), FINA, FUERTE, GROSERA, INDUCIDA, *p*-ÁDICA, SEPARADA, TOPOLÓGICO (Espacio) (Axioma de los), ZARISKI.

• *Topología asociada a una distancia sobre un espacio métrico* (E, *d*). — Topología sobre E cuyos abiertos son las partes P de E tales que para todo $x$ perteneciente a P existe una bola abierta centrada en $x$ e incluida en P.

• *Topología asociada a una norma (resp. a un valor absoluto) sobre un espacio vectorial normado (resp. un anillo valuado).* — Topología asociada a la distancia deducida de la norma (resp. del valor absoluto). Provisto de esta topología, el espacio vectorial (resp. el anillo) es topológico.

• *Topología de la convergencia en media.* — V. MEDIA.

• *Topología de la convergencia en media cuadrática.* — V. CUADRÁTICA.

• *Topología de la convergencia simple (resp. uniforme).* — V. SIMPLE, UNIFORME.

• *Topología producto.* — V. TOPOLÓGICO (Producto).

• *Topología cociente.* — V. TOPOLÓGICO (Cociente).

## Topológica

• *Algebra topológica.* — Estudio de los grupos, anillos, módulos topológicos.

• *Transformación topológica de una figura* F *sobre una figura* F'. — Homeomorfismo de F sobre F'.

• *Variedad topológica de dimensión n.* — Espacio topológico separado en que todos los puntos poseen un entorno homeomorfo a $\mathbf{R}^n$.

## Topológicamente

• *Curvas (resp. superficies) topológicamente equivalentes.* — V. EQUIVALENTES.

• *Distancias topológicamente equivalentes.* — V. EQUIVALENTES.

• *Familia topológicamente generatriz.* — Familia total.

## Topológico

• *Anillo topológico.* — Anillo A provisto de una topología tal que las aplicaciones $(x, y) \mapsto x - y$ y $(x, y) \mapsto xy$ de $A \times A$ en A sean continuas. Si A es un cuerpo y si además $x \mapsto x^{-1}$ es continua de A en A, se dice que A es un cuerpo topológico.

• *Cociente topológico o espacio topológico cociente.* — Sea E un espacio topológico y sea $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia sobre E. Se llama cociente topológico al conjunto cociente $E/\mathcal{R}$ provisto de la topología, llamada topología cociente, definida de la forma siguiente: los abiertos (resp. los cerrados) de $E/\mathcal{R}$ son las partes V de $E/\mathcal{R}$ tales que $s^{-1}(V)$ sea un abierto (resp. un cerrado) de E; la aplicación $s$ es la suprayección canónica de E sobre $E/\mathcal{R}$.

• *Cuerpo topológico.* — V. TOPOLÓGICO (Anillo).

• *Dual topológico de un espacio vectorial topológico* E. — Espacio vectorial de las formas lineales continuas sobre E.

• *Espacio topológico.* — Consta de un conjunto E y de una topología sobre ese conjunto. Por abuso, E se denomina entonces un espacio topológico. Los espacios métricos, los espacios vectoriales normados son espacios topológicos. V. ABIERTO, ACCESIBLES, ALEXANDROV (Compactificado de), BANACH, CE-

RRADO, COMPACTO, COMPLEMENTADO, COMPLETO, CONEXO, CONVEXO, CUASI-COMPACTO, DISCONTINUO, DISCRETO, ENTORNO, EUCLÍDEO, FRÉCHET, HAUSDORFF, HERMITIANO, HILBERT, KOLMOGOROV, MÉTRICA, METRIZABLE, NORMADO, NORMAL, OF, PARACOMPACTO, PRECOMPACTO, PREHILBERTIANO, PROFINITO, REGULAR, SEPARADO, STONE-CECH (Compactificado de), ULTRAMÉTRICO.

• *Espacio vectorial topológico.* — V. TOPOLÓGICO (Módulo).

• *Grafo topológico.* — Grafo cuyos vértices son puntos de una superficie $\Sigma$ y cuyas aristas son arcos de curvas trazadas sobre $\Sigma$ que no se encuentran fuera de sus extremos.
V. PLANARIO.

• *Grupo topológico.* — Grupo G provisto de una topología tal que la aplicación $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ en G sea continua.

• *Invariante topológico.* — Una propiedad de un espacio topológico E se denomina un invariante topológico si esta propiedad es verificada para todo espacio topológico F homeomorfo a E. El número cromático de una superficie es un invariante topológico.

• *Módulo topológico sobre un anillo topológico* A. — A-módulo M provisto de una topología tal que M tenga una estructura de grupo aditivo topológico y tal que la aplicación $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ de $A \times M$ en M sea continua. Si A es un cuerpo conmutativo, M es un espacio vectorial llamado Espacio Vectorial Topológico.

• *Producto topológico de una familia de espacios topológicos* $(E_i)_{i \in I}$. — Se denomina producto topológico de la familia $(E_i)_{i \in I}$ al producto cartesiano $E = \prod_{i \in I} E_i$ provisto de la topología, llamada topología producto, definida de la forma siguiente: los abiertos de E son reuniones cualesquiera de partes, llamadas abiertos elementales, de la forma $\prod_{i \in I} O_i$, donde $O_i$ es un abierto de $E_i$ diferente de $E_i$ para un conjunto finito de índices $i$ e igual a $E_i$ para los otros índices $i$.
V. TYCHONOV.

• *Sub-espacio topológico de un espacio topológico* E. — Parte A de E provista de la topología inducida. Todo abierto del espacio topológico A es un abierto de E si y solamente si A es un abierto de E.

## Torbellino

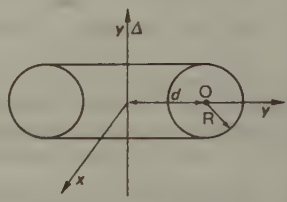
Sinónimo de rotacional empleado antiguamente en el siglo XIX por los físicos y mecánicos. Para algunos, el torbellino es $1/2 \operatorname{rot} \vec{V}$.

## Torneo

1-grafo completo y antisimétrico. Simboliza el resultado de un torneo en el que cada jugador se ha enfrentado una sola vez a cada uno de los demás jugadores.

## Toro

(Usual.) *Toro de revolución de* $\mathbf{R}^3$. — Superficie $\Sigma$ de $\mathbf{R}^3$ engendrada por la rotación de un círculo $\Gamma$ de centro O y de radio R alrededor de una recta $\Delta$




que no pasa por su centro. Sea $d$ la distancia de $\Delta$ a O. Si la recta $\Delta$ no encuentra el círculo $\Gamma$ (entonces $d > \mathrm{R}$), esta superficie que tiene el aspecto de una «cámara de aire» es homeomorfa a $\mathbf{T}^2$. En relación a un sistema de referencia ortonormado cuyo eje de las cotas coincide con el eje de revolución y cuyos ejes de las abscisas y de las ordenadas están en el plano del círculo descrito por O, su ecuación cartesiana es $(d - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = \mathbf{R}^2$; admite por ecuaciones paramétricas:

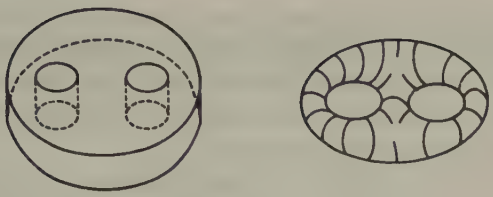
$$x = \cos\beta(d + \mathrm{R}\cos\alpha)$$
$$y = \operatorname{sen}\beta(d + \mathrm{R}\cos\alpha)$$
$$z = \mathrm{R}\operatorname{sen}\alpha$$

donde $(\alpha, \beta)$ describe $[\![0, 2\pi]\!] \times [\![0, 2\pi]\!]$.
Su área es $4\pi^2 d\mathrm{R}$ y el volumen del sólido que delimita es $2\pi^2 d\mathrm{R}^2$.
V. COLORACIÓN, MERIDIANOS, SZILASSI (Poliedro de), VILLARCEAU.

• *Toro de una dimensión.* — Grupo topológico $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$; es homeomorfo al círculo $x^2 + y^2 = 1$ del plano numérico $\mathbf{R}^2$.

• *Toro de n dimensiones.* — Grupo topológico $\mathbf{T}^n$, donde $\mathbf{T}$ es el toro de una dimensión. Es un espacio compacto, conexo y localmente conexo. El toro de dos dimensiones $\mathbf{T}^2$ es homeomorfo al toro de revolución de $\mathbf{R}^3$.

• *Toro de n agujeros de* $\mathbf{R}^3$. — Todas las superficies cerradas orientables de género $n$ son homeomorfas. Entre ellas figuran las superficies llamadas toros de $n$ agujeros cuya forma difiere poco de la superficie aparente de un disco espeso agujereado por $n$ agujeros. El toro de revolución es un toro de un agujero. Véase a continuación un toro de dos agujeros, también llamado bretzel.

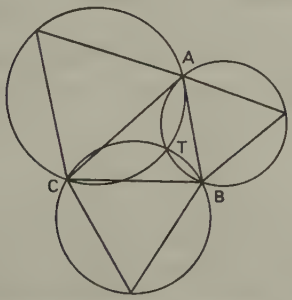


• *Toro de Klein.* — V. KLEIN.

• *Doble toro.* — Toro de dos agujeros.

## Torricelli, Evangeliste (1608-1647)

• *Círculos de Torricelli de un triángulo* ABC. — Círculos circunscritos a los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre cada lado del triángulo ABC. Estos círculos tienen un punto común que, en el caso de un triángulo acutángulo, es el punto de Torricelli del triángulo.




• *Punto de Torricelli de un triángulo* ABC. — V. SCHRUTTKA (Teorema de).

## Torsión

• *Torsión de un arco geométrico* $\Gamma$ *de clase* $C^k$ $(k \geqslant 3)$ *sin puntos estacionarios definido sobre un intervalo* I *por* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{h(s)}$ *donde s es la abscisa curvilínea.* — Si $\vec{n}$ es el vector normal y $\vec{b}$ el vector binormal en M, entonces $d\vec{b}/ds$ y $\vec{n}$ son colineales. Se pone:

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s)\vec{n} \text{ con } \tau(s) \in \mathbf{R}.$$

La función $\tau$ así definida es la torsión de $\Gamma$. La de una curva plana es nula. V. GEODÉSICA.

• *Torsión en un punto* M *de un arco geométrico* $\Gamma$ *de torsión* $\tau$. — Número real $\tau(s)$ donde $s$ es la abscisa curvilínea de M.

• *Módulo de torsión de un módulo* M *sobre un anillo íntegro* A. — Submódulo de M constituido por los elementos de M cuyo anulador es diferente de $\{0\}$.

• *Módulo sin torsión.* — Módulo cuyo módulo de torsión está reducido a $\{0\}$.

• *Radio de torsión en* M *de un arco geométrico* $\Gamma$ *tal que la torsión* $\tau(s)$ *de* $\Gamma$ *en* M *no sea nula.* — Número real $T(s) = \frac{1}{\tau(s)}$.

## Torsor

Conjunto de vectores deslizantes. La importancia de la noción de torsor se debe a dos hechos:

— el campo de las velocidades de un sólido móvil es en cada instante el campo de los momentos de cierto torsor;

— el movimiento de un sólido está determinado enteramente por el torsor de las fuerzas exteriores que le son aplicadas.

V. AUTOMOMENTO, CENTRAL (Eje), EQUIVALENTES, MOMENTO, RESULTANTE.

• *Elementos de reducción de un torsor.* — V. REDUCCIÓN.

## Torres

• *Torres de Hanoï.* — V. HANOÏ.

## Tortuga

V. ZENON.

## Total

• *Anillo total de las fracciones de un anillo* A. — Anillo de las fracciones por relación a la parte formada por los elementos simplificables de A. Si A es íntegro, el anillo total es el cuerpo de las fracciones de A.
V. FRACCIONES.

• *Curvatura total o curvatura de Gauss en un punto* M *de una superficie.* — Número real $(1/R_1)(1/R_2)$, donde $R_1$ y $R_2$ son los radios de curvaturas principales en M.
V. NEGATIVA, NULA, POSITIVA.

• *Familia total de elementos de un espacio vectorial normado* E. — Familia $(e_i)_{i\in I}$ de vectores de E que engendra un espacio vectorial denso en E.

• *Grado total de un polinomio en varias indeterminadas.* — V. POLINOMIO.

• *Orden total sobre un conjunto* E. — Orden sobre E tal que dos elementos cualesquiera de E sean comparables.

- *Sistema total.* — Sinónimo de familia total.
- *Variación total de una función de variación acotada.* — V. ACOTADA.

## Totales

- *Axiomas de probabilidades totales.* — V. KOLMOGOROV.
- *Teorema o fórmula de las probabilidades totales.* — Sea $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$ un sistema completo de sucesos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. El teorema o fórmula de las probabilidades totales afirma que para todo suceso A se tiene:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A)$$

donde $P_{B_i}(A)$ designa la probabilidad condicional de A relativa a $B_i$. Se llama igualmente teoremas de probabilidades totales a la igualdad de Poincaré.

## Totalmente

- *Conjunto totalmente ordenado.* — Conjunto provisto de un orden total.
- *Espacio topológico totalmente discontinuo.* — V. DISCONTINUO.

## Trabajo

- *Teoría de la organización del trabajo.* — Dominio de las matemáticas aplicadas a la organización del trabajo en las diferentes actividades humanas. Esta teoría asocia la utilización de algoritmos y de combinatoria.
V. ALGORITMO, CRÍTICA, HU, PERT, PROCESADOR.
- *Trabajo de una fuerza.* — Se llama trabajo de una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un arco parametrado $\Gamma$ a la circulación de $\vec{F}$ sobre $\Gamma$. Si la fuerza se aplica a un elemento sólido (resp. fluido), se emplea preferentemente la palabra trabajo (resp. circulación).
De manera elemental, en mecánica, un trabajo es el producto de una longitud por una fuerza. Es una noción que tiene igual estructura y las mismas dimensiones que la noción de energía que la generaliza en física.

## Tractriz

Curva cuyo nombre procede de «tirar». Intuitivamente, si sobre un suelo horizontal se ata un objeto a una extremidad de bramante tensa y se tira desde el otro extremo, en línea recta, y perpendicularmente a la posición horizontal del bramante, el objeto describe una tractriz. Esta curva es una envolvente de cadeneta. Sea $y = \operatorname{ch} x$ la ecuación cartesiana de la cadeneta. La tractriz admi-

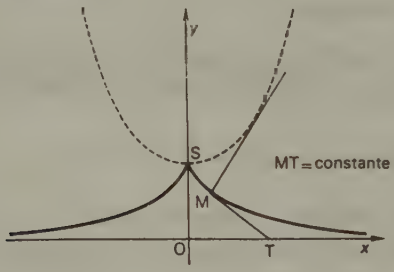
te el punto S de coordenadas (0, 1) como punto de retroceso. Puede ser definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x = \operatorname{Log}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \operatorname{tg}\theta\right) - \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad y = \cos\theta$$

o también por:

$$x = t - \operatorname{th} t \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Admite el eje de las abscisas como asíntota. Se la llama a veces curva de las tangentes iguales para expresar que la longitud de los segmentos de tangentes limitados por la curva y a la asíntota es constante.
V. PSEUDO-ESFERA.




## Transcendente

• *Elemento transcendente sobre un cuerpo* K. — Elemento de una extensión de K raíz de ningún polinomio no nulo de K[X].
V. ALGEBRAICO.

• *Extensión transcendente de un cuerpo* K. — Extensión de K que no es algebraica.

• *Número transcendente.* — Número complejo no algebraico, es decir, que no es raíz de ningún polinomio $P \in \mathbf{Q}[X]$. Si $\pi$ y $e$ son los dos números transcendentes más «célebres», los primeros en ser conocidos como tales fueron los números de Liouville en 1844 (V. LIOUVILLE). Aunque ahora se conozcan explícitamente numerosas familias de números transcendentes $2^{\sqrt{2}}$, $\operatorname{Log} 2$, etc. (V. BAKER), y que el cardinal del conjunto de los números transcendentes sea considerablemente mayor que el de los números algebraicos $\overline{\mathbf{Q}}$ (el primero tiene la potencia del continuo, mientras que el segundo es solamente numerable (V. CANTOR)), en la práctica, para muchos números notables, no se sabe demostrar su transcendencia eventual. Por ejemplo, se sabe que de los números $e + \pi$ y $e\pi$ uno de los dos por lo menos es transcendente, pero se ignora cuál de ellos; se conjetura incluso que los dos son transcendentes. Se sabe (V. CHOODNOVSKY) que $\Gamma(1/3)$ y $\Gamma(1/4)$ son transcendentes, pero se ignora si ocurre lo mismo con $\Gamma(1/5)$. Igualmente se ignora si la constante de Euler es o no un número transcendente.

El ejemplo de número transcendente más fácil de memorizar es, sin duda, el número de Mahler, 0,1234567891011121314... Este dominio de la teoría de los números conoce en la actualidad una intensa actividad.

## Transcendentes

• *Curvas o funciones transcendentes.* — Curvas o funciones no algebraicas. Ejemplos: la exponencial, la logarítmica, la función seno.

## Transfinita

• *Aritmética transfinita.* — Propiedades del cálculo sobre los ordinales y los cardinales transfinitos. Estas dos aritméticas poseen propiedades diferentes y que difieren igualmente de la aritmética usual. Por ejemplo:

$$\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \ldots < \omega + \omega < \omega + \omega + \omega < \ldots$$
$$< \omega^2 < \omega^3 < \ldots < \omega^\omega < \ldots$$

Mientras que si $\beta < \alpha$, tenemos:

$$n + \aleph_\alpha = \aleph_\beta + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha^n \text{ para todo } n \geqslant 1.$$

Para los cardinales y los ordinales, la adición y la multiplicación son asociativas; por el contrario, si la adición de los cardinales es conmutativa:

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\beta + \aleph_\alpha$$

la de los ordinales no lo es; tenemos, por ejemplo, $1 + \omega = \omega$, mientras que $\omega + 1 > \omega$.

• *Inducción o recurrencia transfinita.* — V. INDUCCIÓN.

## Transfinito

(Usual.) Infinito, más allá de finito.

• *Cardinal u ordinal transfinito.* — Cardinal u ordinal infinito. Más exactamente se define por recurrencia transfinita los ordinales $\aleph_\alpha$, donde $\alpha$ es un ordinal de la forma siguiente:

— $\aleph_0$ es el más pequeño ordinal infinito;
— $\aleph_\alpha$ es el más pequeño ordinal que no está en biyección con ninguno de los ordinales $\aleph_\beta$ cuando $\beta < \alpha$.

Los ordinales $\aleph_\alpha$ son cardinales infinitos que se denominan los cardinales transfinitos.

## Transformación

Empleado, sobre todo en geometría y en topología, como sinónimo de función (función del plano o del espacio en él mismo): homotecia, translación, semejanza, etc. Se habla así de transformación lineal o de transformación idéntica.

V. CONFORME, EULER, FOURIER, GEOMÉTRICA, HOMOGRÁFICA, INVERSA, LAPLACE, LEGENDRE, NATURAL, ORTOGONAL, PLANCHEREL, TOPOLÓGICA.

• *Transformación por polares recíprocas.* — V. POLARES.

## Transformaciones

• *Grupo de transformaciones.* — Conjunto de transformaciones provisto de una estructura de grupo para la ley de composición de las aplicaciones; ejemplo: el grupo lineal.

• *Producto de dos transformaciones.* — V. PRODUCTO.

## Transformada

• *Transformada por dualidad de una curva algebraica (resp. de una superficie algebraica).* — V. DUALIDAD.

• *Transformada de Fourier.* — V. FOURIER.

• *Transformada de Fourier-Plancherel.* — V. PLANCHEREL.

• *Transformada de Laplace.* — V. LAPLACE.

## Transformado

Imagen de un elemento por una transformación.

## Transitiva

• *Acción simplemente transitiva.* — V. SIMPLEMENTE.

• *Relación transitiva.* — Relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto E tal que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ impliquen $x\mathcal{R}z$ para todo triplete $(x, y, z)$ de $E^3$. Las relaciones $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ en R, la inclusión en $\mathfrak{P}$ (E) son transitivas; la relación de ortogonalidad en el conjunto de las rectas del plano no es transitiva.

## Transitivamente

• *Grupo que opera transitivamente.* — Grupo de operadores sobre E tal que, para todo par $(x, y) \in E^2$, existe $\alpha \in G$ que verifica $y = \alpha x$.

## Transitividad

• *Transitividad de una relación binaria.* — Propiedad de la relación de ser transitiva.

## Transitivo

• *Cierre transitivo de un vértice x de un 1-grafo.* — Conjunto $\tau(x)$ de vértices $y$ para los que existe un camino de longitud maximal de origen $x$ y de extremo $y$.

• *Cierre transitivo de un 1-grafo* $G = (S, U)$. — Grafo $\tau(G) = (S, \tau(U))$, donde $(x, y) \in \tau(U)$ si y solamente si $y$ pertenece al cierre transitivo de $x$. El grafo $\tau(G)$ es el «más pequeño» grafo transitivo que admite G como grafo parcial.

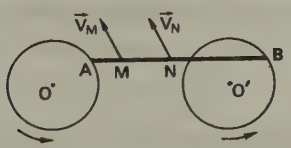
• *Conjunto transitivo.* — Conjunto $\alpha$ tal que todo elemento de $\alpha$ es una parte de $\alpha$; el conjunto $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$ y más generalmente los ordinales son conjuntos transitivos.

• *1-grafo transitivo.* — 1-grafo (S, U) tal que $(x, y) \in U$ y $(y, z) \in U$ implican $(x, z) \in U$.

• *Sub-grupo transitivo de un grupo* G *que opera sobre un conjunto* E. — Subgrupo H de G que opera transitivamente sobre E.

## Translación

• *Movimiento de translación de un sólido* S. — Movimiento tal que todo bipunto del espacio móvil ligado a S queda equipolente, en el curso del curso del movimiento, a un bipunto fijo. En semejante movimiento, en cada instante, los vectores velocidades de cada punto del sólido son iguales entre sí. Sobre el dibujo que figura a continuación, la biela AB, ligada a las dos ruedas de igual velocidad angular y de igual diámetro, está animada por un movimiento de translación.




• *Translación de un espacio afín* $\mathscr{E}$ *asociado a un vector* $\vec{V}$ *del espacio vectorial* E *asociado a* $\mathscr{E}$. — Aplicación de $\mathscr{E}$ en $\mathscr{E}$ que a todo punto M asocia el punto M' tal que $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$.

• *Translación a izquierda (resp. a derecha).* — Sea $a$ un elemento de un magma (E, $*$) la aplicación de E en E definida por $x \mapsto a * x$ (resp. $x \mapsto x * a$) se denomina translación a izquierda (resp. a derecha) definida por $a$.

## Transladado

Imagen de un elemento por una translación.

## Transposición

• *Transposición sobre un conjunto finito* $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. — Permutación $\tau \in S_n$ para la que existen dos enteros $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tales que:

$$\tau(a_i) = a_j; \quad \tau(a_j) = a_i \quad \text{y} \quad \tau(a_k) = a_k \text{ para } k \notin \{i, j\}.$$

Se escribe frecuentemente $\tau = (i, j)$. Toda permutación sobre E es un producto de transposiciones.

## Transpuesta

• *Transpuesta de una matriz* $M = (a_{ij})$ *de n filas y p columnas.* — Matriz ${}^tM = (b_{ij})$ de $p$ filas y $n$ columnas tal que para todo par $(i, j)$ de índices tengamos $b_{ij} = a_{ji}$. Ejemplo:

$$\text{si } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{entonces } {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

• *Transpuesta de una aplicación lineal u de un espacio vectorial* E *en un espacio vectorial* F. — Si $E^*$ y $F^*$ designan los duales de E y F, la transpuesta de $u$ es la aplicación lineal ${}^tu$ de $F^*$ en $E^*$ que, a toda forma lineal $y^* \in F^*$, asocia la forma lineal $y^* \circ u \in E^*$. Si E y F son espacios de dimensiones finitas de bases $(e_i)_{i\in I}$ y $(f_j)_{j\in J}$, si M es la matriz de $u$ con relación a esas bases, la matriz de ${}^tu : F^* \to E^*$ en relación a las bases duales $(e_i^*)_{i\in I}$ y $(f_j^*)_{j\in J}$ es igual a ${}^tM$.

## Transvección

Elemento $\tau$ de $GL_n(K)$ que deja invariantes los elementos de un hiperplano H de $K^n$ y tal que para todo $x \in K^n$ el vector $\tau(x)$ sea el transladado de $x$ por un vector de H, es decir, que $\tau(x) - x \in H$. Las transvecciones forman un subgrupo distinguido de $GL_n(K)$.

## Transversal

Empleado antiguamente como sinónimo de recta.

• *Aceleración transversal.* — Sinónimo de aceleración normal.
V. NORMAL.

## Transversalidad

Herramienta importante en topología diferencial moderna, cuyo estudio ha

sido emprendido por R. Thom sobre ideas de Poincaré y que se apoya en la noción de sub-variedades transversas.
V. TRANSVERSAS.

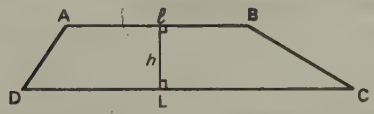
## Transversas

Dos sub-variedades $V_1$ y $V_2$ de una variedad W se denominan transversas si, en todo punto $x$ de $V_1 \cap V_2$ el espacio tangente a W en $x$ es engendrado por los vectores tangentes a $V_1$ en $x$ y los vectores tangentes a $V_2$ en $x$.
V. TRANSVERSALIDAD.

## Trapecio

Cuadrilátero plano que tiene dos lados no consecutivos paralelos, denominados bases del trapecio. Una perpendicularidad trazada de una base a otra es una altura. Si las longitudes de las bases y de una altura son respectivamente L, $l$ y $h$, el área del trapecio es:

$$h \cdot \frac{L + l}{2}.$$




- *Trapecio isósceles.* — V. ISÓSCELES.
- *Trapecio rectángulo.* — V. RECTÁNGULO.

## Trapecios

- *Método de los trapecios.* — Método de cálculo por aproximación de la integral definida:

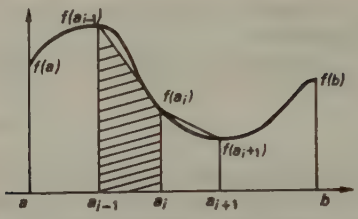
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$ de una función continua $f$ sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$. Se considera la subdivisión $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ de $[\![a, b]\!]$ definida por $a_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$; se pone:

$$h = \frac{b - a}{n} \quad \text{e} \quad I_n = h \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i) + f(a_{i-1})}{2}$$

(área de los trapecios rayados en el dibujo). En cada intervalo se ha efectuado una interpolación de $f$ por una función afín. Si, por ejemplo, $f$ es de clase $C^2$ sobre $[\![a, b]\!]$ y si $\|f^2\|_\infty = M$ se demuestra que:

$$|I - I_n| \leqslant \frac{(b - a)\,Mh^2}{12}.$$

V. SIMPSON.




Area de un trapecio $(a_i - a_{i-1})\dfrac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} = \dfrac{h}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1}))$.

## Trayectoria

V. ISOGONAL, ORTOGONALES.

• *Trayectoria de un grupo que opera sobre un conjunto.* — Sinónimo de órbita.

• *Trayectoria del movimiento de un móvil puntual* M *en relación a un sistema de referencia* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. — Las coordenadas $(x, y, z)$ de M en el sistema de referencia son funciones del tiempo $t$. Cuando $t$ varía, el conjunto de los puntos de coordenadas $(x(t), y(t), z(t))$ se llama la trayectoria del movimiento de M en relación al sistema de referencia escogido.

## Traza

(Descriptiva.) V. FRONTAL, HORIZONTAL.

• *Traza de una recta sobre un plano.* — Punto de intersección de la recta y del plano.

• *Traza de una matriz cuadrada* $M \in M_n(K)$. — Suma, simbolizada por $Tr(M)$, de los elementos de su diagonal principal. La forma lineal $M \mapsto Tr(M)$ así definida verifica $Tr(MN) = Tr(NM)$ y si $P \in M_n(K)$ es inversible $Tr(PMP^{-1}) = Tr(M)$.

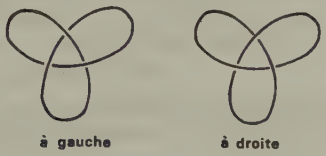
• *Traza de un endomorfismo de espacio vectorial de dimensión finita.* — Traza de la matriz de $f$ sobre una base B de E; la traza de $f$ es independiente de la base B escogida.

## Trazar

• *Trazar una perpendicular.* — Cuando a partir de un punto A se baja una perpendicular a una recta D que no pasa por A, se dice generalmente que se traza la perpendicular desde el punto A a la recta D.
V. ELEVAR.

## Trébol

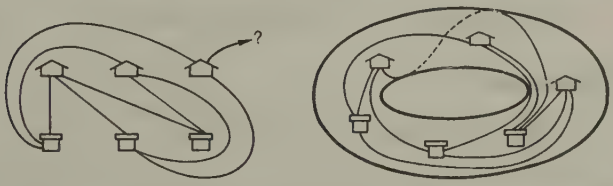
• *Nudo de trébol.* — Nudo cuya proyección sobre un plano presenta la forma de una hoja de trébol. Se distinguen los nudos de trébol a derecha e izquierda.
V. GÉNERO, HOPPE, REFLEXIVO (Nudo).




## Tres

• *Fórmula de los tres niveles.* — V. NIVELES.

• *Problema de los tres pozos y las tres casas.* — Se pueden unir cada una de las tres casas con cada uno de los tres pozos por caminos que no se cortan? La respuesta a este problema de teoría de los grafos es negativa en el plano o sobre una esfera, pero posee una solución sobre el toro.




• *Regla de tres.* — Nombre dado corrientemente a la disposición práctica del procedimiento de cálculo numérico de la imagen de un número por una homotecia de relación fraccionaria $a/b$ puesto que hace intervenir tres números. Así, para calcular 7% de 129 se escribe en la práctica:

$$\frac{129 \times 7}{100} = 129 \times \frac{7}{100} = 129 \times 0{,}07 = 9{,}03.$$

• *Teorema de los tres cuadrados.* — V. GAUSS (Teoremas de).

## Triada

Conjunto de tres enteros $a$, $b$, $c$ soluciones de la ecuación de Pitágoras, es decir, que verifica $a^2 + b^2 = c^2$.
V. PITÁGORAS.

## Triádico

• *Conjunto triádico de Cantor.* — Conjunto de números reales de la forma

$\sum_{n\geq 1} \frac{c_n}{3^n}$ con $c_n = 0$ o $c_n = 2$. Es un conjunto perfecto, parte compacta no densa de $[0, 1]$, de medida nula y cuyo complementario es denso en $[0, 1]$.

• *Número racional triádico.* — Empleado por algunos por número racional de la forma $a/3^k$ con $a \in \mathbf{Z}$ y $k \in \mathbf{N}$. Su conjunto es el anillo $\mathbf{Z}[1/3]$ que no hay que confundir con el anillo $\mathbf{Z}_3$ de los números enteros 3-ádicos.
V. *p*-ÁDICOS.

## Triangulable

• *Espacio triangulable.* — Espacio topológico homeomorfo a un complejo de símplices. La esfera o el toro son espacios triangulables (V. RADO).

## Triangulación

Se emplea a veces por triangularización.

## Triangular

• *Desigualdad triangular.* — V. DISTANCIA, MINKOWSKI.

• *Matriz triangular.* — V. INFERIOR, SUPERIOR.

## Triangulares

• *Números triangulares.* — V. POLIGONALES.

## Triangularizable

• *Endomorfismo triangularizable de un espacio vectorial* E *de dimensión finita.* — Endomorfismo $f$ de E tal que existe una base de E en la que la matriz asociada a $f$ sea triangular superior.

• *Matriz triangularizable.* — Matriz cuadrada semejante a una matriz triangular superior.

## Triangularización

• *Triangularización de una matriz cuadrada* M *de elementos en un cuerpo conmutativo* K. — Determinación de una matriz triangular superior T de una matriz cuadrada inversible P tales que ${}^{t}M = PTP^{-1}$.

## Triángulo

En esta obra, cada vez que ese término se utiliza en geometría elemental, debe

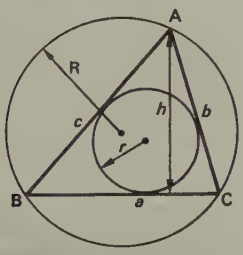
sobreentenderse —salvo excepción señalada— que se trata del plano afín euclídeo.

Se llama triángulo a un polígono de tres lados. Un triángulo es necesariamente plano y convexo, admite un círculo inscrito y es inscriptible en un círculo. Si sus vértices son simbolizados por A, B y C, el triángulo es simbolizado por ABC o también (A, B, C); los segmentos AB, AC y BC son los lados. También se llama lados a las rectas (AB) (AC) y (BC) o también las longitudes $a$, $b$ y $c$ de los segmentos AB, AC y BC. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual al ángulo llano; su perímetro, representado por $2p$, vale $a + b + c$; su área vale:

$$ah/2 = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

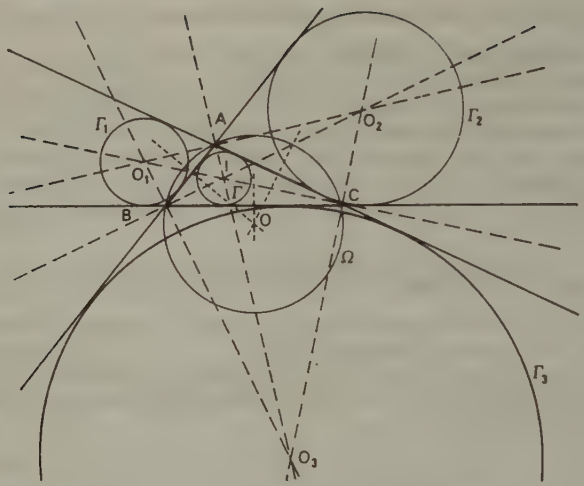
donde $r$ y $R$ son los radios del círculo inscrito y del círculo circunscrito y donde $h$ es la altura relativa al lado BC.

V. ACUTÁNGULO, ANGULOS, COMPLEMENTARIO, EQUILÁTERO, ESCALENO, ISÓSCELES, MEDIANO, MORLEY, NAPOLEÓN, OBTUSÁNGULO, ORTICO, PODARIO, RECTÁNGULO.




- *Triángulo aritmético.* — Triángulo de Pascal.
- *Triángulo conmutativo.* — V. CONMUTATIVO.
- *Triángulo curvilíneo.* — Figura formada por las geodésicas que unen tres puntos de una superficie curva.
- *Triángulo de Pascal o de Stifel.* — V. PASCAL.
- *Triángulo pitagórico.* — V. PITAGÓRICOS (Números).
- *Triángulo esférico.* — V. ESFÉRICO.
- *Angulo de Brocard de un triángulo.* — V. BROCARD.
- *Círculos notables del triángulo.*

Círculo $\Omega$ de centro O: círculo circunscrito.
Círculo $\Gamma$ de centro I: círculo inscrito.
Círculos $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ de centros $O_1$, $O_2$, $O_3$: círculos exinscritos.
V. APOLONIO, BROCARD, CIRCUNSCRITO, EULER, EXINSCRITO, FEUERBACH, INSCRITO, LEMOINE, NUEVE (Puntos de los), TERQUEM, TORRICELLI, TUCKER.




• *Fórmulas usuales del triángulo:*

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Estas relaciones fundamentales están en la base de los métodos de triangulación en geodesia y en astronomía.

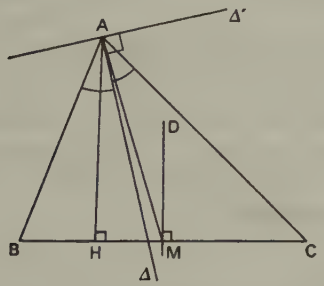
• *Geometría del triángulo.* — Estudio en el plano euclídeo de las propiedades de posición y de las propiedades métricas de elementos notables (círculos, rectas, puntos) del triángulo. El hecho de que tres puntos no alineados (los vértices de un triángulo) determinen un plano y uno sólo ha procurado al triángulo un lugar importante en la geometría de Euclides y explica en parte el desarrollo a veces exagerado que la geometría del triángulo ha conocido durante casi veinte siglos. Aunque el triángulo sea de manera trivial un semiparalelogramo, sólo hasta el siglo XIX se dieron cuenta del papel que podía jugar el paralelogramo en la introducción de la noción de vector: en un espacio afín $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si (A, B, D, C) es un paralelogramo.

V. CARNOT (Fórmula de), CEVA (Teorema de), CIRCULAR (Trigonometría), FAGNANO (Problema de), FERMAT (Problema de), FEUERBACH (Teorema de), HIPÓCRATES DE QUIOS (Lúnulas de), MALFATTI (Problema de), MEDIANA (Teorema de la), MENELAO (Teorema de), MENELIANAS (Problema de las), MORDEL (Teorema de Erdos-), MORLEY (Teorema de), PIVOTE (Teorema del), PITÁGORAS (Teorema de), SCHRUTTKA (Teorema de), SPERNER (Teorema de), STEINER-LEHMUS (Teorema de), STEWART (Teorema de), TERQUEM (Teorema de).

• *Puntos notables del triángulo.* — Numerosísimos puntos han sido introducidos en la teoría del triángulo. Entre los más usuales figuran el ortocentro (punto de intersección de las alturas), el centro de gravedad (punto de intersección de las medianas), el centro del círculo inscrito (punto de intersección de las mediatrices), y los centros de los círculos exinscritos (puntos de intersecciones de una bisectriz interior en un vértice con las dos bisectrices exteriores a los otros dos vértices).
V. BROCARD, FERMAT, FEUERBACH, GERGONNE, GREBE, LEMOINE, NAGEL, ORTOCENTRO, STEINER, SIMEDIANO, TERQUEM, TORRICELLI.

• *Rectas notables del triángulo:*

AH : altura. Δ : bisectriz interior.
AM : mediana. Δ′ : bisectriz exterior.
D : mediatriz.




V. ALTURA, BROCARD (Eje), CEVIANA, EULER (Recta de), EXTERIOR (Bisectriz), INTERIOR (Bisectriz), LEMOINE (Eje), MEDIANA, MEDIATRIZ, MENELIANA, SIMEDIANA, SIMSON (Recta de), STEINER (Recta de), WALLACE.

## riángulos

• *Casos de «igualdad» de triángulos.* — V. IGUALDAD.

• *Casos de isometría de triángulos.* — V. ISOMETRÍA.

• *Casos de semejanza de triángulos.* — V. SEMEJANZA.

## ribu

• *Tribu de partes de un conjunto* E. — Sinónimo de σ-álgebra de partes de E. Una parte no vacía $\mathscr{B}$ del conjunto $\mathfrak{P}(E)$ de las partes de E es una tribu si para toda parte A que pertenece a $\mathscr{B}$ la parte $\overline{A}$ pertenece a $\mathscr{B}$ y si para toda sucesión $(A_n)_{n\geq 0}$ de elementos de $\mathscr{B}$ la parte $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ pertenece a $\mathscr{B}$. De ello resulta que la parte $\bigcap_{n\geq 0} A_n$ pertenece también a $\mathscr{B}$ (V. BOREL, ENGENDRADA).

• *Tridente de Newton.* — V. NEWTON.

## Triedro

Triplete (Ox, Oy, Oz) de tres semi-rectas no coplanarias (llamadas aristas) de igual origen O (vértice del triedro). El sector angular determinado por dos aristas es una cara del triedro. Dado un sistema de referencia cartesiano $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbf{R}^3$, las semirrectas de origen O y de vectores directores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ constituyen un triedro.

V. DARBOUX, DIRECTO, FRENET (Serret-), TRIRRECTÁNGULO, TRISECTRIZ.

• *Angulo triedro.* — Angulo poliedro que posee tres aristas (por tanto, tres caras).

V. POLIEDRO.

## Trigonación

Se emplea a veces por triangularización.

## Trigonal

• *Matriz trigonal.* — Matriz triangular.

## Trigonometría

Empleada sola, esta palabra designa la trigonometría circular.

V. CIRCULAR, ESFÉRICA, HIPERBÓLICA, PLANA.

• *Fórmulas de trigonometría.* — V. CIRCULAR, ESFÉRICA, HIPERBÓLICA.

## Trigonométrica

• *Forma trigonométrica de un número complejo no nulo z.* — Existe un número real positivo único $\rho$ (módulo de $z$) y un número real único $\theta$ (argumento de $z$) que pertenece a $]\!]-\pi, \pi]\!]$ tales que $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Esta escritura de $z$ se denomina forma trigonométrica de $z$. También se escribe $z = [\rho, \theta]$.

• *Fórmula trigonométrica.* — V. CIRCULAR, ESFÉRICA, HIPERBÓLICA.

• *Serie trigonométrica.* — Serie de funciones de una variable compleja de término general $u_n(z) = a_n \cos nz + b_n \operatorname{sen} nz$, donde los $a_n$ y $b_n$ son números complejos.

## rigonométricas

• *Funciones trigonométricas.* — Funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante cuyo estudio constituye el objeto de la trigonometría circular; también se les denomina funciones circulares.
V. COMPLEJAS, INVERSAS.

• *Líneas trigonométricas.* — Sinónimo de funciones trigonométricas.

## igonométrico

• *Círculo trigonométrico en el plano provisto de un sistema de referencia ortonormado* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. — Círculo de centro O y de radio 1.

• *Polinomio trigonométrico.* — Función numérica P de una variable compleja de la forma:

$$z \mapsto P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kz + b_k \operatorname{sen} kz,$$

donde los $a_k$ y $b_k$ son números complejos.

• *Sentido trigonométrico.* — Sentido de rotación escogido convencionalmente como el sentido contrario de las agujas de un reloj.

## ilineal

• *Aplicación trilineal.* — V. MULTILINEAL.

## ilineales

• *Coordenadas trilineales relativas a un triángulo* ABC *del plano.* — Sean:

$$aX + bY + cZ = 0,\ a'X + b'Y + c'Z = 0 \text{ y } a''X + b''Y + c''Z = 0,$$

las ecuaciones en coordenadas homogéneas de los tres lados del triángulo ABC. A todo punto M del plano de coordenadas homogéneas $(x, y, z)$ se hace corresponder el triplete $(\alpha, \beta, \gamma)$ definido por:

$$\begin{cases} \alpha = ax + by + cz \\ \beta = a'x + b'y + c'z \\ \gamma = a''x + b''y + c''z. \end{cases}$$

Recíprocamente, a todo triplete $(\alpha, \beta, \gamma)$ de números reales corresponde un único punto M cuyas coordenadas homogéneas $(x, y, z)$ constituyen la única solución del sistema precedente. El triplete $(\alpha, \beta, \gamma)$ se llama sistema de coordenadas trilineales de M.

## Trillón

V. DECIMAL (Sistema).

## Trinomio

Suma de tres monomios.

• *Trinomio de segundo grado.* — Trinomio de la forma $aX^2 + bX + c$, donde $a$, $b$, $c$ son complejos ($a \neq 0$).
V. SIGNO.

## Triple

• *Integral triple.* — Integral de una función de tres variables reales integrables sobre un dominio $\Delta$ de $\mathbf{R}^3$ (V. MÚLTIPLE). Notación:

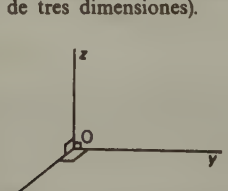
$$\iiint_{\Delta} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{o} \quad \int_{\Delta} f\,d\tau.$$

## Triplete

V. $n$-UPLA.

## Trirrectángulo

• *Triedro trirrectángulo.* — Triedro cuyas tres aristas son perpendiculares dos a dos. Es el más «práctico» de los sistemas de referencia del espacio usual (espacio de tres dimensiones).




## Trisección

• *Problema de la trisección del ángulo.* — Desde los griegos, se sabía realizar con la regla o el compás y en un número finito de operaciones la bisección, la trisección y, más generalmente, la $n$-sección de un segmento de recta, así como construir la bisectriz de un ángulo cualquiera de semirrectas, pero no se sabía dividir un ángulo en tres ángulos iguales: trisección del ángulo. Para intentar resolver este problema, los matemáticos introdujeron vanamente curvas auxiliares llamadas trisectrices (V. TRISECTRIZ). Quedó sin respuesta durante cas

veinticinco siglos y fue resuelto por Wantzel en 1837. Un ángulo de medida $\theta$ en radianes es trisecable con la regla y el compás si y solamente si el polinomio $4X^3 - 3X - \cos\theta$ es reductible en $Q(\cos\theta)$ [X]; así, se puede trisecar el ángulo de $\pi/2$ radianes, pero no el de $\pi/3$ radianes.
La demostración de imposibilidad de Wantzel no ha impedido a un número bastante grande de aficionados pretender resolver este problema todavía en nuestra época. Unos se apoyan sobre razonamientos falsos, otros sobre una ignorancia del enunciado exacto, otros generalizan indebidamente un caso particular.
V. CONSTRUCCIÓN, CONSTRUCTIBLE, CUADRATURA, DUPLICACIÓN, RECTIFICACIÓN, WANTZEL.

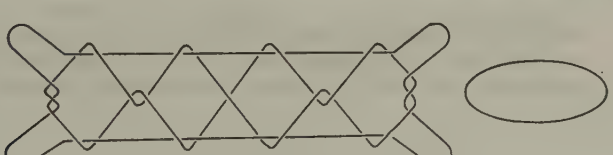
## Trisectriz

Curvas que permiten, como la trisectriz de Mac Laurin y la concoide de Nicomedes, resolver el problema de la trisección del ángulo con la ayuda de la regla, del compás y de la trisectriz misma.
V. ARQUÍMEDES (Espiral de), CATALÁN, L'HOSPITAL (Cúbica de), MAC LAURIN, NICOMEDES (Concoide de), PASCAL (Caracol de), TSCHIRNHAUSEN (Cúbica de).

• *Trisectriz de un triedro.* — El conjunto de los puntos equidistantes de las tres caras de un triedro es una recta llamada trisectriz del triedro.

## Trivial

• *Nudo trivial o de tipo trivial.* — Nudo isótopo a una circunferencia. Si tal nudo es materializado con un bramante, se obtiene la circunferencia tirando solamente sobre las correas. Es el caso del nudo llamado de Jacob (véase en la figura inferior, a la izquierda) que se realiza con la ayuda de un rizo de cuerda tensa entre cuatro dedos y tomando los cabos libres con los otros dedos.



• *Ultrafiltro trivial.* — V. ULTRAFILTRO.

• *Distancia trivial.* — Sinónimo de distancia discreta.

• *Valor absoluto trivial o impropio.* — Valor absoluto $x \mapsto |x|$ tal que $|x| = 1$ para todo $x \neq 0$.

## Trocoides

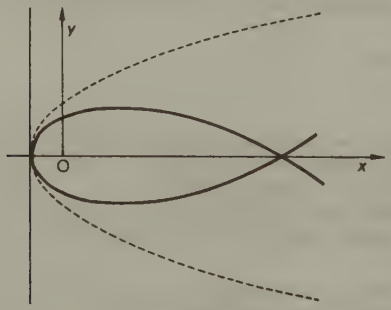
V. CICLOIDES.

## Tronco

V. Cono, Pirámide, Prisma.

## Tschirnhausen, Ehrenfried Walter (1651-1708)

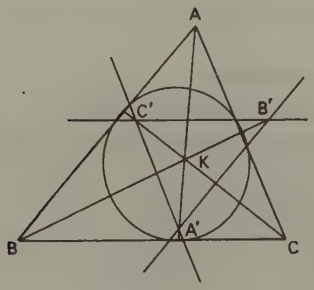
• *Cúbica de Tschirnhausen.* — Antipodaria de una parábola en relación a su foco O. Es una cúbica de punto doble. En relación a un sistema de referencias




cartesiano de origen O y cuyo eje de abscisas es el eje de simetría de la parábola, su ecuación cartesiana es $27\,p(x^2 + y^2) = 2(x + 2p)^3$, donde $p$ es el parámetro de la parábola. Su ecuación polar con O como polo es $\rho \cos^3 \frac{\theta}{3} = -\frac{p}{2}$. Es una trisectriz.

## Tucker, Robert (1832-1905)

• *Cúbica de Tschirnhausen.* — Antipodaria de una parábola con relación a su foco O. Es una cúbica de punto doble. En relación a un sistema de referencia cia. Los lados de los triángulos ABC y A'B'C' se cortan en seis puntos que pertenecen todos ellos a un mismo círculo llamado círculo de Tucker.



## **Tuckerman,** Bryant

• *Número de Tuckerman.* — Número primo de Mersenne $2^{19937} - 1$ descubierto por Tuckerman en 1971 mediante la aplicación del criterio de Lucas. Se escribe con 6.002 cifras. Era el mayor número primo conocido en 1978; el «récord» está batido en la actualidad.
V. LUCAS, MERSENNE, PRIMO.

## **Turing,** Alan Mathison (1912-1954)

• *Máquinas de Turing* (1937). — Máquinas ficticias abstractas que describen simbólicamente las operaciones que intervienen en lógica. Base de la teoría de los autómatas, prefiguran el estudio de la estructura lógica de los ordenadores formalizando la noción de algoritmo. La teoría de las Máquinas de Turing es equivalente a la teoría de las funciones recursivas.
V. RECURSIVIDAD.

## **Tychonov** (o **Tijonov),** André Nikolaevitch (1906-1993)

• *Teorema de Tychonov.* — Todo espacio producto de una familia de espacios compactos es compacto.

# U

## Ulam, Stanislaw Marcin (1909-1984)

• *Criba de Ulam.* — Permite hallar los números de azar inferiores a un entero dado: el primero es 1; luego en la sucesión de los números enteros se suprime un entero sobre 2, es decir, todos los números pares; el primer número que queda es 3. Se suprime entre los números que quedan un entero sobre 3 (es decir, 5, 11, 17, etc.). El primer número que queda es 7; se suprime entonces entre los que quedan un entero sobre 7 (es decir, 19, 39, 61, 81, etc.). Se obtiene la sucesión 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, etc., de los números de azar.

## Ultraesféricos

• *Polinomios ultraesféricos.* — Nombre dado a los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ en el caso particular en que $\alpha = \beta$. Los polinomios de Legendre y Tchebychev son ultraesféricos.

## Ultrafiltro

Sea E un conjunto. Se denomina ultrafiltro sobre E a todo elemento maximal del conjunto ordenado de filtros sobre E.

• *Ultrafiltro trivial.* — El conjunto de las partes de un conjunto no vacío E que contiene un elemento $a \in E$ es un ultrafiltro sobre E llamado ultrafiltro trivial. La existencia de ultrafiltros no triviales es una consecuencia del axioma de elección.

## Ultramétrica

• *Desigualdad ultramétrica.* — Se dice que una distancia $d$ sobre un conjunto verifica la desigualdad ultramétrica si $d(x, z) \leqslant \text{Max}(d(x, y), d(y, z))$ para todo triplete $(x, y, z) \in E^3$.

• *Distancia ultramétrica.* — Distancia sobre un conjunto E que verifica la desigualdad ultramétrica para todo triplete de elementos de E. Ejemplo: la distancia *p*-ádica.

• *Espacio ultramétrico.* — Espacio métrico cuya distancia es ultramétrica. En tal espacio, todos los triángulos son isósceles y acutángulos, todo punto de una bola es su centro, el diámetro de una bola es igual al radio y dos bolas no disjuntas son concéntricas.
Tal espacio tiene propiedades topológicas notables: toda bola es a la vez abierto y cerrado; una serie converge si y solamente si su término general tiende hacia cero.

## Ultrapotencia

Sean I un conjunto, U un ultrafiltro sobre I y $(E_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos —resp. de anillos, de cuerpos— todos iguales a un mismo conjunto —resp. a un mismo anillo, a un mismo cuerpo— E. El ultraproducto de los $E_i$ según el ultrafiltro U se llama una ultrapotencia de E.
V. NO ESTÁNDAR (Análisis).

## Ultraproducto

Sean I un conjunto infinito, U un ultrafiltro sobre I no trivial $(E_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos, $E = \prod_{i\in I} E_i$ el conjunto producto y R la relación sobre E definida por «$(x_i)_{i\in I} R (y_i)_{i\in I}$» si y solamente si «el conjunto de los $i \in I$ tales que $x_i = y_i$ pertenecen a U». El conjunto cociente E/R se llama ultraproducto de los E según el ultrafiltro U. Cuando los $E_i$ son anillos —resp. cuerpos— ocurre lo mismo con E.
V. ULTRAPOTENCIA.

## Umbílical

Sinónimo en desuso de círculo del infinito.
V. INFINITO.

## Unicursal

• *Curva unicursal.* — Curva que admite una representación paramétrica racional, por ejemplo, el folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$, que admite, por representación paramétrica:

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad \text{e} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

## Unidad

• *Unidad de medida de los ángulos, de los arcos de círculos y de los ángulos*

*sólidos.* — V. ESTEREORRADIÁN, GRADO CENTESIMAL, RADIÁN, SEXAGESIMAL (Grado), SEXAGESIMAL (Minuto, segundo).

• *Bola unidad cerrada (resp. abierta) en un espacio normado.* — Bola cerrada (resp. abierta) de centro $\vec{0}$ y de radio 1. Cuando se habla de bola unidad, sin precisar, se trata de la bola unidad cerrada.

• *Círculo unidad de* C. — Conjunto de los números complejos $z$ tales que $|z| = 1$.

• *Disco unidad cerrada (resp. abierta) en* C. — Conjunto de los números complejos $z$ tal que $|z| \leqslant 1$ (resp. $|z| < 1$). Cuando se habla de disco unidad, sin precisar, se trata del disco unidad cerrado.

• *Elemento unidad de un magma.* — Elemento neutro de ese magma. En un anillo conmutativo unitario, se llama unidad a un elemento inversible de ese anillo; se habla así del grupo de las unidades del anillo.

• *Esfera unidad en* $\mathbf{R}^{n+1}$. — Conjunto $S_n$ de los $x \in \mathbf{R}^{n+1}$ tales que $\|x\|_2 = 1$.

• *Matriz unidad de orden n.* — Elemento neutro de $M_n(K)$ para la multiplicación; es una matriz cuadrada diagonal de orden $n$ representada por $I_n = (\delta_{ij})$, donde $\delta_{ij}$ es el símbolo de Kronecker. Así:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• *Múltiplo y sub-múltiplo decimal de una unidad.* — V. MÚLTIPLO.

• *Raíces de la unidad en un cuerpo conmutativo* K. — Elementos de $\bigcup_{n \geqslant 1} \Gamma_n$, donde $\Gamma_n$ es el grupo de las raíces $n$-ésima de la unidad en K (V. RAÍZ).

• *Raíces cúbicas de la unidad.* — V. CÚBICAS.

• *Raíz primitiva de la unidad.* — V. PRIMITIVA.

## Unidades

• *Unidades de un anillo.* — Elementos inversibles de este anillo. En el anillo $\mathbf{Z}(i)$ de los enteros de Gauss, las unidades son $1$, $-1$, $i$ y $-i$.

• *Grupo de las unidades de un anillo conmutativo* A. — El conjunto U(A) de las unidades de A es un grupo para la multiplicación inducida por la del anillo, llamado grupo de las unidades de A.

• *Teorema de las unidades de Dirichlet.* — Sea el anillo de los enteros de un cuerpo de número algebraico K. El teorema de las unidades describe la estructura del grupo multiplicativo U(A) de las unidades del anillo A. Este grupo es isomorfo a un grupo aditivo de la forma $(\mathbf{Z}/s\mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}^r$; es posible precisar además lo que son los enteros $s$ y $r$ en función del cuerpo K.

## Unífero

- *Anillo unífero.* — Sinónimo de anillo unitario.
- *Magma unífero.* — Que posee un elemento neutro.

## Uniforme

- *Continuidad uniforme de una aplicación.* — V. CONTINUA (Aplicación uniformemente).
- *Convergencia uniforme de una serie.* — Convergencia uniforme de la sucesión de sus sumas parciales.
- *Convergencia uniforme de una sucesión de funciones.* — Una sucesión $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de funciones acotadas de un conjunto E con valores en un espacio métrico (F, $d$) converge uniformemente hacia una función $f: E \to F$ si la sucesión de números reales de término general:

$$u_n = \sup_{x\in E} d(f_n(x), f(x))$$

converge hacia cero. Esto puede simbolizarse por:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N})\ (\forall x \in E)\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon).$$

La convergencia uniforme implica la convergencia simple, pero la recíproca es exacta. En el caso en que F sea un espacio normado, la sucesión $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformemente hacia $f$ si y solamente si converge en el sentido de la norma de la convergencia uniforme, es decir, si la sucesión $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geqslant 0}$ converge hacia 0.

En el caso en que $E = \mathbf{R}$ se puede imaginar de forma muy intuitiva que, en F, todo «cilindro» de radio $\varepsilon > 0$ cuyo «eje» es la «curva $f(\mathbf{R})$» contiene a partir de cierto rango $n$ todas las «curvas $f_n(\mathbf{R})$».

- *Función uniforme.* — Sinónimo de aplicación empleado antiguamente por oposición a función multiforme.
- *Ley uniforme.* — La ley de probabilidad de una variable aleatoria absolutamente continua se llama uniforme sobre un intervalo $[\![a, b]\!]$ de $\mathbf{R}$ si su densidad de probabilidad está definida por $f(x) = 0$ si:

$$x \notin [\![a, b]\!] \quad \text{y} \quad f(x) = 1/(b-a) \quad \text{si} \quad x \in [\![a, b]\!].$$

- *Movimiento uniforme de un móvil puntual* M. — Movimiento tal que la norma $\|\overline{V}_M\|$ del vector-velocidad de M sea constante y tal que la función $M \mapsto \overline{V}_M$ sea continua. La velocidad $v$ de M es entonces constante. La hodógrafa construida a partir de un punto fijo O está sobre una esfera de centro O. En un movimiento de rotación uniforme, la velocidad angular es constante.
- *Norma de la convergencia uniforme.* — Norma $f \mapsto \|f\|_\infty$ definida sobre el espacio $\mathscr{B}(E, F)$ de las funciones acotadas sobre un espacio E de valores en un espacio normado F por $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} f(x)$.

• *Topología de la convergencia uniforme.* — Topología asociada a la norma de la convergencia uniforme.

## Uniformemente

• *Aplicación uniformemente continua.* — V. CONTINUA.

• *Distancias uniformemente equivalentes.* — V. EQUIVALENTES.

• *Movimiento uniformemente acelerado (resp. retardado, variado).* — V. ACELERADO, RETARDADO, VARIADO.

• *Serie de funciones uniformemente convergente.* — Serie de funciones cuya sucesión de sumas parciales converge uniformemente.

• *Serie entera uniformemente acotada en* $z_0$. — Serie entera $\Sigma a_n z^n$ tal que existe un número real positivo M que verifica $|a_n z_0^n| \leqslant M$ para todo $n \geqslant 0$.

• *Serie uniformemente convergente.* — V. UNIFORMEMENTE (Convergencia).

## Unimodal

• *Distribución unimodal.* — La distribución de un carácter cuantitativo discreto se denomina unimodal si la moda es única.

## Unimodular

• *Grupo proyectivo unimodular.* — Grupo cociente del grupo unimodular por su centro. Se le representa por PSL(E) o $PSL_n(K)$. Es un grupo simple con excepción de $PSL_2(F_2)$ y de $PSL_2(F_3)$.

• *Grupo unimodular de un espacio vectorial* E. — Sub-grupo distinguido SL(E) del grupo lineal GL(E) constituido por los automorfismos de E de determinante 1. Se simboliza por $SL_n(K)$ el grupo unimodular sobre $K^n$. Está engendrado por las transvecciones. A excepción de $SL_2(F_2)$, el grupo $SL_n(K)$ es el grupo de los conmutadores de $GL_n(K)$.

• *Matriz cuadrada unimodular.* — Matriz cuyo determinante es igual a 1.

• *Número complejo unimodular.* — Número complejo de módulo 1.

## Unión

El símbolo de la reunión que se representa por $\cup$ se lee «unión» o «reunión».

## Unitaria

• *Matriz unitaria.* — Matriz cuadrada M inversible, de elementos complejos, tal que su inversa $M^{-1}$ sea igual a su adjunta $M^*$.

## Unitario

• *Anillo unitario.* — Anillo que admite un elemento neutro para la multiplicación. Ciertos autores dicen: Anillo unífero.

• *Automorfismo unitario de un espacio vectorial* E *por relación a una forma hermitiana q sobre* E. — Automorfismo $f$ de E tal que para todo vector $x$ de E tengamos $q[f(x)] = q(x)$.

• *Grupo unitario relativo a una forma hermitiana q sobre un espacio vectorial* E. — Grupo de los automorfismos unitarios en relación a $q$ para la ley de composición de las aplicaciones. Es un sub-grupo, simbolizado por $U(q)$ o U(E) del grupo lineal GL(E).

• *Polinomio unitario.* — Polinomio cuyo coeficiente del monomio no nulo de más alto grado es igual a 1.

• *Vector unitario.* — Vector de norma 1.

## Universal

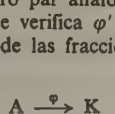
• *Algebra universal.* — Desarrollo de las propiedades de los objetos matemáticos definidos como soluciones de problemas universales.

• *Cuantificador universal de una variable x.* — El ensamblaje $\forall x$.

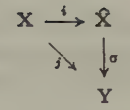
• *Elemento universal de un retículo* $(E, \leqslant)$. — Elemento $u$ de E tal que $x \leqslant u$ para todo $x \in E$. Tal elemento no existe necesariamente. El retículo $(\mathfrak{P}(E), \subset)$ admite E como elemento universal.
V. NULO.

• *Problema universal.* — Numerosos problemas se expresan en términos de problemas universales; cuando poseen una solución, se puede estar seguro de su unicidad salvo un isomorfismo. No daremos de él una definición general, sino dos ejemplos:

1) Dado un anillo conmutativo unitario íntegro A, hallar un par $(K, \varphi)$, donde K es un cuerpo, $\varphi : A \to K$ un homomorfismo de anillos tal que, si $(K', \varphi')$ es otro par análogo, existe un único homomorfismo de los cuerpos $\sigma : K \to K'$ que verifica $\varphi' = \sigma \circ \varphi$. El par $(K, \varphi)$ o, por abuso, el cuerpo K es el cuerpo de las fracciones del anillo íntegro A.




2) Dado un espacio topológico separado X, hallar un par $(\hat{X}, i)$, donde $\hat{X}$ es un espacio topológico completo e $i : X \to \hat{X}$ una aplicación uniformemente continua tal que, si $(Y, j)$ es otro par análogo, existe una única aplicación uniformemente continua $\sigma : \hat{X} \to Y$ tal que $j = \sigma \circ i$. El par $(\hat{X}, i)$ o, por abuso, el espacio $\hat{X}$ es el separado completado de X.



Un objeto libre, por ejemplo, el grupo libre sobre un conjunto (V. LIBRE), puede definirse como solución de un problema universal.
V. ALEXANDROV, COMPLETADO, DIRECTA, DIRECTO, FRACCIONES, LIBRE, SIMETRIZACIÓN, STONE, TENSORIAL.

• *Problema de aplicación universal.* — Sinónimo de problema universal.

• *Problema de la medida universal.* — Problema planteado por Hausdorff que se puede enunciar así: ¿Es posible asociar a toda parte acotada A de $\mathbf{R}^n$ un número real positivo o nulo $m(A)$ tal que:

1) $m(A)$ no sea nulo para toda parte A;
2) $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$ si las partes $A_1$ y $A_2$ son disjuntas;
3) $m(A) = m(B)$ si una translación o una rotación permite deducir la parte B de la parte A?

Este problema es imposible para $n \geqslant 3$, pero es posible para $n < 3$. Contrariamente a nuestra intuición, da testimonio de una diferencia fundamental entre el plano $\mathbf{R}^2$ (o la recta $\mathbf{R}$) y el espacio $\mathbf{R}^3$.
V. BANACH-TARSKI (Paradoja de).

• *Propiedad universal.* — Se dice para un objeto solución de un problema universal, o de una propiedad consecuencia directa de la definición.

• *Símbolo universal.* — V. PREDICADOS.

## Universalidad

Propiedad de ser universal.

## Universo

Esta palabra tiene un sentido técnico en diversas ramas de las matemáticas puras y aplicadas. En estadísticas, es sinónimo de población; en probabilidad, designa al conjunto $\Omega$ de un espacio probabilizable $(\Omega, \mathscr{A})$; en mecánica es un espacio afín de dimensión 4, llamado también espacio-tiempo.

• *(Teoría de conjuntos.) Universo.* — Conjunto U tal que:
1) $\phi \in U$;
2) si $X \in U$, entonces $\{X\} \in U$;
3) $X \in U \in Y \in X$ implican $Y \in U$;
4) si $X \in U$ e $Y \in U$, entonces $X \times Y \in U$;
5) si $X \in U$, entonces $\mathfrak{P}(X) \in U$;
6) si $I \in U$ y si $(X_i)_{i \in I}$ es una familia de elementos de U, entonces

$\bigcap_{i \in I} X_i \in U$. Si U es un inverso, los objetos que se construyen en matemática a partir de un elemento de U son, en general, elementos de U. La existencia de un universo puede ser tomada como axioma de las matemáticas.

## Unívoca

• *Correspondencia unívoca de un conjunto* E *hacia un conjunto* F. — Término poco empleado que designa una correspondencia de E hacia F tal que a todo elemento de E corresponde como máximo un elemento de F.

## Upla

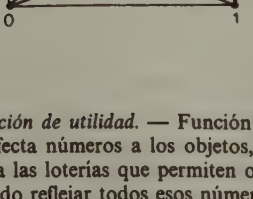
V. *n*-UPLA.

## Uplete

V. *n*-UPLETE.

## Urysohn, Paul Samuelovitch (1898-1924)

• *Lema de Urysohn o teorema de Tietze-Urysohn.* — Un espacio topológico separado E es normal si y solamente si, para todo par $F_1$, $F_2$ de cerrados disjuntos, existe una función continua $f: E \to [\![0, 1]\!]$ que verifica $f(x) = 0$ si $x \in F_1$ y $f(x) = 1$ si $x \in F_2$. Este teorema se toma a menudo como definición de los espacios normales.




## Utilidad

• *Función de utilidad.* — Función que, para una persona dada y objetos dados, afecta números a los objetos, a las loterías que tienen los objetos como lotes, a las loterías que permiten obtener billetes de la lotería precedente, etc., debiendo reflejar todos esos números las preferencias de la persona y verificar varios axiomas. Para una persona dada, la función de utilidad no existe necesariamente.

• *Teoría de la utilidad.* — Parte de la teoría de los juegos que consiste en describir cuantitativamente lo mejor posible ciertos sentimientos subjetivos; todo esto con el objeto de estudiar los numerosísimos juegos en que las decisiones de los jugadores dependen en parte de su gusto o preferencia por ciertos objetos o ciertas situaciones.

# V⊢W

## Vacía

• *Palabra vacía.* — V. LIBRE (Monoide).

## Vacío

• *Conjunto vacío.* — Uno de los axiomas de la teoría de los conjuntos postula la existencia de un conjunto E tal que para todo $x$ tengamos $x \notin E$ (axioma del conjunto vacío), es decir, la existencia de un conjunto que no tiene ningún elemento. Tal conjunto es único; se le denomina conjunto vacío y se le representa por $\phi$. Es sub-conjunto de cualquier conjunto.

## Válida

• *Fórmula válida.* — Dado un lenguaje L y una estructura $\mathfrak{a}$ para L, se dice que una fórmula $F(x_1, ..., x_n)$ es válida en $\mathfrak{a}$ si, cualesquiera que sean $a_1, ..., a_n$ en el dominio de la estructura $\mathfrak{a}$, el valor de verdad de $F(a_1, ..., a_n)$ es V(ó 1).

## Valor

V. ABSOLUTO, ADHERENCIA, APROXIMADO, DOMINANTE, INFINITO, PROBABLE, PROPIO, VERDAD.

• *Valor finito.* — V. INFINITO.

• *Valor de una función numérica.* — Dada una función $f: E \to R$, se llama valor de $f$ en $x \in E$ al número real $f(x)$, imagen de $x$ por $f$.

• *Valor medio de una variable aleatoria.* — Sinónimo de esperanza matemática.

• *Valor principal de Cauchy.* — V. CAUCHY.

• *Valor de verdad.* — V. VERDAD.

## Valoración

• *Valoración sobre un anillo íntegro* A. — Restricción a A de una valoración del cuerpo de las fracciones de A.

• *Valoración sobre un cuerpo* K. — Aplicación $v$ de $K^*$ en $\mathbf{R}_+$ que verifica las propiedades siguientes:

1) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$;

2) $v(x + y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$. Se suele poner $v(0) = +\infty$.

Para todo número real $a > 1$, la aplicación $x \to a^{-v(x)}$ es un valor absoluto sobre K.

V. *p*-ÁDICO.

• *Anillo de valoración.* — Conjunto de los elementos de un cuerpo K positivos, para una valuación sobre K; tal anillo es un anillo local; por ejemplo: el anillo $\mathbf{Z}_p$ de los enteros *p*-ádicos.

## Valorado

• *Anillo de un cuerpo valorado.* — Anillo o cuerpo conmutativo provisto de una valuación. Puede ser provisto de un valor absoluto y de una topología (V. VALUACIÓN).

• *Cuerpo valorado completo.* — V. COMPLETO.

## Valores

• *Conjuntos de los valores de una función.* — Imagen de esa función.

## Vandermonde, Alexandre Théophile (1735-1796)

• *Determinante de Vandermonde.* — Determinante de la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & & a_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Es igual a $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

## Van der Pol, Balthazar (1889-1959)

• *Ecuación de Van der Pol.* — Ecuación diferencial de la forma:

$$u'' + \alpha(u - 1)u' + \beta u = 0,$$

con $\alpha$, $\beta$ constante estrictamente positivas; admite una y sólo una solución periódica. Esta ecuación está ligada al problema de los tres cuerpos (V. CUERPOS).

## Variable

Cuando se estudia una función $(x_1, ..., x_n) \mapsto f(x_1, ..., x_n)$ se dice frecuentemente que los $x_i$ son los variables de la función $f$.
V. ALEATORIA, BERNOULLI, CAMBIO, ELIMINACIÓN, ESTADÍSTICA, LIBRE, LIGADA, MUDA, SEPARADAS.

• *Variable de un lenguaje.* — V. LENGUAJE.

• *Variable proposicional.* — V. PROPOSICIONAL (Cálculo).

## Variación

• *Variación de la constante.* — V. CONSTANTE.

• *Variación de signo de un polinomio algebraico de coeficientes reales.* — Se dice cuando dos coeficientes consecutivos son de signos diferentes. Por ejemplo, los coeficientes del polinomio $5x^3 - 7x^2 + 19x + 3$ son respectivamente positivo, negativo, positivo, positivo; este polinomio presenta, por tanto, dos variaciones de signos.
V. DESCARTES (Teorema de).

• *Variación total de una función.* — V. ACOTADA (de variación).

• *Coeficiente de variación.* — Sea un carácter cuantitativo X que no toma más que valores positivos. Se denomina coeficiente de variación a la razón $\sigma/\overline{X}$ de la desviación típica sobre la media.

• *Función de variación acotada.* — V. ACOTADA.

## Variaciones

• *Cálculo de las variaciones.* — Determinación de los extremos de una función definida sobre un espacio funcional. Ejemplos: búsqueda de braquistócronas, de geodésicas, problema de Dido o de Plateau, etc.

• *Variaciones sin repetición.* — Sean E un conjunto no vacío y $p \geqslant 1$ un entero. Una variación de $p$ elementos de E es una inyección de $\{1, 2, ..., p\}$ en E. Es, pues, una sucesión de $p$ elementos distintos de E. Se dice a veces que dos variaciones distintas difieren, ya sea por la naturaleza de los objetos que las componen, ya por el orden en el que están «colocados», es decir, por su indización. El número de las variaciones de $p$ elementos de un conjunto de $n$ elementos siendo $n \geqslant p$ se denota $A_n^p$. Se dice también que es el número de las variaciones posibles de $n$ objetos tomados $p$ a $p$. Se tiene:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\ (n-2)\ ...\ (n-p+1).$$

Cuando $p > n$, el conjunto de las combinaciones de $p$ elementos de E es un conjunto vacío.

• *Variaciones con repetición.* — Una combinación con repetición de $p$ elementos de un conjunto no vacío E es una aplicación de $\{1, 2, ..., p\}$ en E. Si

E posee $n$ elementos, el número de las combinaciones con repetición de $p$ elementos de E es igual a $n^p$.

## Variado

• *Movimiento rectilíneo uniformemente variado.* — Movimiento rectilíneo tal que la norma $\|\vec{\Gamma}_M\|$ del vector-aceleración de M sea constante y tal que la función $M \to \vec{\Gamma}_M$ sea continua. Tal movimiento es, bien uniformemente acelerado, bien uniformemente retardado, bien uniformemente retardado en una fase del movimiento y uniformemente acelerado en otra. Su ecuación horaria es de la forma:

$$x = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0.$$

## Varianza

• *Varianza de una variable aleatoria* X *que admite un momento de orden* 2. — Momento $V[X]$ de orden 2 de la variable aleatoria centrada $X - E[X]$ asociada a X. Verifica $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$.

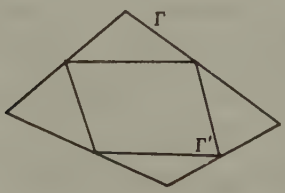
## Variedad

Generalización en varios dominios de las matemáticas de la noción de curvas, superficies o volúmenes. La idea es introducir, en los principales casos estudiados, una «representación» local de los objetos, sometida a condiciones satisfactorias de «recogida». Empleado solo, el término variedad designa, en general, las variedades diferenciales.

V. AFÍN, ALGEBRAICO, DIFERENCIAL, LINEAL, PROYECTIVA, TOPOLÓGICA.

## Varignon, Pierre (1654-1722)

• *Teorema de Varignon.* — El cuadrilátero $\Gamma'$ obtenido al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera $\Gamma$ es un paralelogramo. Si $\Gamma$ es plano y convexo, su área es el doble de la de $\Gamma'$.




## Vaso

• *Vaso de Klein.* — V. KLEIN.

## Vaughan, Robert Charles (1945- )

• *Teorema de Vaughan.* — Todo entero par es suma como máximo de veintiséis números primos.
V. CHEN, GOLDBACH.

## Vecino

• *Vértice vecino de un vértice x de un grafo.* — Vértice *y* tal que existe un arco de extremos *x* e *y*. El conjunto $\Gamma(x)$ de los vértices vecinos de *x* es la reunión del conjunto de los predecesores y del conjunto de los sucesores de *x*:

$$\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x).$$

## Vecten

• *Figuras de Vecten.* — Figuras formadas por un triángulo y los tres cuadrados construidos sobre cada lado (todos fuera o todos dentro).
V. MOLINO DE VIENTO.

## Vector

Elemento de un espacio vectorial y, por extensión, de un módulo. Así, para el matemático, un polinomio $f \in \mathbf{C}[X, Y, Z]$, una matriz cuadrada $M \in M_n(K)$, una función de clase $C^1$ sobre $\mathbf{R}$ o una progresión aritmética son vectores de la misma forma que los elementos:

$$\vec{xi} + \vec{yj} \quad \text{de} \quad \mathbf{R}^2 \quad \text{o} \quad \vec{xi} + \vec{yj} + \vec{zk} \quad \text{de} \quad \mathbf{R}^3$$

(llamados a veces vectores geométricos). Durante mucho tiempo se llamó vectores ligados a pares de puntos de $\mathbf{R}^2$ (o de tripletes de $\mathbf{R}^3$) y vectores libres sus clases en la selección de equipolencia. En la actualidad, la terminología se ha precisado: los vectores ligados (¡que no son vectores!) se llaman bipuntos, reservándose la palabra vector para los vectores libres.

| Antes | Vector ligado | Vector libre |
|---|---|---|
| Ahora | Bipunto | Vector |

V. ACELERACIÓN, BINORMAL, COLUMNA, COMPONENTES, CORIOLIS (Aceleración de), DIRECTOR, DESLIZANTE, ISÓTROPO, LIBRE, LIGADO, LÍNEA, MÓDULO, NORMADO, NORMAL, NULO, ORTOGONAL, PRODUCTO, PROPIO, ROTACIÓN, SOBREACELERACIÓN, TANGENTE, UNITARIO, VELOCIDAD.

• *Vector derivado.* — V. VECTORIAL (Derivada).

• *Radio vector de un punto* M. — V. POLARES (Coordenadas), ESFÉRICAS (Coordenadas).

## Vectores

V. Angulo, Campo, Colineales, Determinante, Independientes, Ortogonales.

• *Vectores linealmente dependientes.* — V. Independientes.

• *Sistema de vectores generadores.* — Familia de vectores generatriz.

## Vectorial

• *Análisis vectorial.* — Análisis en $\mathbf{R}^3$ y, por extensión, en $\mathbf{R}^n$.

• *Semi-recta vectorial de un* R*-espacio vectorial engendrado por un vector* $\vec{u} \neq \vec{0}$. — Conjunto de los vectores $\alpha \vec{u}$ con $\alpha \geqslant \vec{0}$. No es un espacio vectorial.

• *Cálculo vectorial.* — Conjunto de reglas y métodos de cálculo en un espacio vectorial.

• *Derivada vectorial.* — Sea $f$ una función definida sobre un intervalo I de $\mathbf{R}$, de valores en un espacio normado $\mathbf{R}^n$ (todas las normas sobre $\mathbf{R}^n$ son equivalentes). Si $f$ es derivable en $x_0 \in \mathbf{I}$, la derivada $\overrightarrow{f'(x_0)}$ de $f$ en $x_0$ es un vector de $\mathbf{R}^n$ llamado vector derivado de $f$ en $x_0$. Sea $(f_i(x))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ los componentes de $\overrightarrow{f(x)}$ en una base de $\mathbf{R}^n$; la función $f$ es derivable en $x_0$ si y solamente si las funciones $f_i$ son derivables en $x_0$ y $(f'(x_0))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ son las componentes de $\overrightarrow{f'(x_0)}$.
Dada una función $F : x \mapsto M$ del intervalo I en un espacio afín $\mathscr{E}$ asociado a $\mathbf{R}^n$. Si para $A \in \mathscr{E}$ la función $f : x \mapsto \overrightarrow{AM}$ es derivable en $x_0 \in \mathbf{I}$, el vector derivado de $f$ en $x_0$ es independiente del punto A; se le denomina vector derivado de F en $x_0$ y se le representa por:

$$\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{dx}\right)(x_0).$$

• *Espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo* K. — Sean E un grupo aditivo y $(\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$ una acción de K sobre E. El triplete $(E, +, \cdot)$ se denomina un espacio vectorial sobre K si, para todo par $(\alpha, \beta)$ de elementos de K y para todo par $(x, y)$ de elementos de E tenemos:

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$
$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$
$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$
$$1 \cdot x = x.$$

Ejemplos: el espacio $\mathbf{R}^3$ (de ahí el nombre de espacio vectorial), el espacio K[X] de los polinomios, el espacio $M_n(K)$ de las matrices cuadradas, etc. Un espacio vectorial sobre K es un K-módulo.
V. Banach (Espacio de), Base, Bidual, Cociente, Codimensión, Complejo, Complexificado, Dimensión, Discreto, Euclídeo, Hermitiano, Hilbert (Espacio de), Norma, Normado, Orientación, Orientado, Prehilbertiano, Proyectivo (Completado), Real, Semi-norma, Simpléctico, Tangente, Topológico.

• *Función vectorial.* — Se dice usualmente para una función de valores en un espacio vectorial.

• *Geometría vectorial.* — Estudio del grupo lineal de un espacio vectorial.

• *Hiperplano vectorial de un* K*-espacio vectorial* E. — Sub-espacio vectorial de E de codimensión 1. Es el núcleo de una forma lineal no nula definida sobre E. Si la dimensión de E es finita e igual a $n$, los hiperplanos de E son los sub-espacios vectoriales de E de dimensión $n - 1$.

• *Imagen vectorial de un número complejo.* — V. COMPLEJO (PLANO).

• *Isometría vectorial de un espacio vectorial euclídeo* E *de dimensión finita.* — Isometría del espacio métrico (E, $d$) en él mismo, donde $d$ es la distancia definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. Las isometrías vectoriales de E no son otras que los automorfismos ortogonales de E y también se denominan isometrías lineales.

• K*-espacio vectorial.* — Sinónimo de espacio vectorial sobre el cuerpo conmutativo K.

• *Plano vectorial.* — Espacio vectorial de dimensión 2.

• *Producto vectorial de dos vectores de un espacio euclídeo orientado.* — Sinónimo de producto exterior.

• *Propiedad vectorial.* — Teorema de la geometría vectorial.

• *Proyección vectorial de un espacio vectorial* E. — Utilizado a veces en lugar de proyector.

• *Recta vectorial.* — Espacio vectorial de dimensión 1. Todo cuerpo K conmutativo puede ser considerado como una recta vectorial sobre K. En un K-espacio vectorial E de dimensión $n \geqslant 1$, el conjunto de los vectores de E colineales a un vector no nulo $\vec{u}$ de E es una recta vectorial de E.

• *Subespacio vectorial de un* K*-espacio vectorial* E. — Parte P de E estable para las leyes de E y que, provista de las leyes inducidas sobre P por las de E, presenta una estructura de espacio vectorial. Una condición necesaria y suficiente para que una parte no vacía P de E sea un subespacio vectorial de E es que, para todo par $(x, y)$ de elementos de P y para todo par $(\alpha, \beta)$ de elementos de K, el vector $\alpha x + \beta y$ pertenezca a P.
V. DIRECTA (Suma), ENGENDRADO, ISÓTROPO, ORTOGONAL, PROPIO, SUMA, SUPLEMENTARIOS.

V. HOMOTECIA, REFLEXIÓN, ROTACIÓN, SIMILITUD, SIMETRÍA.

## Vectoriales

• *Coordenadas vectoriales de un vector deslizante* $(D, \vec{V})$ *en relación a un punto* O. — Par $(\vec{V}, \overrightarrow{OK})$, donde $\overrightarrow{OK}$ es el momento del vector deslizante en relación a O. Un vector deslizante $(D, \vec{V})$ tal que $\vec{V} \neq \vec{0}$ está completamente determinado por sus coordenadas vectoriales.

## Veitch, E. W.

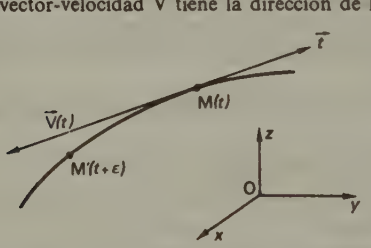
• *Diagrama de Veitch-Karnaugh.* — Sinónimo de diagrama de Karnaugh.

## Velocidad

De forma general, magnitud característica de la rapidez de evolución de un fenómeno que implica un cambio de estado o de posición. La velocidad es una magnitud relativa que supone la elección previa de un sistema de referencia.

• *Velocidad de un móvil puntual* M *en el instante t.* — Derivada primera *ds/dt* en relación al tiempo de la abscisa curvilínea de M sobre su trayectoria.

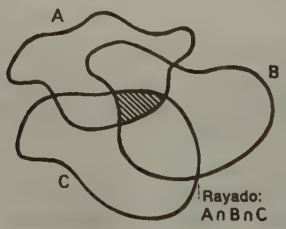
• *Vector velocidad de un móvil puntual en el instante t.* — Límite $\vec{V}$ de la velocidad media $(1/\varepsilon)\,\overrightarrow{MM'}$ entre los instantes $t$ y $t+\varepsilon$ cuando $\varepsilon$ tiende hacia 0. El vector-velocidad $\vec{V}$ tiene la dirección de la tangente en M a la trayectoria y verifica $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{t}$, donde *ds/dt* es la velocidad de M y $\vec{t}$ designa el vector unitario tangente $\overrightarrow{dM}/ds$. Si el punto M tiene por coordenadas $(x, y, z)$ en un sistema de referencias de tres ejes cualesquiera, el vector-velocidad tiene por componentes *dx/dt*, *dy/dt* y *dz/dt*.




V. Absoluta, Angular, Areolar, Arrastre, Deslizamiento, Media, Relativa, Rotación.

## Venn, John (1834-1923)

• *Diagrama de Venn o de Euler-Venn.* — Representación esquemática de conjuntos por curvas planas cerradas sin punto doble cuyos puntos interiores son los elementos del conjunto representado, llamado comúnmente «patata».
V. Euler.



## Ventana

• V. VIVIANI.

## Verdad

• *Función (o tabla) de verdad de un enunciado.* — Se construye por recurrencia a partir de las tablas de conectores. Por ejemplo, la tabla de verdad del enunciado $\Gamma A \Rightarrow B$ es la siguiente:

| A | B | $\neg A$ | $\neg A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | V |
| F | V | V | V |
| F | F | V | F |

También se dice a veces: Tabla de valores.

• *Tabla de verdad de la negación.* — Conjunto de las dos aplicaciones particulares de $\{A, \Gamma A\}$ en $\{V, F\}$ que se definen según el cuadro que aparece a continuación:

| A | $\neg A$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

• *Tabla de verdad de un conector k diferente de la negación.* — Conjunto de cuatro aplicaciones particulares de $\{A, B, AkB\}$ en $\{V, F\}$ que se define usualmente mediante cuadros.

• *Valor de verdad en cálculo proposicional.* — Elemento del conjunto $\{V, F\}$, donde F se llama falso y V verdadero (lo falso también se representa por 0 y lo verdadero por 1). Estas notaciones y esta terminología son arbitrarias.

• *Valor de verdad de una fórmula de un lenguaje* L *en una realización* a *de* L. — Elemento del conjunto $\{V, F\}$ asociado a esta fórmula por un procedimiento definido por recurrencia a partir de los términos cerrados del supralenguaje L (a).

## Verdadera

• (Usual.) *Proposición verdadera.* — Proposición de la que se posee una demostración.

• (Lógica.) *Proposición o fórmula verdadera.* — Proposición o fórmula cuyo valor de verdad (V. VERDAD) es V.

## Verdadero

(Lógica.) Valor de verdad del cálculo proposicional. — V. VERDAD.

• *Enunciado verdadero.* — Tautología.

## Verosimilitud

• *Función de verosimilitud.* — Sean X una variable aleatoria de densidad de probabilidad $f$, $\theta$ un parámetro a estimar y $x_1, x_2, ..., x_n$ los valores tomados por X para una muestra de $n$ individuos. Se llama función de verosimilitud de los $n$ valores $x_1, x_2, ..., x_n$ la probabilidad:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

para que los valores tomados por X para una muestra de $n$ individuos sean precisamente $x_1, x_2, ..., x_n$. La función $\theta \to L(x_1, x_2, ..., x_n, \theta)$ se denomina función de verosimilitud.

• *Método del maximum de verosimilitud.* — Método de estimación consistente en tomar como estimación $\hat{\theta}$ de un parámetro $\theta$ el valor maximum de la función de verosimilitud L. Se muestra que este valor es la solución de la ecuación $\frac{dL}{d\theta} = 0$.

## Versiera

Nombre que también se da a la cúbica de Agnesi.
V. AGNESI.

## Vertical

• *Plano vertical en geometría descriptiva.* — Plano perpendicular al plano horizontal.

• *Recta vertical en geometría descriptiva.* — Recta perpendicular a un plano horizontal.

## Vértice

V. ANGULO, ANGULAR (Sector), CONO, HOMOLOGÍA, PIRÁMIDE, SÓLIDO (Angulo), ESTEREOGRÁFICA (Proyección), TRIEDRO.

• *Vértice de un grafo orientado (S, U) o de un grafo no orientado (S, E).* — Elemento de S.
V. ACCESIBLE, ADYACENTE, GRADO, EXTERIOR (Semigrado), INTERIOR (Semigrado), AISLADO, PENDIENTE, PREDECESOR, SUCESOR, ENTORNO.

• *Vértice de un hypergrafo (S, $\mathcal{E}$).* — Elemento de S.

• *Vértice de un símplice.* — V. SÍMPLICE.

• *Vértice de una superficie de ecuación cartesiana $z = f(x, y)$.* — Si la función $f$ admite un máximo relativo $z_0$ en $(x_0, y_0)$, el punto M de coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ se llama un vértice de la superficie. Condición suficiente para que $M(x_0, y_0, z_0)$ sea un vértice es que $f$ admita derivadas parciales segundas continuas en un entorno de $(x_0, y_0)$ y que se tenga en $(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leqslant 0 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leqslant 0;$$

bajo esta hipótesis, el vértice M es un punto elíptico de la superficie.
V. CUELLO, FONDO, MONTAGNARD.

• *Sectores angulares de semirrectas opuestas por el vértice.* — V. OPUESTAS.

## Vértices

V. POLIEDRO, POLÍGONO, TRIÁNGULO.

• *Vértices de una cónica propia.* — Puntos de intersección de la cónica con su o sus ejes de simetría. La parábola admite un vértice, la hipérbola dos y la elipse cuatro.

• *Vértices adjuntos de un grafo.* — V. ADJUNTOS.

## Viajante de comercio

• *Problema del viajante de comercio.* — Un viajante de comercio debe dirigirse a varias localidades. El problema consiste en organizar un circuito hamiltoniano que reduzca al mínimo la distancia recorrida o el gasto total en tiempo o los gastos de transporte. No se ha resuelto más que en un pequeño número de casos particulares. Se supone que no existe algoritmo para el problema general de la misma manera que no existe algoritmo algebraico general para resolver las ecuaciones polinomiales de grado superior estrictamente a 4. V. HAMILTONIANO (Circuito).

## Vibrantes

• *Ecuación de las cuerdas vibrantes.* — Ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

donde $v$ es constante (velocidad de propagación de la onda transversal sobre la cuerda homogénea) y $u(x, t)$ una función vectorial, a determinar, que da el desplazamiento transversal de un punto de abscisa $x$ de la cuerda en función de $t$ (el tiempo). Si la cuerda se supone ilimitada, la solución general de esta ecuación es:

$$u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt),$$

donde $f$ y $g$ son funciones cualesquiera de clase $C^2$. Físicamente, se buscan más bien soluciones satisfactorias a ciertas obligaciones (problema de Cauchy, por ejemplo). La solución particular que corresponde a las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$$

viene dado por la solución de d'Alembert:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - vt) + \varphi(x + vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

V. CAUCHY

• *Ecuación de las membranas o de las placas vibrantes.* — Ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

donde $c$ es un escalar. Si $u(x, y, t)$ designa el desplazamiento transversal en el instante $t$ del punto de coordenadas $(x, y)$ de una membrana homogénea, la función $u$ es la solución de tal ecuación en la que $c$ depende de la naturaleza y de la tensión de la membrana.

• *Ecuación de las cuerdas vibrantes.* — Ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \mathrm{K}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

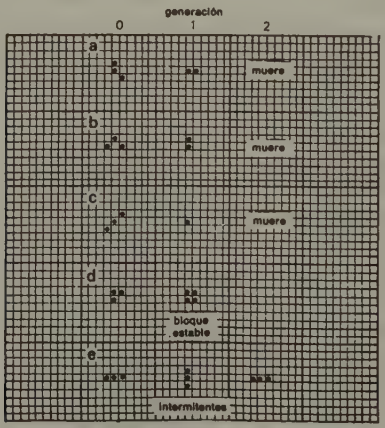
donde K es un escalar. Si $u(x, t)$ representa el desplazamiento transversal en el instante $t$ del punto de abscisa $x$ sobre la cuerda, la función $u$ es solución de tal ecuación en la que K depende de la naturaleza de la cuerda (o barra).

## Vida

• *Juego de la vida.* — Debido a Conway, este juego tiene por meta describir la evolución de una población dada sometida a tres reglas precisas:

— Supervivencia: toda ficha que tenga dos o tres fichas en su entorno queda con vida a la generación siguiente.
— Muerte: toda ficha que tiene cuatro fichas o más en su entorno muere de superpoblación. Toda ficha con uno o ningún vecino muere de aislamiento.
— Nacimientos: toda casilla que esté exactamente cerca de tres casillas que contienen fichas produce un nacimiento.

Damos a continuación la evolución de las configuraciones de tres fichas:



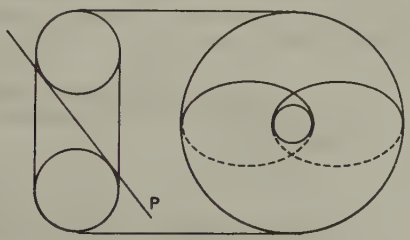

Evolución de las configuraciones de tres fichas.

## Viète, François (1540-1603)

• *Fórmula de Viete.* — V. PI.

## Villarceau, Antoine Yvon (1813-1883)

• *Círculos de Villarceau.* — Secciones de un toro por un plano tangente en dos puntos exactamente de un toro. Estos círculos son loxodromas del toro. Son los únicos círculos del toro distintos de los meridianos y los paralelos. Una representación material de ella se encuentra en el museo de l'OEuvre Notre-Dame de Strasbourg.




## Vinogradov, Ivan Metveevitch (1891- )

• *Teorema de Vinogradov.* — El número $g(k)$ que interviene en el enunciado del problema de Waring es superior o igual a $2^k - 2 + [(3/2)^k]$; es igual a ese número salvo para un número finito de $k$.
Los únicos valores para los que no está determinado son $k = 4$ y $k = 5$. Tenemos $g(3) = 9$; $19 \leqslant g(4) \leqslant 35$; $37 \leqslant g(5) \leqslant 54$; $g(6) = 79$.
V. WARING.

## Vírgula

• *Número con vírgula.* — Sinónimo de número decimal $d$ para expresar que puede escribirse bajo la forma $d = n, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, donde $n$ es un entero y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de las cifras de $\{0, 1, \ldots, 9\}$ tales que:

$$d = n + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + \ldots + a_n 10^{-n}$$

## Viviani, Vicenzo (1622-1703)

• *Ventana de Viviani.* — Curva de $\mathbf{R}^3$ cuya ecuación en coordenadas esféricas viene dada por $\rho = a$ y $\theta = \varphi$. Las proyecciones sobre los planos de coordenadas son respectivamente un círculo, un arco de parábola y una lemniscata.

## Volterra, Vito (1860-1940)

• *Ecuación integral de Volterra.* — Sea $V:(s, t) \mapsto V(s, t)$ un núcleo definido sobre $I = [\![a, b]\!] \times [\![a, b]\!]$ nulo para los pares $(s, t)$ de I tales que $t > s$ y

continuo sobre el dominio triangular definido por los pares $(s, t)$ de I tales que $t \leqslant s$. Las ecuaciones de Fredholm:

$$\int_a^b V(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s) \quad \text{y} \quad \varphi(s) - \lambda \int_a^b V(s, t)\varphi(t)\,dt = f(s)$$

se denominan, en este caso, ecuaciones de Volterra de primera y segunda especies.

## Volumen

Nombre dado a ciertas partes de $\mathbf{R}^3$ delimitadas por una superficie. Una bola, un cubo son volúmenes. Se llama, asimismo, volumen a la medida de tales conjuntos de puntos de $\mathbf{R}^3$ cuando existe.
V. VARIEDAD.

• *Volumen de una parte de* $\mathbf{R}^3$. — Sobre $\mathbf{R}^3$ existe una única medida llamada de Lebesgue tal que para todo pavimento $I \times J \times K$ de extremos $a_1$ y $b_1$ para I, $a_2$ y $b_2$ para J, $a_3$ y $b_3$ para K:

$$\mu(I \times J \times K) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Una parte D de $\mathbf{R}^3$ se denomina cubable y de volumen V(D) si D es $\mu$-medible y tiene por medida V(D). En relación a un sistema de referencia ortonormado

$$V(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz.$$

Si los puntos de D son conocidos por sus coordenadas semi-polares $(\rho, \theta, z) \in \Delta$, entonces:

$$V(D) \iiint_\Delta \rho\,d\rho\,d\theta\,dz;$$

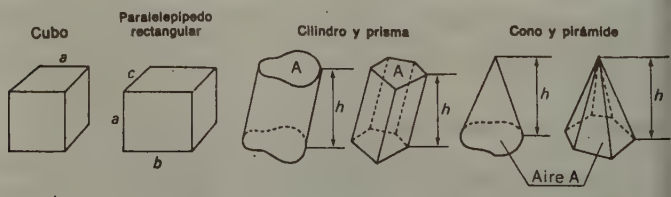
si son conocidos por sus coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi) \in \Delta'$; entonces:

$$V(D) = \iiint_{\Delta'} \rho^2 \cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

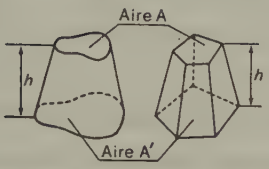
V. GULDIN, NIVELES (Fórmula de los tres).

## Volúmenes

Volúmenes de los sólidos usuales.



Tronco de cono y tronco de prisma




$$V = \frac{1}{3}h(A + A' + \sqrt{AA'})$$

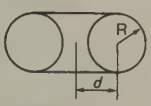
Bola

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Elipsoide

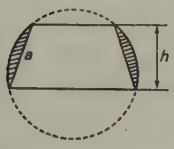
$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

Toro



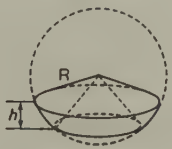

$$V = 2\pi^2 R^2 d$$

Anillo esférico



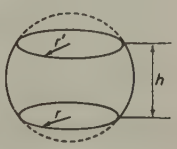

$$V = \frac{1}{6}\pi a^2 h$$

Sector esférico




$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Segmento esférico




$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r^2 + r'^2)\,h$$

Poliedros regulares inscritos en una esfera de radio R.

| Tetraedro | Cubo | Octaedro | Dodecaedro | Icosaedro |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{8R^3}{9\sqrt{3}}$ | $\frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$ | $\frac{4}{3}R^3$ | $\frac{2(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}}R^3$ | $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}R^3$ |

## Von Mangoldt, Hans Carl Friedrich

• *Función de von Mangoldt.* — Función aritmética $\Lambda : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$ definida por $\Lambda(n) = \operatorname{Log} p$ si $n = p^k$ con $p$ primo y $k \geqslant 1$ y por $\Lambda(n) = 0$ si no. Esta función interviene en teoría de números.

## Vulgar

• *Logaritmo vulgar.* — Empleado a veces como sinónimo de logaritmo decimal.

## Wallace, William (1768-1843)

• *Recta de Wallace.* — Sinónimo de recta de Simson.

## Wallis, John (1616-1703)

• *Fórmula de Wallis.* — Puede escribirse:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \ldots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \ldots}$$

o también:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n[(2n)!]^2} = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

• *Integral de Wallis.* — Integral de la forma $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n t \, dt$; si $\Gamma$ designa la función euleriana tenemos:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m t \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

## Wantzel, Pierre Laurent (1814-1848)

• *Teorema de Wantzel.* — Todo número constructible es algebraico sobre Q y su grado es una potencia de 2. Por tanto, $\pi$, que es transcendente, no es constructible; de ello se deriva que la cuadratura del círculo es imposible. Se establece asimismo la imposibilidad de la duplicación del cubo por la regla y el compás.

V. CONSTRUCCIÓN, CONSTRUCTIBLE, CUADRATURA, DUPLICACIÓN, RECTIFICACIÓN, TRISECCIÓN.

## Waring, Edward (1734-1798)

• *Hipótesis y problemas de Waring.* — En 1770, Waring emitía la hipótesis de que todo entero positivo $n$ puede escribirse como suma de cuatro cuadrados perfectos como máximo, como suma de nueve cubos perfectos como máximo, como suma de diecinueve potencias cuartas como máximo y de una manera general como suma de un número finito $r = g(k)$ de potencia $k$-ésima. Dicho en otros términos, la hipótesis de Waring afirma que para todo entero $k$ existe un entero $r = g(k)$ tal que todo entero $n$ puede escribirse:

$$n = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_r^k,$$

con $x_i \in \mathbf{N}$. El caso $k = 1$ es trivial. El caso $k = 2$ ha sido establecido por el teorema de Lagrange ($g(2) = 4$). En 1909, Wieferich lo demostraba para $k = 3$ ($g(3) = 9$). La existencia para todo $k$ del entero $g(k)$ fue probada por Hilbert en 1909; no obstante, no dio el medio de calcularlo. Fue entre 1919 y 1928 cuando Hardy y Littlewood descubrieron ese medio que aportaba una solución casi completa, salvo algunos casos dudosos, muchos de los cuales han sido resueltos después. Actualmente se investiga el valor más pequeño $\beta(k)$ de los enteros $g(k)$ posibles. Se sabe (teorema de Lagrange y de los tres cuadrados) que $\beta(2) = 4$ y que (Vinogradov) el entero más pequeño $r = G(k)$, tal que todo entero $n$ suficientemente grande se escribe $n = x_1^k + \ldots + x_r^k$, verifica:

$$G(k) < 6k \operatorname{Log} k + 10k.$$

V. VINOGRADOV.

## **Weber,** Wilhelm Eduard (1804-1891)

• *Teorema de Kronecker-Weber.* — V. KRONECKER.

## **Wedderburn,** Joseph Henry Maclagan (1882-1948)

• *Teorema de Wedderburn.* — Todo cuerpo finito es conmutativo (o toda álgebra de división finita es conmutativa).

## **Weddle,** Thomas (1817-1853)

• *Superficie de Weddle.* — Lugar de los vértices de los conos del segundo orden que pasan por seis puntos del espacio que son dobles para la superficie.

## **Weierstrass,** Karl Théodor Wilhelm (1815-1897)

• *Criterio de convergencia de Weierstrass.* — Criterio de convergencia normal para una serie de funciones numéricas. Una serie de funciones numéricas $\Sigma u_n$ es normalmente convergente sobre un conjunto **I** si existe una serie convergente de términos reales positivos $\Sigma v_n$ tal que $|u_n(x)| \leqslant v_n$ para todo $x \in \mathbf{I}$.

• *Factores primarios de Weierstrass.* — Sea una función entera $f$ que admite un conjunto E numerable de ceros todos ellos no nulos. Entonces, para todo $z \in \mathbf{C}$, $f(z)$ se escribe:

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{a_i \in E} [E(z,\ a_i,\ p_i)]^{m_i},$$

donde $g$ es una función holomorfa sobre **C**, donde $m_i$ es el orden de multiplicidad del cero $a_i$ y donde los factores $E(z, a_i, p_i)$, llamados factores primarios de Weierstrass, son de la forma:

$$E(z,\ a_i,\ p_i) = \left(1 - \frac{z}{a_i}\right) \exp\left(\frac{z}{a_i} + \cdots + \frac{z^{p_i}}{p_i a_i^{p_i}}\right)$$

siendo $p_i$ un entero escogido de forma que la serie $\Sigma(r/|a_i|)^{p_i+1}$ converja para todo número real $r \geqslant 0$.

• *Función de Weierstrass.* — La serie $\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$ (donde $\Omega$ es un sub-grupo discreto de **C** engendrado por dos complejos independientes), converge normalmente sobre todo compacto del palno **C**; la función $\mathfrak{P}$ de Weierstrass relativa a $\Omega$ es definida por:

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Es una función elíptica.
V. ELÍPTICA.

• *Fórmula de Weierstrass.* — Si C es la constante de Euler:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{C} \prod_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}.$$

También llamada: Producto infinito de Weierstrass.

• *Integrales de Weierstrass.* — Integrales elípticas de la forma:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}} \quad \text{y} \quad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}},$$

donde $P(x) = 4x^3 - cx - d$.

• *Lema o teorema de preparación de Weierstrass.* — Bajo forma concisa se puede enunciar:

1) Sea K un cuerpo. El anillo $K[[X_1, ..., X_n]]$ es factorial.
2) El anillo $C\{X_1, ..., X_n\}$ de las series enteras convergentes es un anillo factorial.

• *Teoremas de Weierstrass:*

1) Toda función compleja $f$, continua sobre $[\![a, b]\!]$ puede ser aproximada uniformemente sobre $[\![a, b]\!]$ por polinomios. Este resultado también se llama teorema de Stone-Weierstrass.
V. STONE.
2) Sea $(f_n)_{n \geqslant 0}$ una sucesión de funciones holomorfas sobre un abierto U de C tal que para todo disco cerrado $\Delta \subset U$ la sucesión $(f(z))_{n \geqslant 0}$ converge uniformemente en $\Delta$ hacia $f(z)$. Entonces, la función $f$ así definida es holomorfa sobre U y para todo $k \geqslant 1$ la sucesión $(f_n^{(k)}(z))_{n \geqslant 0}$ converge uniformemente sobre $\Delta$ hacia $f^{(k)}(z)$.
3) Si $f$ es una aplicación continua de un espacio topológico E en un espacio topológico separado F, entonces la imagen de todo compacto de E es un compacto de F.
4) Sobre los puntos singulares esenciales: sea $f$ una función holomorfa en un disco abierto punteado de C de centro $z_0$. Si $z_0$ es un punto singular esencial aislado de $f$, entonces para todo número real $\varepsilon > 0$, la imagen por $f$ del disco abierto punteado de centro $z_0$ y de radio $\varepsilon$ es densa en C.
V. PICARD.
5) Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ números algebraicos distintos; los números $e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\overline{\mathbf{Q}}$ (1885).

• *Teorema de Bolzano-Weierstrass.* — V. BOLZANO.

## Whittaker, Sir Edmund Taylor (1873-1956)

• *Solución de Whittaker de la ecuación de Laplace.* — V. LAPLACE (Ecuación de).

## Wieferich, Arthur (principios del siglo XX)

V. WARING.

## Wilson, John (1741-1793)

• *Teorema de Wilson.* — Para que $n$ divida $(n-1)!+1$, es necesario y suficiente que $n$ sea primo. Para $p>0$ entero primo, tenemos, pues $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

## Witt, Ernst (1911-1991)

• *Anillo de vectores de Witt.* — Para todo cuerpo K de característica $p>0$ existe un anillo de valoración completo V(K), llamado anillo de los vectores de Witt, del que el cuerpo de fracciones es de característica 0, cuyo ideal maximal $\mathfrak{m}$ está engendrado por $p$ y tal que $V(K)/\mathfrak{m}$ sea isomorfo a K. Si se toma $K = \mathbf{F}_p$, entonces V(K) es isomorfo a $\mathbf{Q}_p$.

• *Teorema de Witt.* — Sean K un cuerpo de característica $\neq 2$, E un K-espacio vectorial provisto de una forma simétrica no degenerada, F y F′ dos sub-espacios vectoriales de E y $\sigma : F \to F'$ una isometría. Entonces, $\sigma$ se prolonga en una isometría de E sobre sí mismo.

• *Vector de Witt.* — Elemento de un anillo de vectores de Witt.

## Wolfskehl, F. P.

V. Conjetura de Fermat.

## Wronskiano

Palabra derivada del nombre de Hoené Wronski (1778-1853)

• *Wronskiano de n funciones numéricas* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *derivables* $n-1$ *veces.* — Determinante definido por:

$$W(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \ldots & u_n'(x) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ u_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Interviene en la resolución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

# Y-Z

## Y

V. CONJUNCIÓN.

## Yoneda, Nobuo (1930-1996)

• *Lema de Yoneda.* — Sean $\mathscr{C}$ una categoría, $F:\mathscr{C}\to$ Cjto un functor covariante y X un objeto de $\mathscr{C}$; este lema afirma que la aplicación $\Phi \mapsto \Phi_X(1_X)$ es una biyección del conjunto de los morfismos functoriales del functor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$ en el functor F, sobre el conjunto F(X).

## Young, W. H. (1862-1946)

• *Resto de Young.* — V. MAC LAURIN, TAYLOR.

## Yule, G. Udny (1871-1951)

• *Coeficiente de Yule.* — Coeficiente *d* utilizado en estadística que informa sobre la asimetría de la distribución de un carácter cuantitativo con relación a la mediana. Se define por:

$$d = \frac{Q_1 + Q_3 - 2M}{2(Q_3 - Q_1)},$$

donde M es la mediana y donde $Q_1$ y $Q_3$ son el primer y el tercer cuartiles.

## Z

Inicial de la palabra *Zahl* («número» en alemán) empleado para representar el anillo de los enteros racionales.

## Zariski, Oscar (1899-1986)

• *Topología de Zariski sobre el espectro* Spec(A) *de un anillo conmutativo unitario* A. — Si X es una parte de A, si V(X) es el conjunto de los ideales

primos que contienen X, los V(X) son los cerrados de una topología sobre Spec(A) llamada topología espectral o de Zariski.
V. ESQUEMAS.

• *Topología de Zariski sobre* $K^n$, *donde* K *es un cuerpo conmutativo.* — Topología sobre $K^n$ cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos de $K^n$.

## Zenón de Elea (siglo v a. de C.)

• *Paradoja de Zenón de Elea.* — Apoyándose en la aplicación continua de razonamientos para el numerable, parecen probar la imposibilidad del movimiento. Antes de que un proyectil pueda alcanzar un punto dado debe primero atravesar la mitad de esa distancia; antes de que pueda alcanzar esa mitad, debe atravesar la cuarta parte y así indefinidamente. Si la tortuga lleva delantera en la carrera sobre Aquiles, éste no podrá atraparla jamás cualquiera que sea su rapidez, porque mientras corre para alcanzar el punto de donde ha partido, la tortuga avanza. La flecha lanzada está siempre inmóvil; en efecto, todo cuerpo está, bien en movimiento, bien en reposo, y está en reposo cuando se encuentra en un espacio igual a su volumen. Zenón de Elea imaginó otros argumentos para mostrar que el movimiento no es más que una ilusión, que las discusiones sobre esa noción están llenas de contradicciones. Cuestionan la divisibilidad hasta el infinito del espacio y del tiempo.

## Zermelo, Ernst (1871-1953)

• *Axioma o teorema de Zermelo.* — Todo conjunto E puede ser provisto de un buen orden. Este axioma es lógicamente equivalente al axioma de la elección y al teorema o axioma de Zorn. No se conoce explícitamente ningún buen orden sobre **R**.

## Zeta o Dzeta (ζ)

• *Función zeta de Riemann.* — V. RIEMANN.

## Zona

V. ESFÉRICA.

## Zorn, Max (1906-1993)

• *Axioma o teorema de Zorn.* — Todo conjunto inductivo posee un elemento maximal. Se demuestra que este axioma es lógicamente equivalente al axioma de la elección y al teorema o axioma de Zermelo.

# notaciones

## álgebra

| | |
|---|---|
| $a'$ | $a$ prima |
| $a''$ | $a$ segunda |
| $a'''$ | $a$ tercera |
| $a_n$ | $a$ sub $n$ |
| $*$; T | leyes de composición interna |
| $\delta_{ij}$ | símbolo de KRONECKER |
| $\sum_{1}^{n} a_i$ | suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ |
| $\prod_{1}^{n} a_i$ | producto $a_1 a_2 \ldots a_n$ |
| $\lvert x \rvert$ | valor absoluto de $x$ |
| $\lvert z \rvert$ | módulo de $z$ |
| $v(x)$ | valoración de $x$ |
| $\bar{z}$ | conjugado de $z$ |
| arg(z); Arg(z) | argumento de $z$ |
| Re(z) | parte real de $z$ |
| Im(z) | parte imaginaria de $z$ |
| $a + ib$ | número complejo |
| $a + ib + cj + dk$ | cuaternio de HAMILTON |
| $E/\mathscr{R}$ | conjunto cociente de E por una equivalencia $\mathscr{R}$ |
| G/H | grupo cociente de G por el sub-grupo distinguido H |
| A/I | anillo cociente de A por el ideal I |
| E/F | espacio vectorial cociente de E por el sub-espacio vectorial F |
| P/Q | fracción racional |
| $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $(\vec{u}\vec{v})$ | producto escalar |
| $\vec{u} \wedge \vec{v}$ | producto vectorial |
| $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$; $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ | producto mixto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ |
| $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ | producto exterior de $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ |
| $\oplus$ | suma directa |
| $\otimes$ | producto tensorial |
| $\simeq$; $\cong$ | isomorfo |
| $D: K[X] \to K[X]$ | derivación sobre K[X] |

| | |
|---|---|
| $\Delta$ | discriminante de la ecuación de segundo grado |
| $[E:K]$ | grado de la extensión E sobre K |
| $\mathrm{Gal}(E/K)$ | grupo de GALOIS de E sobre K |
| $[\overline{X}, \overline{Y}]$ | corchete de dos campos de vectores |
| $\mathrm{Hom}(X, Y)$ | conjunto de morfismos de X hacia Y |
| $\mathscr{C}^*$ | categoría dual de $\mathscr{C}$ |
| $H_n(M)$ | $n$-ésimo módulo de homología |
| $B_n(M)$ | $n$-ésimo módulo de bordes |
| $Z_n(M)$ | $n$-ésimo módulo de ciclos |
| $H^n(M)$ | $n$-ésimo módulo de cohomología |
| $B^n(M)$ | $n$-ésimo módulo de cobordes |
| $Z^n(M)$ | $n$-ésimo módulo de cociclos |
| $b_n(M)$ | $n$-ésimo número de Betti |
| $\Gamma_{ijk}$ y $\Gamma^l_{ij}$ | símbolos de CHRISTOFFEL |
| $R^h_{ilk}$ | tensor de RIEMANN-CHRISTOFFEL |
| $K_A$ | adelas |
| $X^*$ | monoide libre engendrado por X |

## álgebra lineal

| | |
|---|---|
| $(a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ | matriz de $n$ filas y $p$ columnas |
| $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ | matriz de $n$ filas y $p$ columnas |
| $\det(a_{ij})$ | determinante de la matriz $(a_{ij})$ |
| $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ | determinante |
| $\det M$ | determinante de la matriz M |
| $M(n, p)$ | matriz M de $n$ líneas y $p$ columnas |
| $m_{ij}$ | menor |
| $M^*$ | adjunta de la matriz M |
| $\overline{M}$ | matriz conjugada de M |
| $I$ | matriz unidad |
| $M^{-1}$ | inversa de M |
| ${}^tM$ | transpuesta de M |
| $\mathrm{Tr}(M)$ | traza de M |

| | |
|---|---|
| $\mathrm{Spec}(M)$ | espectro de M |
| $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) & \dots \end{pmatrix}$ | permutación |
| $\varepsilon(\sigma)$ | signatura de $\sigma$ |
| $\mathrm{Ker}(f)$; $\mathrm{Ker}f$ | núcleo de |
| $\mathrm{Im}(f)$; $\mathrm{Im}f$ | imagen de $f$ |
| $\mathrm{Coker}(f)$; $\mathrm{Coker}f$ | conúcleo de $f$ |
| $E^*$(resp. $E^{**}$) | dual (resp. bidual) del espacio vectorial E |
| $\mathrm{Co\text{-}im}(f)$; $\mathrm{Co\text{-}im}f$ | coimagen de $f$ |
| $\varphi^*$ | forma adjunta de $\varphi$ |
| $u^*$ | adjunto de u |
| ${}^t u$ | transpuesto de $u$ |
| $\mathrm{Spec}\,\varphi$ | espectro de $\varphi$ |
| $F^\perp$ | ortogonal de F |
| $\dim E$; $\dim_K E$ | dimensión del K-espacio vectorial E |
| $\mathrm{codim}\,E$; $\mathrm{codim}_K E$ | codimensión del K-espacio vectorial E |
| $\oplus$ | suma directa |

## análisis elemental

| | |
|---|---|
| $(u_n)_{n\geq 0}$; $(u_n)$ | sucesión de término general $u_n$ |
| $(u_i)_{i\in I}$ | familia indizada por I |
| $\sum_{n\geq 0} u_n$; $\Sigma u_n$ | serie de término general $u_n$ |
| $\prod_{n\geq 0} u_n$ | producto infinito |
| $\sigma_n$ | sumas de CÉSARO |
| $\lim_{x\to a} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ |
| $\lim_{x\to a^+} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ para valores superiores a $a$ |
| $\lim_{x\to a^-} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ para valores inferiores a $a$ |
| $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $+\infty$ |
| $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ | límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $-\infty$ |
| $f(a+0)$ | límite finito de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ para valor superior a $a$ |
| $f(a-0)$ | límite finito de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ para valor inferior a $a$ |

| | |
|---|---|
| $\underline{\lim}_{x \to a} f(x)$; $\liminf_{x \to a} f(x)$ | límite inferior de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ |
| $\overline{\lim}_{x \to a} f(x)$; $\limsup_{x \to a} f(x)$ | límite superior de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ |
| $f'(x)$; $df/dx$ | derivada |
| $f'(x + 0)$ | derivada a la derecha |
| $f'(x - 0)$ | derivada a la izquierda |
| $dy$ | diferencial de $y$ |
| $d^2f/dx^2$; $f''(x)$; $f^{(2)}(x)$ | derivada segunda |
| $d^nf/dx^n$, $f^{(n)}(x)$ | derivada $n$-ésima |
| $\partial u/\partial x$; $u'_x$ | derivada parcial de $u$ con relación a $x$ |
| $\dot{q}$ | derivada de $q$ con relación al tiempo $t$ |
| $\partial^2 u/\partial x \partial y$; $u''_{xy}$ | derivada parcial segunda de $u$ con relación a $y$ y luego a $x$ |
| $d\vec{M}/dt$ | derivada vectorial |
| $Df$ | diferencial de $f$ |
| $C^0$ | clase de funciones continuas |
| $C^p$ | clase de funciones $p$ veces continuamente diferenciables |
| $C^\infty$ | clase de funciones indefinidamente diferenciables |
| $\Delta$ | laplaciana |
| $\nabla$ | nabla |
| $\diamondsuit$ | quad |
| $\square_n$ | dalembertiano |
| $\overrightarrow{\text{Grad}}\, u$ | gradiente |
| $\text{Div} f$ | divergencia |
| $\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{u}$ | rotacional |
| $ds^2$ | primera forma cuadrática fundamental |
| $d_{11}dx_1^2 + 2d_{12}dx_1dx_2 + d_{22}dx_2^2$ | segunda forma cuadrática fundamental |
| $\int$ | símbolo de la integral |
| $\int_a^b f(x)\,dx$ | integral definida |
| $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ | integral generalizada |
| $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ | integral generalizada |
| $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dx\,dy$ | integral doble |
| $\iiint_{\Delta} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$; | |

| | |
|---|---|
| $\int_{\Delta} f\,d\tau$ | integral triple |
| $\int\int\cdots\int_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ | integral múltiple |
| $\int_{\Gamma} f\,ds$ | integral curvilínea |
| $\int_{\Gamma} \vec{V}\cdot\vec{ds};\ \int_{\Gamma} \vec{V}\cdot\overrightarrow{dM}$ | circulación o trabajo de $\vec{V}$ a lo largo de $\Gamma$ |
| $\int\int_{S} f\,d\sigma$ | integral de superficie |
| $\int_a^b f(x)\,dF(x)$ | integral de STIELTJES |
| $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ | integral a lo largo de un camino $\gamma$ |
| $I(\gamma, a)$ | índice del camino cerrado $\gamma$ en el punto $a$ |
| $\mu(E)$ | medida de E |
| $\lvert x\rvert$ | valor absoluto de $x$ |
| $\lvert z\rvert$ | módulo de $z$ |
| $\bar{z}$ | conjugado de $z$ |
| $\mathrm{Re}(z)$ | parte real de $z$ |
| $\mathrm{Im}(z)$ | parte imaginaria de $z$ |
| $\mathrm{Am}(z)$ | amplitud de $z$ |
| $\lVert(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rVert_1 = \sum_1^n \lvert x_i\rvert$<br>$\lVert(x_1, x_2, \ldots, x_n)\rVert_2 = \left(\sum_1^n \lvert x_i\rvert^2\right)^{1/2}$<br>$\lVert(x_1, x_2, \ldots, x_p)\rVert_p = \left(\sum_1^n \lvert x_i\rvert^p\right)^{1/p}$<br>$\lVert(x_1, x_2, \ldots, x_p)\rVert_\infty = \operatorname{Sup}_{i\in\{1, 2, \ldots, n\}} \lvert x_i\rvert$ | normas fundamentales de $\mathbf{R}^n$ |
| $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ | jacobiano |
| $\mathrm{vp}\int_a^b f(x)\,dx$ | valor principal de CAUCHY |
| $\ll$, $\preccurlyeq$ | notaciones de HARDY |
| $o(g)$, $O(g)$ | notaciones de LANDAU |
| B | función euleriana beta |
| $\Gamma$ | función euleriana gamma |
| $\wp(z)$ | función de WEIERSTRASS |

| | |
|---|---|
| $\zeta$ | función zeta de RIEMANN |
| $J_a$ | función de BESSEL |

## análisis funcional

| | |
|---|---|
| $\mu(E)$ | medida de E |
| $\delta_a$ | medida de Dirac en $a$ |
| $(f\|g)$ | producto escalar |
| $\|\|f\|\|$ | norma de $f$ |
| $\|\|f\|\|_1$ | norma de la convergencia en media |
| $\|\|f\|\|_2$ | norma de la convergencia en media cuadrática |
| $\|\|f\|\|_\infty$ | norma de la convergencia uniforme |
| $f * g$ | producto de convolución de $f$ y $g$ |
| $\langle T, \varphi \rangle$ | imagen de $\varphi$ por la distribución T |
| $\hat{f}$ | transformada de FOURIER-PLANCHEREL de $f$ |
| $B_n$ | números de BERNOULLI |
| $Q_n$ | polinomio de BERNOULLI |
| $H_n$ | polinomios de HERMITE |
| $P_n^{(\alpha, \beta)}$ | polinomios de JACOBI |
| $L_n$ | polinomios de LAGUERRE |
| $P_n$ | polinomios de LEGENDRE |
| $T_n$ | polinomios de TCHEBYCHEV |
| $\mathscr{H}_n$ | función de HERMITE |
| $\mathscr{L}_n$ | funciones de LAGUERRE |
| $\mathscr{F}(E, F)$; $F^E$ | conjunto de funciones de E en F |
| $\mathscr{C}(I, R)$ | espacio de funciones reales continuas sobre I |
| $\mathscr{B}(I, R)$ | espacio de funciones acotadas sobre I |
| $\mathscr{L}^1$ | conjunto de funciones |
| $\mathscr{L}^2$ | conjunto de funciones de cuadrado integrable |
| $\mathscr{L}(E, F)$ | conjunto de funciones lineales continuas de E en F |
| $\mathscr{A}_p(E, F)$ | conjunto de aplicaciones $p$-lineales alternadas continuas de $E^p$ en F |

## aritmética

| | |
|---|---|
| $+$ | más |
| $-$ | menos |
| $\pm$ | más o menos |
| $ab$, $a.b$, $a \times b$ | $a$ multiplicado por $b$ |
| $a/b$, $a:b$, $a \div b$ | $a$ dividido por $b$ |
| $=$ | igual |

| | |
|---|---|
| $\simeq$ | sensiblemente igual, aproximadamente igual |
| $\neq$ | diferente |
| $\equiv$ | congruente con |
| $>$ | estrictamente superior |
| $<$ | estrictamente inferior |
| $\geqslant$ | superior (o igual) |
| $\leqslant$ | inferior (o igual) |
| $a^n$ | $a$ elevado a $n$ ($n$ entero) |
| $a^{n^p}$ | $a^{(n^p)}$ |
| $a^{\overset{n}{}}$ | $a^{\{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}\}}$ $n$ ocurrencias de $a$ |
| $x \uparrow n$ | notación de KNUTH |
| $a^{-1}$, $1/a$ | inverso de $a$ |
| $\sqrt[n]{\ }$ | radical $n$-ésimo |
| $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ | raíz $n$-ésima positiva de $a$ |
| $\sqrt{a} = a^{1/2}$ | raíz cuadrada positiva de $a$ |
| $\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$ | $a$ elevado a $p/n$ con $p/n \in \mathbf{Q}$ |
| $a/b$ | $a$ divide $b$ |
| MCD | máximo común divisor |
| MCM | mínimo común múltiplo |
| $(a, b)$ | MCD de $a$ y $b$ |
| $x \equiv a \bmod p$ | $x$ congruente con $a$ módulo $p$ |
| $[x]$; $E(x)$ | parte entera de $x$ |
| $\varphi(n)$ | indicador de Euler |
| $\mu(n)$ | función de Möbius |
| $\left(\frac{a}{p}\right)$ | símbolo de LEGENDRE |
| $F_n$ | números de FERMAT |
| $T_n$ y $t_n$ | números triangulares |
| $C_n$ y $c_n$ | números cuadrados |
| $\Pi_n$ | números piramidales |

## constantes

| | |
|---|---|
| $i$ | raíz cuadrada de $-1$ |
| $j$ | raíz cúbica de la unidad de argumento $2\pi/3$ |
| $e$ | base del logaritmo neperiano |
| C | constante de EULER |
| $\pi$ | pi |
| M | módulo de los logaritmos decimales |
| $\Phi$ | número de oro |

## conjuntos

| | |
|---|---|
| $\in$ | pertenece a |
| $\notin$ | no pertenece a |
| $\{a\}$ | singleton |
| $\{a, b\}$ | par |
| $\{x/...\}$ | conjunto de los elementos $x$ que verifican una propiedad dada |
| $(x, y)$ | par (ordenado) |
| $(x_1, x_2, ..., x_n)$ | $n$-upla |
| $\subset$; $\subseteq$ | inclusión |
| $\subsetneq$; $\subsetneqq$; $\subset$ $\neq$ | inclusión estricta |
| $\supset$ | contiene |
| $\cup$ | reunión |
| $\cap$ | intersección |
| $-$; $\setminus$ | diferencia |
| $\Delta$ | diferencia simétrica |
| $\bigcup_{i \in I} A_i$ | reunión de la familia de partes $(A_i)_{i \in I}$ |
| $\bigcap_{i \in I} A_i$ | intersección de la familia de partes $(A_i)_{i \in I}$ |
| $\complement_E A$; $\overline{A}$ | complementario de A |
| $\phi$ | conjunto vacío |
| $E \times F$ | producto cartesiano |
| $E^n$ | conjunto de $n$-uplas de elementos de E |
| $\prod_{i \in I} E_i$ | producto conjuntista de los $E_i$ |
| $\chi_A$ | función característica de la parte A de E |
| $\mathcal{P}(E)$ | conjunto de las partes de E |
| $\#\ E$, $\overline{E}$, $\mathring{E}$; Card E; $\lvert E \rvert$ | Cardinal de E |
| $\aleph_0$ | aleph cero (Cardinal de N) |
| $\aleph_\alpha$ | aleph alfa |
| $\omega$ | el más pequeño ordinal infinito |
| $\Omega$ | el más pequeño ordinal no numerable |
| $x \mathcal{R} y$ | $x$ está relacionado con $y$ por la relación $\mathcal{R}$ |
| $f: E \to F$ | $f$ es una aplicación de E en F |
| $f: x \mapsto y$ | $x$ tiene por imagen $y$ en la aplicación $f$ |
| $f(x)$ | imagen de $x$ por $f$ |
| $f^{-1}(x)$ | imagen recíproca de $x$ por $f$ |
| $f(E)$ | imagen del conjunto E por $f$ |
| $\operatorname{Im} f$ | imagen de $f$ |
| $f/E$ | restricción de $f$ en E |
| $\mathcal{R}^{-1}$ | relación recíproca de la relación $\mathcal{R}$ |
| $f^{-1}$ | biyección recíproca de la biyección $f$ |

| | |
|---|---|
| $f \circ g$ | compuesta de las aplicaciones $f$ y $g$ |
| $I_E$ o $id_E$ | aplicación idéntica sobre E |

## conjuntos de números

| | |
|---|---|
| $\mathbf{N}$ | conjunto de números naturales |
| $\mathbf{Z}$ | conjunto de números enteros |
| $\mathbf{Q}$ | conjunto de números racionales |
| $\mathbf{D}$ | conjunto de números decimales |
| $\mathbf{R}$ | conjunto de números reales |
| $\mathbf{C}$ | conjunto de números complejos |
| $\overline{\mathbf{Q}}$ | conjunto de números algebraicos |
| $\mathbf{Q}(i)$ | conjunto de números complejos $a + ib$ con $a \in \mathbf{Q}$ y $b \in \mathbf{Q}$ |
| $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ | conjunto de números reales $a + b\sqrt{2}$ con $a \in \mathbf{Q}$ y $b \in \mathbf{Q}$ |
| $\mathbf{H}$ | conjunto de cuaternios de HAMILTON |
| $\mathbf{Z}[i]$ | conjunto de enteros de GAUSS |
| $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ | conjunto de números reales $a + b\sqrt{2}$ con $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}$ |
| $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | conjunto de clases residuales de enteros módulo $n$ |
| $n\mathbf{Z}$ | conjunto de múltiplos de $n$ |
| $\mathbf{Z}_p$ | conjunto de enteros $p$-ádicos |
| $\mathbf{Z}_{(p)}$ | conjunto de racionales $a/b$ con $(b, p) = 1$ |
| $\mathbf{Z}[1/p]$ | conjunto de racionales $a/p^k$ con $k \in \mathbf{N}$ |
| $\mathbf{Q}_p$ | conjunto de números $p$-ádicos |
| $\mathbf{E}_+$ | conjunto de elementos positivos de E |
| $\mathbf{E}_-$ | conjunto de elementos negativos de E |
| $\mathbf{E}^*$ | E excluyendo el 0 |
| $^*\mathbf{Z}$ | conjunto de enteros no estándar |
| $^*\mathbf{R}$ | conjunto de números reales no estándar |

## funciones usuales

| | |
|---|---|
| $a^x$ | exponencial de base $a$ |
| $e^x$; $\exp x$ | exponencial de base $e$ |
| $\log_a x$ | logaritmo de base $a$ |
| $\mathrm{Log}\, x$; $\ln x$ | logaritmo neperiano |
| $\log x$ | logaritmo decimal |
| $\mathrm{colog}\, x$ | cologaritmo decimal |
| $\mathrm{Ci}(x)$ | coseno integral |
| $\mathrm{Si}(x)$ | seno integral |
| $\mathrm{Li}(x)$ | logaritmo integral |

| | |
|---|---|
| $[x]$ | parte entera de $x$ |
| B | función beta |
| $\Gamma$ | función gamma |
| $\mathscr{P}(z)$ | función de WEIERSTRASS |
| $\zeta$ | función zeta de RIEMANN |
| $J_n$ | función de BESSEL |
| $Q_n$ | polinomios de BERNOULLI |
| $H_n$ | polinomios de HERMITE |
| $P_n^{(\alpha, \beta)}$ | polinomios de JACOBI |
| $L_n$ | polinomios de LAGUERRE |
| $P_n$ | polinomios de LEGENDRE |
| $T_n$ | polinomios de TCHEBYCHEV |
| $\mathscr{H}_n$ | funciones de HERMITE |
| $\mathscr{L}_n$ | funciones de LAGUERRE |
| sn, cn, dn | funciones elípticas jacobianas |
| $\chi_A$ | función característica de A |
| $\varphi(n)$ | función indicatriz de EULER |
| $\mu(n)$ | función de MÖBIUS |
| L o $L(q, \dot{q}, t)$ | lagrangiano |
| H o $H(p, q, t)$ | hamiltoniano |

Funciones de la trigonometría circular e hiperbólica. V. *Trigonometría*.

| | |
|---|---|
| Ber, Bei | funciones de KELVIN |
| $H_\lambda^1$, $H_\lambda^2$ | funciones de HANKEL |
| $N_\lambda$ | función de Neumann |

## geometría

| | |
|---|---|
| $\overline{AB}$ | medida algebraica de (A, B) |
| $\overrightarrow{AB}$ | vector AB |
| $(\widehat{AB})$ | recta que pasa por A y B |
| AB | arco AB |
| $(O, D, \vec{u})$ | eje |
| $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ | ángulo del par de vectores $(\vec{u}, \vec{v})$ |
| $\widehat{(\Delta, \Delta')}$ | ángulo del par de semirrectas vectoriales $(\Delta, \Delta')$ |
| $\widehat{(D, D')}$ | ángulo del par de rectas vectoriales (D, D') |
| $\widehat{(Ox, Oy)}$ | ángulo del par de semirrectas (Ox, Oy) |
| $\widehat{ABC}$ | ángulo del par de semirrectas (BA, BC) |
| mes$(\theta)$ | medida de $\theta$ |

| | |
|---|---|
| $(O, A_1, A_2, ..., A_n)$; $(O, e_1, e_2, ..., e_n)$ | sistema de referencia afín |
| $(Ox, Oy, Oz)$ | triedro |
| $(x, y)$; $(x, y, z)$ | coordenadas cartesianas |
| $(\rho, \theta)$ | coordenadas polares |
| $(\rho, \theta, z)$ | coordenadas cilíndricas (o semi-polares) |
| $(\rho, \theta, \varphi)$ | coordenadas esféricas |
| $/\!/$ | relación de paralelismo |
| $\vec{u} \perp \vec{v}$ | $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$ |
| $D \perp D'$ | D es perpendicular a D' |
| $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ | razón doble |
| $P(E)$ | espacio proyectivo |
| $P_n(K)$ | espacio proyectivo $P(K^{n+1})$ |
| $A_n(K)$ | espacio afín asociado a $K^n$ |
| $\hat{E}$ | completado proyectivo del espacio vectorial E |
| $\hat{\mathscr{E}}$ | completado proyectivo del espacio afín $\mathscr{E}$ |
| $O(E)$; $O(q)$ | grupo ortogonal de $q$ definido sobre E |
| $SO(E)$ | grupo especial ortogonal de E |
| $O^+(E)$ | grupo de rotaciones vectoriales |
| $GL(E)$; $GL_n(K)$ | grupo lineal de E; de $K^n$ |
| $GO(E)$; $GO_n(K)$ | grupo de semejanzas vectoriales de E; de $K^n$ |
| $GA(\mathscr{E})$ | grupo afín |
| $Sim(\mathscr{E})$ | grupo de semejanzas afines |
| $PGL(E)$ o $PGL_n(K)$ | grupo proyectivo de E; de $K^n$ |
| $SL(E)$; $SL_n(K)$ | grupo unimodular de E; de $K^n$ |
| $PSL(E)$; $PSL_n(K)$ | grupo proyectivo unimodular de E; de $K^n$ |
| $Sp(E)$; $Sp_{2r}(K)$ | grupo simpléctico de E; de $K^{2r}$ |
| $PSp(E)$; $PSp_{2r}(K)$ | grupo proyectivo simpléctico de E; de $K^{2r}$ |
| $(\vec{t}, \vec{\gamma}, \vec{\nu})$ | base del triedro de DARBOUX-RIBAUCOUR |
| $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ | base del triedro de SERRET-FRÉNET |
| $C(s)$ | curvatura |
| $\tau(s)$ | torsión |
| $R(s)$ | radio de curvatura |
| $T(s)$ | radio de torsión |
| $\chi(\Sigma)$; $c$ | característica de EULER-POINCARÉ |
| $SU(E)$ | grupo especial unitario |
| $U(E)$ | grupo unitario |
| $S_2$ | esfera unidad en $\mathbf{R}^3$ |
| $S_n$ | esfera unidad en $\mathbf{R}^{n+1}$ |

## grafos

| | |
|---|---|
| $[x, y]$ | arista $x$, $y$ |
| $\Gamma^-(x)$ | conjunto de predecesores de $x$ |

| | |
|---|---|
| $\Gamma^+(x)$ | conjunto de sucesores de $x$ |
| $\Gamma(x)$ | conjunto de elementos próximos de $x$ |
| $a(G)$ | número de aristas de G |
| $s(G)$ | número de vértices de G |
| $\lambda(G)$ | número cociclomático |
| $\nu(G)$ | número ciclomático |
| $d^-(x)$ | semi-grado interior de $x$ |
| $d^+(x)$ | semi-grado exterior de $x$ |
| $d(x)$ | grado de $x$ |
| $\omega(A)$; $(\omega^+(A), \omega^-(A))$ | cociclo |
| $K_n$ | clique de $n$ vértices |
| G′ | grafo dual de G |
| G* | grafo adjunto de G |

## lógica

| | |
|---|---|
| $\top$; non | negación |
| $\wedge$; y | conjunción |
| $\vee$; o | disyunción |
| $\veebar$ | disyunción exclusiva, alternativa |
| $\Rightarrow$ | implicación |
| $\Leftrightarrow$ | equivalencia |
| $\mid$ | barra de SHEFFER |
| $\downarrow$ | símbolo de PEIRCE |
| $\forall$ | para todo |
| $\exists$ | existe por lo menos un |
| $\tau$ | tau de HILBERT |
| $(x/a)$ | $x$ substituido por $a$ |
| $\vdash$ | inferencia |

## órdenes

| | |
|---|---|
| $>$ | estrictamente superior |
| $<$ | estrictamente inferior |
| $\geqslant$ | superior (o igual) |
| $\leqslant$ | inferior (o igual) |
| $[a, b]$ | intervalo cerrado |
| $]a, b[$ | intervalo abierto |
| $[a, b[$ | intervalo cerrado a izquierda, abierto a derecha |
| $]a, b]$ | intervalo abierto a izquierda, cerrado a derecha |
| $]-\infty, a]$; $]\leftarrow, a]$ | sección inicial cerrada |
| $]-\infty, a[$; $]\leftarrow, a[$ | sección inicial abierta |
| $[a, +\infty[$; $[a, \rightarrow[$ | sección final cerrada |

| | |
|---|---|
| $]a, +\infty[$; $]a, \rightarrow[$ | sección final abierta |
| $]-\infty, +\infty[$; $\mathbf{R}$ | conjunto de números reales |
| $[-\infty, +\infty]$; $\overline{\mathbf{R}}$ | recta real acabada |
| $\infty$ | infinito |
| $\underset{x\in A}{\mathrm{Sup}}\, x$ | extremo superior de la parte A de un conjunto ordenado |
| $\underset{x\in E}{\mathrm{Sup}}\, f(x)$ | extremo superior de $f$ definido sobre E con valores en un conjunto ordenado |
| $\underset{i\in I}{\mathrm{Sup}}\, f_i$ | envolvente superior de una familia de funciones |
| $\underset{x\in A}{\mathrm{Inf}}\, x$ | extremo inferior de la parte A de un conjunto ordenado |
| $\underset{x\in E}{\mathrm{Inf}}\, f(x)$ | extremo inferior de $f$ definido sobre E con valores en un conjunto ordenado |
| $\underset{x\in I}{\mathrm{Inf}}\, f_i$ | envolvente inferior de una familia de funciones |

## probabilidades y estadísticas

| | |
|---|---|
| $\mathrm{P}(E)$ | probabilidad de E |
| $\mathrm{P}_A(E)$ | probabilidad condicional de E en relación a A |
| $v[X]$; $v(X)$ | varianza |
| $\sigma(X)$ | desviación típica |
| $E[X]$; $E(X)$; $\overline{X}$ | esperanza matemática o media de X |
| $M_r[X]$; $M_r(X)$ | momento de orden $r$ de X |
| $\rho$ | coeficiente de correlación |
| $\mathrm{Cov}(X, Y)$ | covarianza de X e Y |
| $\chi^2$ | chi cuadrado o ji cuadrado |
| $n!$ | factorial de $n$ |
| $C_n^p$, $\binom{n}{p}$ | número de combinaciones de $n$ objetos tomados $p$ a $p$ |
| $A_n^p$ | número de variaciones de $n$ objetos tomados $p$ a $p$ |
| $S_n^k$ | número de Stirling de primera especie |
| $\sigma_n^k$ | número de Stirling de segunda especie |
| $B_n$ | número de BELL |
| $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ | ley normal |

## estructuras algebraicas

### Anillos y Algebras

| | |
|---|---|
| $A[X]$ | anillo de polinomios en una indeterminada |
| $A[X_1, ..., X_n]$ | anillo de polinomios en $n$ indeterminadas |

| | |
|---|---|
| $A[[X]]$ | anillo de series formales en una indeterminada |
| $C[\Gamma]$ | álgebra afín de la curva $\Gamma$ |
| $End(E)$ | álgebra de endomorfismos de E |
| $M_n(K)$ | álgebra de matrices cuadradas $(n, n)$ de coeficientes en K |
| $\mathbf{Z}$ | anillo de enteros racionales |
| $\mathbf{Z}_{(p)}$ | anillo de $p$-enteros |
| $\mathbf{Z}[1/p]$ | anillo de racionales de la forma $a/p^k$ $(a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N})$ |
| $\mathbf{Z}_p$ | anillo de enteros $p$-ádicos |
| $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ | anillo de clases residuales de enteros módulo $n$ |
| $\mathbf{Z}[i]$ | anillo de enteros de GAUSS |
| $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ | anillo de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a \in \mathbf{Z}$ y $b \in \mathbf{Z}$ |
| $\mathbf{O}$ | álgebra de octoniones de CAYLEY |

## Módulos

| | |
|---|---|
| $H_n(M)$ | $n$-ésimo módulo de homología |
| $B_n(M)$ | $n$-ésimo módulo de bordes |
| $Z_n(M)$ | $n$-ésimo módulo de ciclos |
| $H^n(M)$ | $n$-ésimo módulo de cohomología |
| $B^n(M)$ | $n$-ésimo módulo de cobordes |
| $Z^n(M)$ | $n$-ésimo módulo de cociclos |

## Cuerpos

| | |
|---|---|
| $\mathbf{F}_{p^n}$ | cuerpo de cardinal $p^n$ con $p$ primo |
| $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ | cuerpo de clases residuales módulo $p$ con $p$ primo |
| $\mathbf{Q}$ | cuerpo de racionales |
| $\mathbf{R}$ | cuerpo de los números reales |
| $\mathbf{C}$ | cuerpo de los números complejos |
| $\mathbf{H}$ | cuerpo de cuaternios de HAMILTON |
| $\overline{\mathbf{Q}}$ | cuerpo de los números algebraicos |
| $K(X_1, ..., X_n)$ | cuerpo de fracciones racionales de $n$ indeterminadas |
| $\mathbf{Q}_p$ | cuerpo de números $p$-ádicos |
| $K(X)$ | cuerpo de fracciones racionales de una indeterminada |
| $\mathbf{Q}(\zeta_n) = \mathbf{Q}_n$ | cuerpo ciclotómico de índice $n$ |
| $\mathbf{C}((X))$ | cuerpo de fracciones de $\mathbf{C}[[X]]$ |
| $(K, \lvert\ \rvert)$ | cuerpo valorado |

## Grupos

| | |
|---|---|
| $S_n$; $\sigma_n$ | grupo de las permutaciones o grupo simétrico sobre $\{1, 2, ..., n\}$ |
| S(E); $\sigma$(E) | grupo simétrico de E |
| $A_n$ | grupo alternado de índice $n$ |
| GL(E) | grupo lineal |
| GA($\mathscr{E}$) | grupo afín |
| PGL(E) | grupo proyectivo |
| Cl(A) | grupo de clases del anillo A |
| O($q$), O(E) | grupo ortogonal |
| O($n$, K) | grupo ortogonal sobre $K^n$ |
| $O^+$(E) | grupo de las rotaciones vectoriales |
| SL(E) | grupo unimodular |
| $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ | toro de una dimensión |
| $\mathbf{T}^n$ | toro de $n$ dimensiones |
| Gal(E/K) | grupo de Galois de E sobre K |
| U(A) | grupo de unidades del anillo conmutativo A |
| SL(E) | grupo unimodular |
| PSL(E) | grupo proyectivo unimodular |
| Sp(E) | grupo simpléctico |
| PSp(E) | grupo proyectivo simpléctico |
| SO(E) | grupo especial ortogonal |
| SU(E) | grupo especial unitario |
| U(E) | grupo unitario |
| $\mathfrak{U}$ | grupo de ángulos orientados de semi-rectas |
| $\mathfrak{U}_0$ | grupo de ángulos orientados de rectas |

## topología

| | |
|---|---|
| $\overline{A}$ | adherencia de A |
| $\mathring{A}$ | interior de A |
| $d(x, y)$ | distancia de $x$ a $y$ |
| $d(x, A)$ | distancia de $x$ a la parte A |
| ($\mathscr{E}$, $d$) | espacio métrico |
| $B(x_0, r)$ | bola abierta |
| $B'(x_0, r)$ | bola cerrada |
| $D(z_0, r)$ | disco de centro $z_0$ y de radio $r$ |
| $\|\|u\|\|$ | norma de $u$ |
| ($\hat{X}$, $i$) | completado del espacio topológico X |
| $[T_0]$ | axioma de separación de un espacio de Kolmogorov |
| $[T_1]$ | axioma de separación de un espacio accesible |
| $[T_2]$ | axioma de separación de un espacio de HAUSDORFF |

| | |
|---|---|
| $[T_3]$ | axioma de separación de un espacio regular |
| $[T_4]$ | axioma de separación de un espacio normal |

## trigonometría

| | |
|---|---|
| $a°$ | $a$ grados (ángulo) |
| $a'$ | $a$ minuto (ángulo) |
| $a''$ | $a$ segundo (ángulo) |
| $37°28'29''$ | treinta y siete grados, veintiocho minutos, veintinueve segundos |
| rd | radián |
| gr | grado centesimal |
| sen | seno |
| cos | coseno |
| tg | tangente |
| cotg | cotangente |
| sec | secante |
| cosec | cosecante |
| arc sen | arco seno |
| arc cos | arco coseno |
| arc tg | arco tangente |
| arc cotg | arco cotangente |
| Arc sen; $\text{sen}^{-1}$ | gran arco seno |
| Arc cos; $\cos^{-1}$ | gran arco coseno |
| Arc cotg; $\text{cotg}^{-1}$ | gran arco cotangente |
| sh | seno hiperbólico |
| ch | coseno hiperbólico |
| th | tangente hiperbólica |
| coth | cotangente hiperbólica |
| Arg sh | argumento seno hiperbólico |
| Arg ch | argumento coseno hiperbólico |
| Arg th | argumento tangente hiperbólica |
| Arg coth | argumento cotangente hiperbólica |
| Gd | gudermaniano o amplitud hiperbólica |
| $\text{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, ..., $\text{sh}^2 x$, ... | $(\text{sen}\, x)^2$, $(\cos x)^2$, ..., $(\text{sh}\, x)^2$, ... |

# tablas numéricas

**TABLA 1**

## Cuadrados, cubos, raíces cuadradas, raíces cúbicas

$1 \leqslant n \leqslant 50$

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1,000 0 | 1,000 0 | 1,000 00 |
| 2 | 4 | 8 | 1,414 2 | 1,259 9 | 0,500 00 |
| 3 | 9 | 27 | 1,732 1 | 1,442 2 | 0,333 33 |
| 4 | 16 | 64 | 2,000 0 | 1,587 4 | 0,250 00 |
| 5 | 25 | 125 | 2,236 1 | 1,710 0 | 0,200 00 |
| 6 | 36 | 216 | 2,449 5 | 1,817 1 | 0,166 67 |
| 7 | 49 | 343 | 2,645 8 | 1,912 9 | 0,142 86 |
| 8 | 64 | 512 | 2,828 4 | 2,000 0 | 0,125 00 |
| 9 | 81 | 729 | 3,000 0 | 2,080 1 | 0,111 11 |
| 10 | 100 | 1 000 | 3,162 3 | 2,154 4 | 0,100 00 |
| 11 | 121 | 1 331 | 3,316 6 | 2,224 0 | 0,090 91 |
| 12 | 144 | 1 728 | 3,464 1 | 2,289 4 | 0,083 33 |
| 13 | 169 | 2 197 | 3,605 6 | 2,351 3 | 0,076 92 |
| 14 | 196 | 2 744 | 3,741 7 | 2,410 1 | 0,071 43 |
| 15 | 225 | 3 375 | 3,873 0 | 2,466 2 | 0,066 67 |
| 16 | 256 | 4 096 | 4,000 0 | 2,519,8 | 0,062 50 |
| 17 | 289 | 4 913 | 4,123 1 | 2,571 3 | 0,058 82 |
| 18 | 324 | 5 832 | 4,242 6 | 2,620 7 | 0,055 56 |
| 19 | 361 | 6 859 | 4,358 9 | 2,668 4 | 0,052 63 |
| 20 | 400 | 8 000 | 4,472 1 | 2,714 4 | 0,050 00 |
| 21 | 441 | 9 261 | 4,582 6 | 2,758 9 | 0,047 62 |
| 22 | 484 | 10 648 | 4,690 4 | 2,802 0 | 0,045 45 |
| 23 | 529 | 12 167 | 4,795 8 | 2,843 9 | 0,043 48 |
| 24 | 576 | 13 824 | 4,899 0 | 2,884 5 | 0,041 67 |
| 25 | 625 | 15 625 | 5,000 0 | 2,924 0 | 0,040 00 |
| 26 | 676 | 17 576 | 5,099 0 | 2,962 5 | 0,038 46 |
| 27 | 729 | 19 683 | 5,196 2 | 3,000 0 | 0,037 04 |
| 28 | 784 | 21 952 | 5,291 5 | 3,036 6 | 0,035 71 |
| 29 | 841 | 24 389 | 5,385 2 | 3,072 3 | 0,034 48 |
| 30 | 900 | 27 000 | 5,477 2 | 3,107 2 | 0,033 33 |
| 31 | 961 | 29 791 | 5,567 8 | 3,141 4 | 0,032 26 |
| 32 | 1 024 | 32 768 | 5,656 9 | 3,174 8 | 0,031 25 |
| 33 | 1 089 | 35 937 | 5,744 6 | 3,207 5 | 0,030 30 |
| 34 | 1 156 | 39 304 | 5,831 0 | 3,239 6 | 0,029 41 |
| 35 | 1 225 | 42 875 | 5,916 1 | 3,271 1 | 0,028 57 |
| 36 | 1 296 | 46 656 | 6,000 0 | 3,301 9 | 0,027 78 |
| 37 | 1 369 | 50 653 | 6,082 8 | 3,332 2 | 0,027 03 |
| 38 | 1 444 | 54 872 | 6,164 4 | 3,362 0 | 0,026 32 |
| 39 | 1 521 | 59 319 | 6,245 0 | 3,391 2 | 0,025 64 |
| 40 | 1 600 | 64 000 | 6,324 6 | 3,420 0 | 0,025 00 |
| 41 | 1 681 | 68 921 | 6,403 1 | 3,448 2 | 0,024 39 |
| 42 | 1 764 | 74 088 | 6,480 7 | 3,476 0 | 0,023 81 |
| 43 | 1 849 | 79 507 | 6,557 4 | 3,503 4 | 0,023 26 |
| 44 | 1 936 | 85 184 | 6,633 2 | 3,530 3 | 0,022 73 |
| 45 | 2 025 | 91 125 | 6,708 2 | 3,556 9 | 0 022 22 |
| 46 | 2 116 | 97 336 | 6,782 3 | 3,583 0 | 0 021 74 |
| 47 | 2 209 | 103 823 | 6,855 7 | 3,608 8 | 0,021 28 |
| 48 | 2 304 | 110 592 | 6,928 2 | 3,634 2 | 0,020 83 |
| 49 | 2 401 | 117 649 | 7,000 0 | 3,659 3 | 0,020 41 |
| 50 | 2 500 | 125 000 | 7,071 1 | 3,684 0 | 0,020 00 |

## e inversos de los enteros de 1 a 100

$51 \leqslant n \leqslant 100$

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\frac{1}{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 2 601 | 132 651 | 7,141 4 | 3,708 4 | 0,019 61 |
| 52 | 2 704 | 140 608 | 7,211 1 | 3,732 5 | 0,019 23 |
| 53 | 2 809 | 148 877 | 7,280 1 | 3,756 3 | 0,018 87 |
| 54 | 2 916 | 157 464 | 7,348 5 | 3,779 8 | 0,018 52 |
| 55 | 3 025 | 166 375 | 7,416 2 | 3,803 0 | 0,018 18 |
| 56 | 3 136 | 175 616 | 7,483 3 | 3,825 9 | 0,017 86 |
| 57 | 3 249 | 185 193 | 7,549 8 | 3,848 5 | 0,017 54 |
| 58 | 3 364 | 195 112 | 7,615 8 | 3,870 9 | 0,017 24 |
| 59 | 3 481 | 205 379 | 7,681 1 | 3,893 0 | 0,016 95 |
| 60 | 3 600 | 216 000 | 7,746 0 | 3,914 9 | 0,016 67 |
| 61 | 3 721 | 226 981 | 7,810 2 | 3,936 5 | 0,016 39 |
| 62 | 3 844 | 238 328 | 7,874 0 | 3,957 9 | 0,016 13 |
| 63 | 3 969 | 250 047 | 7,937 3 | 3,979 1 | 0,015 87 |
| 64 | 4 096 | 262 144 | 8,000 0 | 4,000 0 | 0,015 63 |
| 65 | 4 225 | 274 625 | 8,062 3 | 4,020 7 | 0,015 38 |
| 66 | 4 356 | 287 496 | 8,124 0 | 4,041 2 | 0,015 15 |
| 67 | 4 489 | 300 763 | 8,185 4 | 4,061 5 | 0,014 93 |
| 68 | 4 624 | 314 432 | 8,246 2 | 4,081 7 | 0,014 71 |
| 69 | 4 761 | 328 509 | 8,306 6 | 4,101 6 | 0,014 49 |
| 70 | 4 900 | 343 000 | 8,366 6 | 4,121 3 | 0,014 29 |
| 71 | 5 041 | 357 911 | 8,426 1 | 4,140 8 | 0,014 08 |
| 72 | 5 184 | 373 248 | 8,485 3 | 4,160 2 | 0,013 89 |
| 73 | 5 329 | 389 017 | 8,544 0 | 4,179 3 | 0,013 70 |
| 74 | 5 476 | 405 224 | 8,602 3 | 4,198 3 | 0,013 51 |
| 75 | 5 625 | 421 875 | 8,660 3 | 4,217 2 | 0,013 33 |
| 76 | 5 776 | 438 976 | 8,717 8 | 4,235 8 | 0,013 16 |
| 77 | 5 929 | 456 533 | 8,775 0 | 4,254 3 | 0,012 99 |
| 78 | 6 084 | 474 552 | 8,831 8 | 4,272 7 | 0,012 82 |
| 79 | 6 241 | 493 039 | 8,888 2 | 4,290 8 | 0,012 66 |
| 80 | 6 400 | 512 000 | 8,944 3 | 4,308 9 | 0,012 50 |
| 81 | 6 561 | 531 441 | 9,000 0 | 4,326 7 | 0,012 35 |
| 82 | 6 724 | 551 368 | 9,055 4 | 4,344 5 | 0,012 20 |
| 83 | 6 889 | 571 787 | 9,110 4 | 4,362 1 | 0,012 05 |
| 84 | 7 056 | 592 704 | 9,165 2 | 4,379 5 | 0,011 90 |
| 85 | 7 225 | 614 125 | 9,219 5 | 4,396 8 | 0,011 76 |
| 86 | 7 396 | 636 056 | 9,273 6 | 4,414 0 | 0,011 63 |
| 87 | 7 569 | 658 503 | 9,327 4 | 4,431 0 | 0,011 49 |
| 88 | 7 744 | 681 472 | 9,380 8 | 4,448 0 | 0,011 36 |
| 89 | 7 921 | 704 969 | 9,434 0 | 4,464 7 | 0,011 24 |
| 90 | 8 100 | 729 000 | 9,486 8 | 4,481 4 | 0,011 11 |
| 91 | 8 281 | 753 571 | 9,539 4 | 4,497 9 | 0,010 99 |
| 92 | 8 464 | 778 688 | 9,591 7 | 4,514 4 | 0,010 87 |
| 93 | 8 649 | 804 357 | 9,643 7 | 4,530 7 | 0,010 75 |
| 94 | 8 836 | 830 584 | 9,695 4 | 4,546 8 | 0,010 64 |
| 95 | 9 025 | 857 375 | 9,746 8 | 4,562 9 | 0,010 53 |
| 96 | 9 216 | 884 736 | 9,798 0 | 4,578 9 | 0,010 42 |
| 97 | 9 409 | 912 673 | 9,848 9 | 4,594 7 | 0,010 31 |
| 98 | 9 604 | 941 192 | 9,899 5 | 4,610 4 | 0,010 20 |
| 99 | 9 801 | 970 299 | 9,949 9 | 4,626 1 | 0,010 10 |
| 100 | 10 000 | 1 000 000 | 10,000 0 | 4,641 6 | 0,010 00 |

▶ ***Ejemplo de cuadrado mágico de orden 11***

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 51 | 85 | 119 | 32 | 55 | 89 | 2 | 36 | 70 | 104 |
| 40 | 74 | 108 | 21 | 44 | 78 | 112 | 25 | 59 | 93 | 6 |
| 63 | 97 | 10 | 33 | 67 | 101 | 14 | 48 | 82 | 116 | 29 |
| 86 | 120 | 22 | 56 | 90 | 3 | 37 | 71 | 105 | 18 | 52 |
| 109 | 11 | 45 | 79 | 113 | 26 | 60 | 94 | 7 | 41 | 75 |
| 0 | 34 | 68 | 102 | 15 | 49 | 83 | 117 | 30 | 64 | 98 |
| 23 | 57 | 91 | 4 | 38 | 72 | 106 | 19 | 53 | 87 | 110 |
| 46 | 80 | 114 | 27 | 61 | 95 | 8 | 42 | 76 | 99 | 12 |
| 69 | 103 | 16 | 50 | 84 | 118 | 31 | 65 | 88 | 1 | 35 |
| 92 | 5 | 39 | 73 | 107 | 20 | 54 | 77 | 111 | 24 | 58 |
| 115 | 28 | 62 | 96 | 9 | 43 | 66 | 100 | 13 | 47 | 81 |

▶ ***Tabla de los números primos hasta 1.000***

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 41 | 101 | 167 | 239 | 313 | 397 | 467 | 569 | 643 | 733 | 823 | 911 |
| 2 | 43 | 103 | 173 | 241 | 317 | 401 | 479 | 571 | 647 | 739 | 827 | 919 |
| 3 | 47 | 107 | 179 | 251 | 331 | 409 | 487 | 577 | 653 | 743 | 829 | 929 |
| 5 | 53 | 109 | 181 | 257 | 337 | 419 | 491 | 587 | 659 | 751 | 839 | 937 |
| 7 | 59 | 113 | 191 | 263 | 347 | 421 | 499 | 593 | 661 | 757 | 853 | 941 |
| 11 | 61 | 127 | 193 | 269 | 349 | 431 | 503 | 599 | 673 | 761 | 857 | 947 |
| 13 | 67 | 131 | 197 | 271 | 353 | 433 | 509 | 601 | 677 | 769 | 859 | 953 |
| 17 | 71 | 137 | 199 | 277 | 359 | 439 | 521 | 607 | 683 | 773 | 863 | 967 |
| 19 | 73 | 139 | 211 | 281 | 367 | 443 | 523 | 613 | 691 | 787 | 877 | 971 |
| 23 | 79 | 149 | 223 | 283 | 373 | 449 | 541 | 617 | 701 | 797 | 881 | 977 |
| 29 | 83 | 151 | 227 | 293 | 379 | 457 | 547 | 619 | 709 | 809 | 883 | 983 |
| 31 | 89 | 157 | 229 | 307 | 383 | 461 | 557 | 631 | 719 | 811 | 887 | 991 |
| 37 | 97 | 163 | 233 | 311 | 389 | 463 | 563 | 641 | 727 | 821 | 907 | 997 |

***Tabla de números al azar***

**Treinta y cinco mil**

| | *1-4* | *5-8* | *9-12* | *13-16* | *17-20* | *21-24* | *25-28* | *29-32* | *33-36* | *37-40* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 02 22 | 85 19 | 48 74 | 55 24 | 89 69 | 15 53 | 00 20 | 88 48 | 95 08 | 00 47 |
| *2* | 85 76 | 34 51 | 40 44 | 62 93 | 65 99 | 72 64 | 09 34 | 01 13 | 09 74 | 90 65 |
| *3* | 00 88 | 96 79 | 38 24 | 77 00 | 70 91 | 47 43 | 43 82 | 71 67 | 49 90 | 37 09 |
| *4* | 64 29 | 81 85 | 50 47 | 36 50 | 91 19 | 09 15 | 98 75 | 60 58 | 33 15 | 51 44 |
| *5* | 94 03 | 80 04 | 21 49 | 54 91 | 77 85 | 00 45 | 68 23 | 12 94 | 23 44 | 36 88 |
| *6* | 42 28 | 52 73 | 06 41 | 37 47 | 47 31 | 52 99 | 89 82 | 22 81 | 86 55 | 99 09 |
| *7* | 09 27 | 52 72 | 49 11 | 30 93 | 33 29 | 54 17 | 54 48 | 47 42 | 04 79 | 18 64 |
| *8* | 54 68 | 64 07 | 85 32 | 05 96 | 54 79 | 57 43 | 96 97 | 30 72 | 12 19 | 41 70 |
| *9* | 25 04 | 92 29 | 71 11 | 64 10 | 42 23 | 23 67 | 01 19 | 20 58 | 35 93 | 39 46 |
| *10* | 28 58 | 32 91 | 95 28 | 42 36 | 98 59 | 66 32 | 15 51 | 46 63 | 57 10 | 83 55 |
| *11* | 64 35 | 04 62 | 24 87 | 44 85 | 45 68 | 41 66 | 19 17 | 13 09 | 63 37 | 15 33 |
| *12* | 61 05 | 55 88 | 25 01 | 15 77 | 12 90 | 69 34 | 36 93 | 52 39 | 36 23 | 59 73 |
| *13* | 98 93 | 18 93 | 86 98 | 99 04 | 75 28 | 30 05 | 12 09 | 57 35 | 90 15 | 98 07 |
| *14* | 61 89 | 35 47 | 16 32 | 20 16 | 78 52 | 82 37 | 26 33 | 67 42 | 11 93 | 35 61 |
| *15* | 94 40 | 82 18 | 06 61 | 54 67 | 03 66 | 76 82 | 90 31 | 71 90 | 39 27 | 97 85 |
| *16* | 54 38 | 58 65 | 27 70 | 93 57 | 59 00 | 63 56 | 18 79 | 85 52 | 21 03 | 03 16 |
| *17* | 63 70 | 89 23 | 76 46 | 97 70 | 00 62 | 15 35 | 97 42 | 47 54 | 60 60 | 78 12 |
| *18* | 61 58 | 65 62 | 81 29 | 69 71 | 95 53 | 53 69 | 20 95 | 66 60 | 50 70 | 22 97 |
| *19* | 51 68 | 98 15 | 05 64 | 43 32 | 74 03 | 44 63 | 52 38 | 67 59 | 56 69 | 11 14 |
| *20* | 59 25 | 41 48 | 64 79 | 62 26 | 87 86 | 94 30 | 43 54 | 26 98 | 61 38 | 63 44 |
| *21* | 85 00 | 02 24 | 67 85 | 88 10 | 34 01 | 54 53 | 23 77 | 33 11 | 19 68 | 13 50 |
| *22* | 01 46 | 87 56 | 19 19 | 19 43 | 70 25 | 24 29 | 48 22 | 44 81 | 35 40 | 33 23 |
| *23* | 42 41 | 25 10 | 87 27 | 77 28 | 05 90 | 73 03 | 95 46 | 88 82 | 25 02 | 05 00 |
| *24* | 03 57 | 14 03 | 17 80 | 47 85 | 94 49 | 89 55 | 10 27 | 19 50 | 20 37 | 02 71 |
| *25* | 18 95 | 93 40 | 45 43 | 04 57 | 17 03 | 34 54 | 83 91 | 69 02 | 90 72 | 98 45 |

**Treinta y seis mil**

| | *1-4* | *5-8* | *9-12* | *13-16* | *17-20* | *21-24* | *25-28* | *29-32* | *33-36* | *37-40* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 74 11 | 04 66 | 68 52 | 70 11 | 97 01 | 55 36 | 63 49 | 42 68 | 82 15 | 48 64 |
| *2* | 31 54 | 98 82 | 61 64 | 40 50 | 42 48 | 96 84 | 82 42 | 55 15 | 72 34 | 90 96 |
| *3* | 85 51 | 93 55 | 89 63 | 47 92 | 88 42 | 00 08 | 21 52 | 27 28 | 77 48 | 02 42 |
| *4* | 19 95 | 97 55 | 27 91 | 15 20 | 96 25 | 48 75 | 49 95 | 88 68 | 36 09 | 66 17 |
| *5* | 75 74 | 55 98 | 33 02 | 36 99 | 11 84 | 07 71 | 40 65 | 95 54 | 01 90 | 14 32 |
| *6* | 76 70 | 16 48 | 38 14 | 94 74 | 00 37 | 24 88 | 26 40 | 05 87 | 01 87 | 00 82 |
| *7* | 12 32 | 28 29 | 14 36 | 09 42 | 22 65 | 85 40 | 79 23 | 60 18 | 58 89 | 60 95 |
| *8* | 51 94 | 67 37 | 40 50 | 74 11 | 57 07 | 54 90 | 55 60 | 75 66 | 74 59 | 43 34 |
| *9* | 59 05 | 38 38 | 35 63 | 71 92 | 51 61 | 07 57 | 33 15 | 47 80 | 14 72 | 67 27 |
| *10* | 61 54 | 47 95 | 21 81 | 99 54 | 84 68 | 49 46 | 04 87 | 23 10 | 93 18 | 34 62 |
| *11* | 39 88 | 12 18 | 78 69 | 61 17 | 41 02 | 82 98 | 57 15 | 80 65 | 08 18 | 25 81 |
| *12* | 28 62 | 67 03 | 44 53 | 15 36 | 14 27 | 47 96 | 35 38 | 29 07 | 84 99 | 51 14 |
| *13* | 36 57 | 58 34 | 23 47 | 96 09 | 36 91 | 82 76 | 68 90 | 21 61 | 55 86 | 74 17 |
| *14* | 99 08 | 02 16 | 80 53 | 35 89 | 06 64 | 54 32 | 96 97 | 74 19 | 33 04 | 06 70 |
| *15* | 63 09 | 70 60 | 97 25 | 37 17 | 72 52 | 39 87 | 15 15 | 98 30 | 51 57 | 06 42 |
| *16* | 97 60 | 16 18 | 55 02 | 72 66 | 63 80 | 21 24 | 20 23 | 18 13 | 84 73 | 83 73 |
| *17* | 40 35 | 86 60 | 42 36 | 12 67 | 10 64 | 97 65 | 96 18 | 41 67 | 59 91 | 42 75 |
| *18* | 28 46 | 35 52 | 20 78 | 72 37 | 23 78 | 53 42 | 92 51 | 26 14 | 61 35 | 49 00 |
| *19* | 30 16 | 53 45 | 09 38 | 08 72 | 03 92 | 86 92 | 91 44 | 96 12 | 68 34 | 30 86 |
| *20* | 46 28 | 16 25 | 24 40 | 90 62 | 85 78 | 10 68 | 26 14 | 78 07 | 47 97 | 94 91 |
| *21* | 34 53 | 93 74 | 37 82 | 93 68 | 50 32 | 56 81 | 15 70 | 78 54 | 37 33 | 97 30 |
| *22* | 99 88 | 08 59 | 17 46 | 26 25 | 32 70 | 13 62 | 73 02 | 34 58 | 46 18 | 89 59 |
| *23* | 31 57 | 05 77 | 58 49 | 14 59 | 77 89 | 35 73 | 54 07 | 30 65 | 59 68 | 82 98 |
| *24* | 54 05 | 48 94 | 94 27 | 76 81 | 68 16 | 97 85 | 03 80 | 49 25 | 10 37 | 43 88 |
| *25* | 82 36 | 57 45 | 47 95 | 42 13 | 86 48 | 02 36 | 50 36 | 36 32 | 85 38 | 04 15 |

TABLA 2

## Tabla trigonométrica de grados

| Grados | Senos | Tangentes | Cotangentes | Cosenos | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0175 | 0,0175 | 57,2900 | 0,9999 | 89 |
| 2 | 0,0349 | 0,0349 | 28,6363 | 0,9994 | 88 |
| 3 | 0,0523 | 0,0524 | 19,0811 | 0,9986 | 87 |
| 4 | 0,0698 | 0,0699 | 14,3007 | 0,9976 | 86 |
| 5 | 0,0872 | 0,0875 | 11,4301 | 0,9962 | 85 |
| 6 | 0,1045 | 0,1051 | 9,5144 | 0,9945 | 84 |
| 7 | 0,1219 | 0,1228 | 9,1443 | 0,9925 | 83 |
| 8 | 0,1392 | 0,1405 | 7,1154 | 0,9903 | 82 |
| 9 | 0,1564 | 0,1584 | 6,3138 | 0,9877 | 81 |
| 10 | 0,1736 | 0,1763 | 5,6713 | 0,9848 | 80 |
| 11 | 0,1908 | 0,1944 | 5,1446 | 0,9816 | 79 |
| 12 | 0,2079 | 0,2126 | 4,7046 | 0,9781 | 78 |
| 13 | 0,2250 | 0,2309 | 4,3315 | 0,9744 | 77 |
| 14 | 0,2419 | 0,2493 | 4,0108 | 0,9703 | 76 |
| 15 | 0,2588 | 0,2679 | 3,7321 | 0,9659 | 75 |
| 16 | 0,2756 | 0,2867 | 3,4874 | 0,9613 | 74 |
| 17 | 0,2924 | 0,3057 | 3,2709 | 0,9563 | 73 |
| 18 | 0,3090 | 0,3249 | 3,0777 | 0,9511 | 72 |
| 19 | 0,3256 | 0,3443 | 2,9042 | 0,9455 | 71 |
| 20 | 0,3420 | 0,3640 | 2,7475 | 0,9397 | 70 |
| 21 | 0,3584 | 0,3839 | 2,6051 | 0,9336 | 69 |
| 22 | 0,3746 | 0,4040 | 2,4751 | 0,9272 | 68 |
| 23 | 0,3907 | 0,4245 | 2,3559 | 0,9205 | 67 |
| 24 | 0,4067 | 0,4452 | 2,2460 | 0,9135 | 66 |
| 25 | 0,4226 | 0,4663 | 2,1445 | 0,9063 | 65 |
| 26 | 0,4384 | 0,4877 | 2,0503 | 0,8988 | 64 |
| 27 | 0,4540 | 0,5095 | 1,9626 | 0,8910 | 63 |
| 28 | 0,4695 | 0,5317 | 1,8807 | 0,8829 | 62 |
| 29 | 0,4848 | 0,5543 | 1,8040 | 0,8746 | 61 |
| 30 | 0,5000 | 0,5774 | 1,7321 | 0,8660 | 60 |
| 31 | 0,5150 | 0,6009 | 1,6643 | 0,8572 | 59 |
| 32 | 0,5299 | 0,6249 | 1,6003 | 0,8480 | 58 |
| 33 | 0,5446 | 0,6494 | 1,5399 | 0,8387 | 57 |
| 34 | 0,5592 | 0,6745 | 1,4826 | 0,8290 | 56 |
| 35 | 0,5736 | 0,7002 | 1,4281 | 0,8192 | 55 |
| 36 | 0,5878 | 0,7265 | 1,3764 | 0,8090 | 54 |
| 37 | 0,6018 | 0,7536 | 1,3270 | 0,7986 | 53 |
| 38 | 0,6157 | 0,7813 | 1,2799 | 0,7880 | 52 |
| 39 | 0,6293 | 0,8098 | 1,2349 | 0,7771 | 51 |
| 40 | 0,6428 | 0,8391 | 1,1918 | 0,7660 | 50 |
| 41 | 0,6561 | 0,8693 | 1,1504 | 0,7547 | 49 |
| 42 | 0,6691 | 0,9004 | 1,1106 | 0,7431 | 48 |
| 43 | 0,6820 | 0,9325 | 1,0724 | 0,7314 | 47 |
| 44 | 0,6947 | 0,9657 | 1,0355 | 0,7193 | 46 |
| 45 | 0,7071 | 1,0000 | 1,0000 | 0,7071 | 45 |
| | Cosenos | Cotangentes | Tangentes | Senos | Grados |

**TABLA 3**

## Tabla trigonométrica de grados

| Grados | Senos | Tangentes | Cotangentes | Cosenos | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0157 | 0,0157 | 63,6567 | 0,9999 | 99 |
| 2 | 0,0314 | 0,0314 | 31,8205 | 0,9995 | 98 |
| 3 | 0,0471 | 0,0472 | 21,2049 | 0,9989 | 97 |
| 4 | 0,0628 | 0,0629 | 15,8945 | 0,9980 | 96 |
| 5 | 0,0785 | 0,0787 | 12,7062 | 0,9969 | 95 |
| 6 | 0,0941 | 0,0945 | 10,5789 | 0,9956 | 94 |
| 7 | 0,1097 | 0,1104 | 9,0579 | 0,9940 | 93 |
| 8 | 0,1253 | 0,1263 | 7,9158 | 0,9921 | 92 |
| 9 | 0,1409 | 0,1423 | 7,0264 | 0,9900 | 91 |
| 10 | 0,1564 | 0,1584 | 6,3138 | 0,9877 | 90 |
| 11 | 0,1719 | 0,1745 | 5,7297 | 0,9851 | 89 |
| 12 | 0,1874 | 0,1908 | 5,2422 | 0,9823 | 88 |
| 13 | 0,2028 | 0,2071 | 4,8288 | 0,9792 | 87 |
| 14 | 0,2181 | 0,2235 | 4,4737 | 0,9759 | 86 |
| 15 | 0,2334 | 0,2401 | 4,1653 | 0,9724 | 85 |
| 16 | 0,2487 | 0,2568 | 3,8947 | 0,9686 | 84 |
| 17 | 0,2639 | 0,2736 | 3,6554 | 0,9646 | 83 |
| 18 | 0,2790 | 0,2905 | 3,4420 | 0,9603 | 82 |
| 19 | 0,2940 | 0,3076 | 3,2506 | 0,9558 | 81 |
| 20 | 0,3090 | 0,3249 | 3,0777 | 0,9511 | 80 |
| 21 | 0,3239 | 0,3424 | 2,9208 | 0,9461 | 79 |
| 22 | 0,3387 | 0,3600 | 2,7776 | 0,9409 | 78 |
| 23 | 0,3535 | 0,3779 | 2,6464 | 0,9354 | 77 |
| 24 | 0,3681 | 0,3959 | 2,5257 | 0,9298 | 76 |
| 25 | 0,3827 | 0,4142 | 2,4142 | 0,9239 | 75 |
| 26 | 0,3971 | 0,4327 | 2,3109 | 0,9178 | 74 |
| 27 | 0,4115 | 0,4515 | 2,2148 | 0,9114 | 73 |
| 28 | 0,4258 | 0,4706 | 2,1251 | 0,9048 | 72 |
| 29 | 0,4399 | 0,4899 | 2,0413 | 0,8980 | 71 |
| 30 | 0,4540 | 0,5095 | 1,9626 | 0,8910 | 70 |
| 31 | 0,4679 | 0,5295 | 1,8887 | 0,8838 | 69 |
| 32 | 0,4818 | 0,5498 | 1,8190 | 0,8763 | 68 |
| 33 | 0,4955 | 0,5704 | 1,7532 | 0,8686 | 67 |
| 34 | 0,5090 | 0,5914 | 1,6909 | 0,8607 | 66 |
| 35 | 0,5225 | 0,6128 | 1,6319 | 0,8526 | 65 |
| 36 | 0,5358 | 0,6346 | 1,5757 | 0,8443 | 64 |
| 37 | 0,5490 | 0,6569 | 1,5224 | 0,8358 | 63 |
| 38 | 0,5621 | 0,6796 | 1,4715 | 0,8271 | 62 |
| 39 | 0,5750 | 0,7028 | 1,4229 | 0,8181 | 61 |
| 40 | 0,5878 | 0,7265 | 1,3764 | 0,8090 | 60 |
| 41 | 0,6004 | 0,7508 | 1,3319 | 0,7997 | 59 |
| 42 | 0,6129 | 0,7757 | 1,2892 | 0,7902 | 58 |
| 43 | 0,6252 | 0,8012 | 1,2482 | 0,7804 | 57 |
| 44 | 0,6374 | 0,8273 | 1,2088 | 0,7705 | 56 |
| 45 | 0,6494 | 0,8541 | 1,1709 | 0,7604 | 55 |
| 46 | 0,6613 | 0,8816 | 1,1343 | 0,7501 | 54 |
| 47 | 0,6730 | 0,9099 | 1,0990 | 0,7396 | 53 |
| 48 | 0,6845 | 0,9391 | 1,0649 | 0,7290 | 52 |
| 49 | 0,6959 | 0,9691 | 1,0319 | 0,7181 | 51 |
| 50 | 0,7071 | 1,0000 | 1,0000 | 0,7071 | 50 |
| | Cosenos | Cotangentes | Tangentes | Senos | Grados |

TABLA 4

## Tabla trigonométrica de centésima en centésima de radián

| x | cos x | sen x | tg x | x | cos x | sen x | tg x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 1 | 0 | 0 | 0,50 | 0,877 6 | 0,479 4 | 0,546 3 |
| 0,01 | 1 | 0,010 0 | 0,010 0 | 0,51 | 0,872 7 | 0,488 2 | 0,559 4 |
| 0,02 | 0,999 8 | 0,020 0 | 0,020 0 | 0,52 | 0,867 8 | 0,496 9 | 0,572 6 |
| 0,03 | 0,999 6 | 0,030 0 | 0,030 0 | 0,53 | 0,862 8 | 0,505 5 | 0,585 9 |
| 0,04 | 0,999 2 | 0,040 0 | 0,040 0 | 0,54 | 0,857 7 | 0,514 1 | 0,599 4 |
| 0,05 | 0,998 8 | 0,050 0 | 0,050 0 | 0,55 | 0,852 5 | 0,522 7 | 0,613 1 |
| 0,06 | 0,998 2 | 0,060 0 | 0,060 1 | 0,56 | 0,847 3 | 0,531 2 | 0,626 9 |
| 0,07 | 0,997 6 | 0,069 9 | 0,070 1 | 0,57 | 0,841 9 | 0,539 6 | 0,641 0 |
| 0,08 | 0,996 8 | 0,079 9 | 0,080 2 | 0,58 | 0,836 5 | 0,548 0 | 0,655 2 |
| 0,09 | 0,996 0 | 0,089 9 | 0,090 2 | 0,59 | 0,830 9 | 0,556 4 | 0,669 6 |
| 0,10 | 0,995 0 | 0,099 8 | 0,100 3 | 0,60 | 0,825 3 | 0,564 6 | 0,684 1 |
| 0,11 | 0,994 0 | 0,109 8 | 0,110 4 | 0,61 | 0,819 6 | 0,572 9 | 0,698 9 |
| 0,12 | 0,992 8 | 0,119 7 | 0,120 6 | 0,62 | 0,813 9 | 0,581 0 | 0,713 9 |
| 0,13 | 0,991 6 | 0,129 6 | 0,130 7 | 0,63 | 0,808 0 | 0,589 1 | 0,729 1 |
| 0,14 | 0,990 2 | 0,139 5 | 0,140 9 | 0,64 | 0,802 1 | 0,597 2 | 0,744 5 |
| 0,15 | 0,988 8 | 0,149 4 | 0,151 1 | 0,65 | 0,796 1 | 0,605 2 | 0,760 2 |
| 0,16 | 0,987 2 | 0,159 3 | 0,161 4 | 0,66 | 0,790 0 | 0,613 1 | 0,776 1 |
| 0,17 | 0,985 6 | 0,169 2 | 0,171 7 | 0,67 | 0,783 8 | 0,621 0 | 0,792 3 |
| 0,18 | 0,983 8 | 0,179 0 | 0,182 0 | 0,68 | 0,777 6 | 0,628 8 | 0,808 7 |
| 0,19 | 0,982 0 | 0,188 9 | 0,192 3 | 0,69 | 0,771 2 | 0,636 5 | 0,825 3 |
| 0,20 | 0,980 1 | 0,198 7 | 0,202 7 | 0,70 | 0,764 8 | 0,644 2 | 0,842 3 |
| 0,21 | 0,978 0 | 0,208 5 | 0,213 1 | 0,71 | 0,758 4 | 0,651 8 | 0,859 5 |
| 0,22 | 0,975 9 | 0,218 2 | 0,223 6 | 0,72 | 0,751 8 | 0,659 4 | 0,877 1 |
| 0,23 | 0,973 7 | 0,228 0 | 0,234 1 | 0,73 | 0,745 2 | 0,666 9 | 0,894 9 |
| 0,24 | 0,971 3 | 0,237 7 | 0,244 7 | 0,74 | 0,738 5 | 0,674 3 | 0,913 1 |
| 0,25 | 0,968 9 | 0,247 4 | 0,255 3 | 0,75 | 0,731 7 | 0,681 6 | 0,931 6 |
| 0,26 | 0,966 4 | 0,257 1 | 0,266 0 | 0,76 | 0,724 8 | 0,688 9 | 0,950 5 |
| 0,27 | 0,963 8 | 0,266 7 | 0,276 8 | 0,77 | 0,717 9 | 0,696 1 | 0,969 7 |
| 0,28 | 0,961 1 | 0,276 4 | 0,287 6 | 0,78 | 0,710 9 | 0,703 3 | 0,989 3 |
| 0,29 | 0,958 2 | 0,286 0 | 0,298 4 | 0,79 | 0,703 8 | 0,710 4 | 1,009 2 |
| 0,30 | 0,955 3 | 0,295 5 | 0,309 3 | 0,80 | 0,696 7 | 0,717 4 | 1,029 6 |
| 0,31 | 0,952 3 | 0,305 1 | 0,320 3 | 0,81 | 0,689 5 | 0,724 3 | 1,050 5 |
| 0,32 | 0,949 2 | 0,314 6 | 0,331 4 | 0,82 | 0,682 2 | 0,731 1 | 1,071 7 |
| 0,33 | 0,946 0 | 0,324 0 | 0,342 5 | 0,83 | 0,674 9 | 0,737 9 | 1,093 4 |
| 0,34 | 0,942 8 | 0,333 5 | 0,353 7 | 0,84 | 0,667 5 | 0,744 6 | 1,115 6 |
| 0,35 | 0,939 4 | 0,342 9 | 0,365 0 | 0,85 | 0,660 0 | 0,751 3 | 1,138 3 |
| 0,36 | 0,935 9 | 0,352 3 | 0,376 4 | 0,86 | 0,652 4 | 0,757 8 | 1,161 6 |
| 0,37 | 0,932 3 | 0,361 6 | 0,387 9 | 0,87 | 0,644 8 | 0,764 3 | 1,185 3 |
| 0,38 | 0,928 7 | 0,370 9 | 0,399 4 | 0,88 | 0,637 2 | 0,770 7 | 1,209 7 |
| 0,39 | 0,924 9 | 0,380 2 | 0,411 1 | 0,89 | 0,629 4 | 0,777 1 | 1,234 6 |
| 0,40 | 0,921 1 | 0,389 4 | 0,422 8 | 0,90 | 0,621 6 | 0,783 3 | 1 260,2 |
| 0,41 | 0,917 1 | 0,398 6 | 0,434 6 | 0,91 | 0,613 7 | 0,789 5 | 1,286 4 |
| 0,42 | 0,913 1 | 0,407 8 | 0,446 6 | 0,92 | 0,605 8 | 0,795 6 | 1,313 3 |
| 0,43 | 0,909 0 | 0,416 9 | 0,458 6 | 0,93 | 0,597 8 | 0,801 6 | 1,340 9 |
| 0,44 | 0,904 8 | 0,425 9 | 0,470 8 | 0,94 | 0,589 8 | 0,807 6 | 1,369 2 |
| 0,45 | 0,900 4 | 0,435 0 | 0,483 1 | 0,95 | 0,581 7 | 0,813 4 | 1,398 4 |
| 0,46 | 0,896 1 | 0,443 9 | 0,495 4 | 0,96 | 0,573 5 | 0,819 2 | 1 428 4 |
| 0,47 | 0,891 6 | 0,452 9 | 0,508 0 | 0,97 | 0,565 3 | 0,824 9 | 1,459 2 |
| 0,48 | 0,887 0 | 0,461 8 | 0,520 6 | 0,98 | 0,557 0 | 0,830 5 | 1,491 0 |
| 0,49 | 0,882 3 | 0,470 6 | 0,533 4 | 0,99 | 0,548 7 | 0,836 0 | 1,523 7 |
| 0,50 | 0,877 6 | 0,479 4 | 0,546 3 | 1,00 | 0,540 3 | 0,841 5 | 1,557 4 |

## TABLA 5

# Funciones exponenciales e hiperbólicas

| x | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 1,00000 | 1,00000 | 0,00000 | 1,00000 | 0,00000 |
| 01 | 1,01005 | 0,99005 | 0,01000 | 1,00005 | 0,01000 |
| 02 | 1,02020 | 0,98020 | 0,02000 | 1,00020 | 0,02000 |
| 03 | 1,03045 | 0,97045 | 0,03000 | 1,00045 | 0,02999 |
| 04 | 1,04081 | 0,96079 | 0,04001 | 1,00080 | 0,03998 |
| 05 | 1,05127 | 0,95123 | 0,05002 | 1,00125 | 0,04996 |
| 06 | 1,06184 | 0,94176 | 0,06004 | 1,00180 | 0,05993 |
| 07 | 1,07251 | 0,93239 | 0,07006 | 1,00245 | 0,06989 |
| 08 | 1,08329 | 0,92312 | 0,08009 | 1,00320 | 0,07983 |
| 09 | 1,09417 | 0,91393 | 0,09012 | 1,00405 | 0,08976 |
| 10 | 1,10517 | 0,90484 | 0,10017 | 1,00500 | 0,09967 |
| 11 | 1,11628 | 0,89583 | 0,11022 | 1,00606 | 0,10956 |
| 12 | 1,12750 | 0,88692 | 0,12029 | 1,00721 | 0,11943 |
| 13 | 1,13883 | 0,87810 | 0,13037 | 1,00846 | 0,12927 |
| 14 | 1,15027 | 0,86936 | 0,14046 | 1,00982 | 0,13909 |
| 15 | 1,16183 | 0,86071 | 0,15056 | 1,01127 | 0,14889 |
| 16 | 1,17351 | 0,85214 | 0,16068 | 1,01283 | 0,15865 |
| 17 | 1,18530 | 0,84366 | 0,17082 | 1,01448 | 0,16838 |
| 18 | 1,19722 | 0,83527 | 0,18097 | 1,01624 | 0,17808 |
| 19 | 1,20925 | 0,82696 | 0,19115 | 1,01810 | 0,18775 |
| 20 | 1,22140 | 0,81873 | 0,20134 | 1,02007 | 0,19738 |
| 21 | 1,23368 | 0,81058 | 0,21155 | 1,02213 | 0,20697 |
| 22 | 1,24608 | 0,80252 | 0,22178 | 1,02430 | 0,21652 |
| 23 | 1,25860 | 0,79453 | 0,23203 | 1,02657 | 0,22603 |
| 24 | 1,27125 | 0,78663 | 0,24231 | 1,02894 | 0,23550 |
| 25 | 1,28403 | 0,77880 | 0,25261 | 1,03141 | 0,24492 |
| 26 | 1,29693 | 0,77105 | 0,26294 | 1,03399 | 0,25430 |
| 27 | 1,30996 | 0,76338 | 0,27329 | 1,03667 | 0,26362 |
| 28 | 1,32313 | 0,75578 | 0,28367 | 1,03946 | 0,27291 |
| 29 | 1,33643 | 0,74826 | 0,29408 | 1,04235 | 0,28213 |
| 30 | 1,34986 | 0,74082 | 0,30452 | 1,04534 | 0,29131 |
| 31 | 1,36343 | 0,73345 | 0,31499 | 1,04844 | 0,30044 |
| 32 | 1,37713 | 0,72615 | 0,32549 | 1,05164 | 0,30951 |
| 33 | 1,39097 | 0,71892 | 0,33602 | 1,05495 | 0,31852 |
| 34 | 1,40495 | 0,71177 | 0,34659 | 1,05836 | 0,32748 |
| 35 | 1,41907 | 0,70469 | 0,35719 | 1,06188 | 0,33638 |
| 36 | 1,43333 | 0,69768 | 0,36783 | 1,06550 | 0,34521 |
| 37 | 1,44773 | 0,69073 | 0,37850 | 1,06923 | 0,35399 |
| 38 | 1,46228 | 0,68386 | 0,38921 | 1,07307 | 0,36271 |
| 39 | 1,47698 | 0,67706 | 0,39996 | 1,07702 | 0,37136 |
| 40 | 1,49182 | 0,67032 | 0,41075 | 1,08107 | 0,37995 |
| 41 | 1,50682 | 0,66365 | 0,42158 | 1,08523 | 0,38847 |
| 42 | 1,52196 | 0,65705 | 0,43246 | 1,08950 | 0,39693 |
| 43 | 1,53726 | 0,65051 | 0,44337 | 1,09388 | 0,40532 |
| 44 | 1,55271 | 0,64404 | 0,45434 | 1,09837 | 0,41364 |
| 45 | 1,56831 | 0,63763 | 0,46534 | 1,10297 | 0,42190 |
| 46 | 1,58407 | 0,63128 | 0,47640 | 1,10768 | 0,43008 |
| 47 | 1,59999 | 0,62500 | 0,48750 | 1,11250 | 0,43820 |
| 48 | 1,61607 | 0,61878 | 0,49865 | 1,11743 | 0,44624 |
| 49 | 1,63232 | 0,61263 | 0,50984 | 1,12247 | 0,45422 |
| 50 | 1,64872 | 0,60653 | 0,52110 | 1,12763 | 0,46212 |

| x | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,50 | 1,64872 | 0,60653 | 0,52110 | 1,12763 | 0,46212 |
| 51 | 1,66529 | 0,60050 | 0,53240 | 1,13289 | 0,46995 |
| 52 | 1,68203 | 0,59452 | 0,54375 | 1,13827 | 0,47770 |
| 53 | 1,69893 | 0,58860 | 0,55516 | 1,14377 | 0,48538 |
| 54 | 1,71601 | 0,58275 | 0,56663 | 1,14938 | 0,49299 |
| 55 | 1,73325 | 0,57695 | 0,57815 | 1,15510 | 0,50052 |
| 56 | 1,75067 | 0,57121 | 0,58973 | 1,16094 | 0,50798 |
| 57 | 1,76827 | 0,56553 | 0,60137 | 1,16690 | 0,51536 |
| 58 | 1,78604 | 0,55990 | 0,61307 | 1,17297 | 0,52267 |
| 59 | 1,80399 | 0,55433 | 0,62483 | 1,17916 | 0,52990 |
| 0,60 | 1,82212 | 0,54881 | 0,63665 | 1,18547 | 0,53705 |
| 61 | 1,84043 | 0,54335 | 0,64854 | 1,19189 | 0,54413 |
| 62 | 1,85893 | 0,53794 | 0,66049 | 1,19844 | 0,55113 |
| 63 | 1,87761 | 0,53259 | 0,67251 | 1,20510 | 0,55805 |
| 64 | 1,89648 | 0,52729 | 0,68459 | 1,21189 | 0,56490 |
| 65 | 1,91554 | 0,52205 | 0,69675 | 1,21879 | 0,57167 |
| 66 | 1,93479 | 0,51685 | 0,70897 | 1,22582 | 0,57836 |
| 67 | 1,95424 | 0,51171 | 0,72126 | 1,23297 | 0,58498 |
| 68 | 1,97388 | 0,50662 | 0,73363 | 1,24025 | 0,59152 |
| 69 | 1,99372 | 0,50158 | 0,74607 | 1,24765 | 0,59798 |
| 0,70 | 2,01375 | 0,49659 | 0,75858 | 1,25517 | 0,60437 |
| 71 | 2,03399 | 0,49164 | 0,77117 | 1,26282 | 0,61068 |
| 72 | 2,05443 | 0,48675 | 0,78384 | 1,27059 | 0,61691 |
| 73 | 2,07508 | 0,48191 | 0,79659 | 1,27849 | 0,62307 |
| 74 | 2,09594 | 0,47711 | 0,80941 | 1,28652 | 0,62915 |
| 75 | 2,11700 | 0,47237 | 0,82232 | 1,29468 | 0,63515 |
| 76 | 2,13828 | 0,46767 | 0,83530 | 1,30297 | 0,64108 |
| 77 | 2,15977 | 0,46301 | 0,84838 | 1,31139 | 0,64693 |
| 78 | 2,18147 | 0,45841 | 0,86153 | 1,31994 | 0,65271 |
| 79 | 2,20340 | 0,45384 | 0,87478 | 1,32862 | 0,65841 |
| 0,80 | 2,22554 | 0,44933 | 0,88811 | 1,33743 | 0,66404 |
| 81 | 2,24791 | 0,44486 | 0,90152 | 1,34638 | 0,66959 |
| 82 | 2,27050 | 0,44043 | 0,91503 | 1,35547 | 0,67507 |
| 83 | 2,29332 | 0,43605 | 0,92863 | 1,36468 | 0,68048 |
| 84 | 2,31637 | 0,43171 | 0,94233 | 1,37404 | 0,68581 |
| 85 | 2,33965 | 0,42741 | 0,95612 | 1,38353 | 0,69107 |
| 86 | 2,36316 | 0,42316 | 0,97000 | 1,39316 | 0,69626 |
| 87 | 2,38691 | 0,41895 | 0,98398 | 1,40293 | 0,70137 |
| 88 | 2,41090 | 0,41478 | 0,99806 | 1,41284 | 0,70642 |
| 89 | 2,43513 | 0,41066 | 1,01224 | 1,42289 | 0,71139 |
| 0,90 | 2,45960 | 0,40657 | 1,02652 | 1,43309 | 0,71630 |
| 91 | 2,48432 | 0,40252 | 1,04090 | 1,44342 | 0,72113 |
| 92 | 2,50929 | 0,39852 | 1,05539 | 1,45390 | 0,72590 |
| 93 | 2,53451 | 0,39455 | 1,06998 | 1,46453 | 0,73059 |
| 94 | 2,55998 | 0,39063 | 1,08468 | 1,47530 | 0,73522 |
| 95 | 2,58571 | 0,38674 | 1,09948 | 1,48623 | 0,73978 |
| 96 | 2,61170 | 0,38289 | 1,11440 | 1,49729 | 0,74428 |
| 97 | 2,63794 | 0,37908 | 1,12943 | 1,50851 | 0,74870 |
| 98 | 2,66446 | 0,37531 | 1,14457 | 1,51988 | 0,75307 |
| 99 | 2,69123 | 0,37158 | 1,15983 | 1,53141 | 0,75736 |
| 1,00 | 2,71828 | 0,36788 | 1,17520 | 1,54308 | 0,76159 |

**TABLA 6**

## Mantisas de los logaritmos decimales

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0 000 | 0 043 | 0 086 | 0 128 | 0 170 | 0 212 | 0 253 | 0 294 | 0 334 | 0 374 | 10 |
| 1 | 0 414 | 0 453 | 0 492 | 0 531 | 0 569 | 0 607 | 0 645 | 0 682 | 0 719 | 0 755 | 1 |
| 2 | 0 792 | 0 828 | 0 864 | 0 899 | 0 934 | 0 969 | 1 004 | 1 038 | 1 072 | 1 106 | 2 |
| 3 | 1 139 | 1 173 | 1 206 | 1 239 | 1 271 | 1 303 | 1 335 | 1 367 | 1 399 | 1 430 | 3 |
| 4 | 1 461 | 1 492 | 1 523 | 1 553 | 1 584 | 1 614 | 1 644 | 1 673 | 1 703 | 1 732 | 4 |
| 5 | 1 761 | 1 790 | 1 818 | 1 847 | 1 875 | 1 903 | 1 931 | 1 959 | 1 987 | 2 014 | 5 |
| 6 | 2 041 | 2 068 | 2 095 | 2 122 | 2 148 | 2 175 | 2 201 | 2 227 | 2 253 | 2 279 | 6 |
| 7 | 2 304 | 2 330 | 2 355 | 2 380 | 2 405 | 2 430 | 2 455 | 2 480 | 2 504 | 2 529 | 7 |
| 8 | 2 553 | 2 577 | 2 601 | 2 625 | 2 648 | 2 672 | 2 695 | 2 718 | 2 742 | 2 765 | 8 |
| 9 | 2 788 | 2 810 | 2 833 | 2 856 | 2 878 | 2 900 | 2 923 | 2 945 | 2 967 | 2 989 | 9 |
| 20 | 3 010 | 3 032 | 3 054 | 3 075 | 3 096 | 3 118 | 3 139 | 3 160 | 3 181 | 3 201 | 20 |
| 1 | 3 222 | 3 243 | 3 263 | 3 284 | 3 304 | 3 324 | 3 345 | 3 365 | 3 385 | 3 404 | 1 |
| 2 | 3 424 | 3 444 | 3 464 | 3 483 | 3 502 | 3 522 | 3 541 | 3 560 | 3 579 | 3 598 | 2 |
| 3 | 3 617 | 3 636 | 3 655 | 3 674 | 3 692 | 3 711 | 3 729 | 3 747 | 3 766 | 3 784 | 3 |
| 4 | 3 802 | 3 820 | 3 838 | 3 856 | 3 874 | 3 892 | 3 909 | 3 927 | 3 945 | 3 962 | 4 |
| 5 | 3 979 | 3 997 | 4 014 | 4 031 | 4 048 | 4 065 | 4 082 | 4 099 | 4 116 | 4 133 | 5 |
| 6 | 4 150 | 4 166 | 4 183 | 4 200 | 4 216 | 4 232 | 4 249 | 4 265 | 4 281 | 4 298 | 6 |
| 7 | 4 314 | 4 330 | 4 346 | 4 362 | 4 378 | 4 393 | 4 409 | 4 425 | 4 440 | 4 456 | 7 |
| 8 | 4 472 | 4 487 | 4 502 | 4 518 | 4 533 | 4 548 | 4 564 | 4 579 | 4 594 | 4 609 | 8 |
| 9 | 4 624 | 4 639 | 4 654 | 4 669 | 4 683 | 4 698 | 4 713 | 4 728 | 4 742 | 4 757 | 9 |
| 30 | 4 771 | 4 786 | 4 800 | 4 814 | 4 829 | 4 843 | 4 857 | 4 871 | 4 886 | 4 900 | 30 |
| 1 | 4 914 | 4 928 | 4 942 | 4 955 | 4 969 | 4 983 | 4 997 | 5 011 | 5 024 | 5 038 | 1 |
| 2 | 5 051 | 5 065 | 5 079 | 5 092 | 5 105 | 5 119 | 5 132 | 5 145 | 5 159 | 5 172 | 2 |
| 3 | 5 185 | 5 198 | 5 211 | 5 224 | 5 237 | 5 250 | 5 263 | 5 276 | 5 289 | 5 302 | 3 |
| 4 | 5 315 | 5 328 | 5 340 | 5 353 | 5 366 | 5 378 | 5 391 | 5 403 | 5 416 | 5 428 | 4 |
| 5 | 5 441 | 5 453 | 5 465 | 5 478 | 5 490 | 5 502 | 5 514 | 5 527 | 5 539 | 5 551 | 5 |
| 6 | 5 563 | 5 575 | 5 587 | 5 599 | 5 611 | 5 623 | 5 635 | 5 647 | 5 658 | 5 670 | 6 |
| 7 | 5 682 | 5 694 | 5 705 | 5 717 | 5 729 | 5 740 | 5 752 | 5 763 | 5 775 | 5 786 | 7 |
| 8 | 5 798 | 5 809 | 5 821 | 5 832 | 5 843 | 5 855 | 5 866 | 5 877 | 5 888 | 5 899 | 8 |
| 9 | 5 911 | 5 922 | 5 933 | 5 944 | 5 955 | 5 966 | 5 977 | 5 988 | 5 999 | 6 010 | 9 |
| 40 | 6 021 | 6 031 | 6 042 | 6 053 | 6 064 | 6 075 | 6 085 | 6 096 | 6 107 | 6 117 | 40 |
| 1 | 6 128 | 6 138 | 6 149 | 6 160 | 6 170 | 6 180 | 6 191 | 6 201 | 6 212 | 6 222 | 1 |
| 2 | 6 232 | 6 243 | 6 253 | 6 263 | 6 274 | 6 284 | 6 294 | 6 304 | 6 314 | 6 325 | 2 |
| 3 | 6 335 | 6 345 | 6 355 | 6 365 | 6 375 | 6 385 | 6 395 | 6 405 | 6 415 | 6 425 | 3 |
| 4 | 6 435 | 6 444 | 6 454 | 6 464 | 6 474 | 6 484 | 6 493 | 6 503 | 6 513 | 6 522 | 4 |
| 5 | 6 532 | 6 542 | 6 551 | 6 561 | 6 571 | 6 580 | 6 590 | 6 599 | 6 609 | 6 618 | 5 |
| 6 | 6 628 | 6 637 | 6 646 | 6 656 | 6 665 | 6 675 | 6 684 | 6 693 | 6 702 | 6 712 | 6 |
| 7 | 6 721 | 6 730 | 6 739 | 6 749 | 6 758 | 6 767 | 6 776 | 6 785 | 6 794 | 6 803 | 7 |
| 8 | 6 812 | 6 821 | 6 830 | 6 839 | 6 848 | 6 857 | 6 866 | 6 875 | 6 884 | 6 893 | 8 |
| 49 | 6 902 | 6 911 | 6 920 | 6 928 | 6 937 | 6 946 | 6 955 | 6 964 | 6 972 | 6 981 | 49 |

## de los números de 100 a 1.000

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 50 | 6 990 | 6 998 | 7 007 | 7 016 | 7 024 | 7 033 | 7 042 | 7 050 | 7 059 | 7 067 | 50 |
| 1 | 7 076 | 7 084 | 7 093 | 7 101 | 7 110 | 7 118 | 7 126 | 7 135 | 7 143 | 7 152 | 1 |
| 2 | 7 160 | 7 168 | 7 177 | 7 185 | 7 193 | 7 202 | 7 210 | 7 218 | 7 226 | 7 235 | 2 |
| 3 | 7 243 | 7 251 | 7 259 | 7 267 | 7 275 | 7 284 | 7 292 | 7 300 | 7 308 | 7 316 | 3 |
| 4 | 7 324 | 7 332 | 7 340 | 7 348 | 7 356 | 7 364 | 7 372 | 7 380 | 7 388 | 7 396 | 4 |
| 5 | 7 404 | 7 412 | 7 419 | 7 427 | 7 435 | 7 443 | 7 451 | 7 459 | 7 466 | 7 474 | 5 |
| 6 | 7 482 | 7 490 | 7 497 | 7 505 | 7 513 | 7 520 | 7 528 | 7 536 | 7 543 | 7 551 | 6 |
| 7 | 7 559 | 7 566 | 7 574 | 7 582 | 7 589 | 7 597 | 7 604 | 7 612 | 7 619 | 7 627 | 7 |
| 8 | 7 634 | 7 642 | 7 649 | 7 657 | 7 664 | 7 672 | 7 679 | 7 686 | 7 694 | 7 701 | 8 |
| 9 | 7 709 | 7 716 | 7 723 | 7 731 | 7 738 | 7 745 | 7 752 | 7 760 | 7 767 | 7 774 | 9 |
| 60 | 7 782 | 7 789 | 7 796 | 7 803 | 7 810 | 7 818 | 7 825 | 7 832 | 7 839 | 7 846 | 60 |
| 1 | 7 853 | 7 860 | 7 868 | 7 875 | 7 882 | 7 889 | 7 896 | 7 903 | 7 910 | 7 917 | 1 |
| 2 | 7 924 | 7 931 | 7 938 | 7 945 | 7 952 | 7 959 | 7 966 | 7 973 | 7 980 | 7 987 | 2 |
| 3 | 7 993 | 8 000 | 8 007 | 8 014 | 8 021 | 8 028 | 8 035 | 8 041 | 8 048 | 8 055 | 3 |
| 4 | 8 062 | 8 069 | 8 075 | 8 082 | 8 089 | 8 096 | 8 102 | 8 109 | 8 116 | 8 122 | 4 |
| 5 | 8 129 | 8 136 | 8 142 | 8 149 | 8 156 | 8 162 | 8 169 | 8 176 | 8 182 | 8 189 | 5 |
| 6 | 8 195 | 8 202 | 8 209 | 8 215 | 8 222 | 8 228 | 8 235 | 8 241 | 8 248 | 8 254 | 6 |
| 7 | 8 261 | 8 267 | 8 274 | 8 280 | 8 287 | 8 293 | 8 299 | 8 306 | 8 312 | 8 319 | 7 |
| 8 | 8 325 | 8 331 | 8 338 | 8 344 | 8 351 | 8 357 | 8 363 | 8 370 | 8 376 | 8 382 | 8 |
| 9 | 8 388 | 8 395 | 8 401 | 8 407 | 8 414 | 8 420 | 8 426 | 8 432 | 8 439 | 8 445 | 9 |
| 70 | 8 451 | 8 457 | 8 463 | 8 470 | 8 476 | 8 482 | 8 488 | 8 494 | 8 500 | 8 506 | 70 |
| 1 | 8 513 | 8 519 | 8 525 | 8 531 | 8 537 | 8 543 | 8 549 | 8 555 | 8 561 | 8 567 | 1 |
| 2 | 8 573 | 8 579 | 8 585 | 8 591 | 8 597 | 8 603 | 8 609 | 8 615 | 8 621 | 8 627 | 2 |
| 3 | 8 633 | 8 639 | 8 645 | 8 651 | 8 657 | 8 663 | 8 669 | 8 675 | 8 681 | 8 686 | 3 |
| 4 | 8 692 | 8 698 | 8 704 | 8 710 | 8 716 | 8 722 | 8 727 | 8 733 | 8 739 | 8 745 | 4 |
| 5 | 8 751 | 8 756 | 8 762 | 8 768 | 8 774 | 8 779 | 8 785 | 8 791 | 8 797 | 8 802 | 5 |
| 6 | 8 808 | 8 814 | 8 820 | 8 825 | 8 831 | 8 837 | 8 842 | 8 848 | 8 854 | 8 859 | 6 |
| 7 | 8 865 | 8 871 | 8 876 | 8 882 | 8 887 | 8 893 | 8 899 | 8 904 | 8 910 | 8 915 | 7 |
| 8 | 8 921 | 8 927 | 8 932 | 8 938 | 8 943 | 8 949 | 8 954 | 8 960 | 8 965 | 8 971 | 8 |
| 9 | 8 976 | 8 982 | 8 987 | 8 993 | 8 998 | 9 004 | 9 009 | 9 015 | 9 020 | 9 025 | 9 |
| 80 | 9 031 | 9 036 | 9 042 | 9 047 | 9 053 | 9 058 | 9 063 | 9 069 | 9 074 | 9 079 | 80 |
| 1 | 9 085 | 9 090 | 9 096 | 9 101 | 9 106 | 9 112 | 9 117 | 9 122 | 9 128 | 9 133 | 1 |
| 2 | 9 138 | 9 143 | 9 149 | 9 154 | 9 159 | 9 165 | 9 170 | 9 175 | 9 180 | 9 186 | 2 |
| 3 | 9 191 | 9 196 | 9 201 | 9 206 | 9 212 | 9 217 | 9 222 | 9 227 | 9 232 | 9 238 | 3 |
| 4 | 9 243 | 9 248 | 9 253 | 9 258 | 9 263 | 9 269 | 9 274 | 9 279 | 9 284 | 9 289 | 4 |
| 5 | 9 294 | 9 299 | 9 304 | 9 309 | 9 315 | 9 320 | 9 325 | 9 330 | 9 335 | 9 340 | 5 |
| 6 | 9 345 | 9 350 | 9 355 | 9 360 | 9 365 | 9 370 | 9 375 | 9 380 | 9 385 | 9 390 | 6 |
| 7 | 9 395 | 9 400 | 9 405 | 9 410 | 9 415 | 9 420 | 9 425 | 9 430 | 9 435 | 9 440 | 7 |
| 8 | 9 445 | 9 450 | 9 455 | 9 460 | 9 465 | 9 469 | 9 474 | 9 479 | 9 484 | 9 489 | 8 |
| 9 | 9 494 | 9 499 | 9 504 | 9 509 | 9 513 | 9 518 | 9 523 | 9 528 | 9 533 | 9 538 | 9 |
| 90 | 9 542 | 9 547 | 9 552 | 9 557 | 9 562 | 9 566 | 9 571 | 9 576 | 9 581 | 9 586 | 90 |
| 1 | 9 590 | 9 595 | 9 600 | 9 605 | 9 609 | 9 614 | 9 619 | 9 624 | 9 628 | 9 633 | 1 |
| 2 | 9 638 | 9 643 | 9 647 | 9 652 | 9 657 | 9 661 | 9 666 | 9 671 | 9 675 | 9 680 | 2 |
| 3 | 9 685 | 9 689 | 9 694 | 9 699 | 9 703 | 9 708 | 9 713 | 9 717 | 9 722 | 9 727 | 3 |
| 4 | 9 731 | 9 736 | 9 741 | 9 745 | 9 750 | 9 754 | 9 759 | 9 763 | 9 768 | 9 773 | 4 |
| 5 | 9 777 | 9 782 | 9 786 | 9 791 | 9 795 | 9 800 | 9 805 | 9 809 | 9 814 | 9 818 | 5 |
| 6 | 9 823 | 9 827 | 9 832 | 9 836 | 9 841 | 9 845 | 9 850 | 9 854 | 9 859 | 9 863 | 6 |
| 7 | 9 868 | 9 872 | 9 877 | 9 881 | 9 886 | 9 890 | 9 894 | 9 899 | 9 903 | 9 908 | 7 |
| 8 | 9 912 | 9 917 | 9 921 | 9 926 | 9 930 | 9 934 | 9 939 | 9 943 | 9 948 | 9 952 | 8 |
| 99 | 9 956 | 9 961 | 9 965 | 9 969 | 9 974 | 9 978 | 9 983 | 9 987 | 9 991 | 9 996 | 99 |

## TABLA 7

### Logaritmos neperianos de los enteros de 1 a 99

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0,6931 | 1,0986 | 1,3863 | 1,6094 | 1,7918 | 1,9459 | 2,0794 | 2,197 |
| 1 | 2,3026 | 2,3979 | 2,4849 | 2,5649 | 2,6391 | 2,7081 | 2,7726 | 2,8332 | 2,8904 | 2,944 |
| 2 | 2,9957 | 3,0445 | 3,0910 | 3,1355 | 3,1781 | 3,2189 | 3,2581 | 3,2958 | 3,3322 | 3,367 |
| 3 | 3,4012 | 3,4340 | 3,4657 | 3,4965 | 3,5264 | 3,5553 | 3,5835 | 3,6109 | 3,6376 | 3,663 |
| 4 | 3,6889 | 3,7136 | 3,7377 | 3,7612 | 3,7842 | 3,8067 | 3,8286 | 3,8501 | 3,8712 | 3,891 |
| 5 | 3,9120 | 3,9318 | 3,9512 | 3,9703 | 3,9890 | 4,0073 | 4,0254 | 4,0431 | 4,0604 | 4,077 |
| 6 | 4,0943 | 4,1109 | 4,1271 | 4,1431 | 4,1589 | 4,1744 | 4,1897 | 4,2047 | 4,2195 | 4,234 |
| 7 | 4,2485 | 4,2627 | 4,2767 | 4,2905 | 4,3041 | 4,3175 | 4,3307 | 4,3438 | 4,3567 | 4,369 |
| 8 | 4,3820 | 4,2944 | 4,4067 | 4,4188 | 4,4308 | 4,4427 | 4,4543 | 4,4569 | 4,4773 | 4,488 |
| 9 | 4,4998 | 4,5109 | 4,5218 | 4,5326 | 4,5433 | 4,5539 | 4,5643 | 4,5747 | 4,5850 | 4,595 |

## TABLA 8

### Triángulo de Pascal (coeficientes binómicos $\binom{n}{k}$ o $C_n^k$)

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | | | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | | | | |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 | | | |
| 11 | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 | | |
| 12 | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 | 12 | 1 | |
| 13 | 1 | 13 | 78 | 286 | 715 | 1287 | 1716 | 1716 | 1287 | 715 | 286 | 78 | 13 | |
| 14 | 1 | 14 | 91 | 364 | 1001 | 2002 | 3003 | 3432 | 3003 | 2002 | 1001 | 364 | 91 | |
| 15 | 1 | 15 | 105 | 455 | 1365 | 3003 | 5005 | 6435 | 6435 | 5005 | 3003 | 1365 | 455 | 1 |
| 16 | 1 | 16 | 120 | 560 | 1820 | 4368 | 8008 | 11440 | 12870 | 11440 | 8008 | 4368 | 1820 | 5 |
| 17 | 1 | 17 | 136 | 680 | 2380 | 6188 | 12376 | 19448 | 24310 | 24310 | 19448 | 12376 | 6188 | 23 |
| 18 | 1 | 18 | 153 | 816 | 3060 | 8568 | 18564 | 31824 | 43758 | 48620 | 43758 | 31824 | 18564 | 85 |
| 19 | 1 | 19 | 171 | 969 | 3876 | 11628 | 27132 | 50388 | 75582 | 92378 | 92378 | 75582 | 50388 | 271 |
| 20 | 1 | 20 | 190 | 1140 | 4845 | 15504 | 38760 | 77520 | 125970 | 167960 | 184756 | 167960 | 125970 | 775 |
| 21 | 1 | 21 | 210 | 1330 | 5985 | 20349 | 54264 | 116280 | 203490 | 293930 | 352716 | 352716 | 293930 | 203 |
| 22 | 1 | 22 | 231 | 1540 | 7315 | 26334 | 74613 | 170544 | 319770 | 497420 | 646646 | 705432 | 646646 | 497 |
| 23 | 1 | 23 | 253 | 1771 | 8855 | 33649 | 100947 | 245157 | 490314 | 817190 | 1144066 | 1352078 | 1352078 | 1144 |
| 24 | 1 | 24 | 276 | 2024 | 10626 | 42504 | 134596 | 346104 | 735471 | 1307504 | 1961256 | 2496144 | 2704156 | 2496 |
| 25 | 1 | 25 | 300 | 2300 | 12650 | 53130 | 177100 | 480700 | 1081575 | 2042975 | 3268760 | 4457400 | 5200300 | 5200 |
| 26 | 1 | 26 | 325 | 2600 | 14950 | 65780 | 230230 | 657800 | 1562275 | 3124550 | 5311735 | 7726160 | 9657700 | 10400 |

## TABLA 9

### Números de Stirling de primera especie $S_n^k$

| $n$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | −1 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 2 | −3 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 4 | −6 | 11 | −6 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 5 | 24 | −50 | 35 | −10 | 1 | | | | | | | | | | |
| 6 | −120 | 274 | −225 | 85 | −15 | 1 | | | | | | | | | |
| 7 | 720 | −1764 | 1624 | −735 | 175 | −21 | 1 | | | | | | | | |
| 8 | −5040 | 13068 | −13132 | 6769 | −1960 | 322 | −28 | 1 | | | | | | | |
| 9 | 40320 | −109584 | 118124 | −67284 | 22449 | −4536 | 546 | −36 | 1 | | | | | | |
| 10 | −362830 | 1026576 | −1172700 | 723680 | −269325 | 63273 | −9450 | 870 | −45 | 1 | | | | | |
| 11 | 3628800 | −10628640 | 12753576 | −8409500 | 3416930 | −902055 | 157773 | −18150 | 1320 | −55 | 1 | | | | |
| 12 | −39916800 | 120543840 | −150917976 | 105258076 | −45995730 | 13339535 | −2637558 | 357423 | −32670 | 1925 | −66 | 1 | | | |
| 13 | 479001600 | −1486442880 | 1931559552 | −1414014888 | 657206836 | −206070150 | 44990231 | −6926634 | 749463 | −55770 | 2717 | −78 | 1 | | |
| 14 | −6227020800 | 19802759040 | −26596717056 | 20313753096 | −9957703756 | 3336118786 | −790943153 | 135036473 | −16669653 | 1474473 | −91091 | 3731 | −91 | 1 | |
| 15 | 87178291200 | −283465647360 | 392156797824 | −310989260400 | 159721605680 | −56663366760 | 14409322928 | −2681453775 | 368411615 | −37312275 | 2749747 | −143325 | 5005 | −105 | 1 |

## TABLA 10

### Números de Stirling de segunda especie $\sigma_n^k$ y números de Bell $B_n$

| $B_n$ | $n$ \ $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 3 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 52 | 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | | | | | | | |
| 203 | 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | | | | | | | |
| 877 | 7 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | | | | | | | |
| 4140 | 8 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | | | | | | | |
| 21147 | 9 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 | | | | | | |
| 115975 | 10 | 1 | 511 | 9330 | 34105 | 42525 | 22827 | 5880 | 750 | 45 | 1 | | | | | |
| 678570 | 11 | 1 | 1023 | 28501 | 145750 | 246730 | 179487 | 63987 | 11880 | 1155 | 55 | 1 | | | | |
| 4213597 | 12 | 1 | 2047 | 86526 | 611501 | 1379400 | 1323652 | 627396 | 159027 | 22275 | 1705 | 66 | 1 | | | |
| 27644437 | 13 | 1 | 4095 | 261625 | 2532530 | 7508501 | 9321312 | 5715424 | 1899612 | 359502 | 39325 | 2431 | 78 | 1 | | |
| 190899322 | 14 | 1 | 8191 | 788970 | 10391745 | 40075035 | 63436373 | 49329280 | 20912320 | 5135130 | 752752 | 66066 | 3367 | 91 | 1 | |
| 1382958545 | 15 | 1 | 16383 | 2375101 | 42355950 | 210766920 | 420693273 | 408741333 | 216627840 | 67128490 | 12662650 | 1479478 | 106470 | 4550 | 105 | 1 |

TABLA 11

## Distribución de la ley binómica

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

$n = 30$

| $k$ \ $p$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,739 7 | 0,545 5 | 0,401 0 | 0,293 9 | 0,214 6 | 0,156 3 | 0,113 4 | 0,082 0 | 0,059 1 | 0,042 4 |
| 1 | 0,224 2 | 0,334 0 | 0,372 1 | 0,367 3 | 0,338 9 | 0,299 2 | 0,256 0 | 0,213 8 | 0,175 2 | 0,141 3 |
| 2 | 0,032 8 | 0,098 8 | 0,166 9 | 0,221 9 | 0,258 6 | 0,278 9 | 0,279 4 | 0,269 6 | 0,251 3 | 0,227 7 |
| 3 | 0,003 1 | 0,018 8 | 0,048 2 | 0,086 3 | 0,127 0 | 0,165 0 | 0,196 3 | 0,218 8 | 0,231 9 | 0,236 1 |
| 4 | 0,000 2 | 0,002 6 | 0,010 1 | 0,024 3 | 0,045 1 | 0,071 1 | 0,099 7 | 0,128 4 | 0,154 8 | 0,177 1 |
| 5 | | 0,000 3 | 0,001 6 | 0,005 3 | 0,012 4 | 0,023 6 | 0,039 0 | 0,058 1 | 0,079 6 | 0,102 3 |
| 6 | | | 0,000 2 | 0,000 9 | 0,002 7 | 0,006 3 | 0,012 2 | 0,021 0 | 0,032 8 | 0,047 4 |
| 7 | | | | 0,000 1 | 0,000 5 | 0,001 4 | 0,003 2 | 0,006 3 | 0,011 1 | 0,018 0 |
| 8 | | | | | 0,000 1 | 0,000 3 | 0,000 7 | 0,001 6 | 0,003 2 | 0,005 8 |
| 9 | | | | | | | 0,000 1 | 0,000 3 | 0,000 8 | 0,001 6 |
| 10 | | | | | | | | 0,000 1 | 0,000 2 | 0,000 4 |
| 11 | | | | | | | | | | 0,000 1 |

$n = 40$

| $k$ \ $p$ | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,669 0 | 0,445 7 | 0,295 7 | 0,195 4 | 0,128 5 | 0,084 2 | 0,054 9 | 0,035 6 | 0,023 0 | 0,014 8 |
| 1 | 0,270 3 | 0,363 8 | 0,365 8 | 0,325 6 | 0,270 6 | 0,214 9 | 0,165 2 | 0,123 8 | 0,091 0 | 0,065 7 |
| 2 | 0,053 2 | 0,144 8 | 0,220 6 | 0,264 6 | 0,277 7 | 0,267 5 | 0,242 5 | 0,210 0 | 0,175 4 | 0,142 3 |
| 3 | 0,006 8 | 0,037 4 | 0,086 4 | 0,139 6 | 0,185 1 | 0,216 2 | 0,221 2 | 0,231 3 | 0,219 8 | 0,200 3 |
| 4 | 0,000 6 | 0,007 1 | 0,024 7 | 0,053 8 | 0,090 1 | 0,127 7 | 0,170 9 | 0,186 0 | 0,201 1 | 0,205 9 |
| 5 | | 0,001 0 | 0,005 5 | 0,016 1 | 0,034 2 | 0,058 7 | 0,087 2 | 0,116 5 | 0,143 2 | 0,164 7 |
| 6 | | 0,000 1 | 0,001 0 | 0,003 9 | 0,010 5 | 0,021 8 | 0,038 3 | 0,059 1 | 0,082 6 | 0,106 8 |
| 7 | | | 0,000 1 | 0,000 8 | 0,002 7 | 0,006 8 | 0,014 0 | 0,025 0 | 0,039 7 | 0,057 6 |
| 8 | | | | 0,000 1 | 0,000 6 | 0,001 8 | 0,004 3 | 0,009 0 | 0,016 2 | 0,026 4 |
| 9 | | | | | 0,000 1 | 0,000 4 | 0,001 2 | 0,002 8 | 0,005 7 | 0,010 4 |
| 10 | | | | | | 0,000 1 | 0,000 3 | 0,000 7 | 0,001 7 | 0,003 6 |
| 11 | | | | | | | 0,000 1 | 0,000 2 | 0,000 5 | 0,001 1 |
| 12 | | | | | | | | | 0,000 1 | 0,000 3 |
| 13 | | | | | | | | | | 0,000 1 |

## TABLA 12

### Distribución de la ley de Poisson de parámetro $\lambda$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

| $k$ \ $\lambda$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,90484 | 0,81873 | 0,74082 | 0,67032 | 0,60653 |
| 1 | 0,09048 | 0,16375 | 0,22225 | 0,26813 | 0,30327 |
| 2 | 0,00452 | 0,01637 | 0,03334 | 0,05362 | 0,07581 |
| 3 | 0,00015 | 0,00109 | 0,00333 | 0,00715 | 0,01263 |
| 4 | | 0,00005 | 0,00025 | 0,00071 | 0,00158 |
| 5 | | | 0,00001 | 0,00005 | 0,00016 |
| 6 | | | | | 0,00001 |

| $k$ \ $\lambda$ | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,54881 | 0,49659 | 0,44933 | 0,40657 | |
| 1 | 0,32929 | 0,34761 | 0,35946 | 0,36591 | |
| 2 | 0,09878 | 0,12166 | 0,14379 | 0,16466 | |
| 3 | 0,01976 | 0,02838 | 0,03834 | 0,04939 | |
| 4 | 0,00296 | 0,00496 | 0,00766 | 0,01111 | |
| 5 | 0,00035 | 0,00069 | 0,00123 | 0,00200 | |
| 6 | 0,00003 | 0,00008 | 0,00016 | 0,00030 | |
| 7 | | | 0,00001 | 0,00003 | |

| $k$ \ $\lambda$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,36788 | 0,13534 | 0,04978 | 0,01831 | 0,00673 |
| 1 | 0,36788 | 0,27067 | 0,14936 | 0,07326 | 0,03369 |
| 2 | 0,18394 | 0,27067 | 0,22404 | 0,14653 | 0,08422 |
| 3 | 0,06131 | 0,18045 | 0,22404 | 0,19537 | 0,14037 |
| 4 | 0,01532 | 0,09022 | 0,16803 | 0,19537 | 0,17547 |
| 5 | 0,00306 | 0,03609 | 0,10082 | 0,15629 | 0,17547 |
| 6 | 0,00051 | 0,01203 | 0,05040 | 0,10420 | 0,14622 |
| 7 | 0,00007 | 0,00343 | 0,02160 | 0,05954 | 0,10444 |
| 8 | | 0,00085 | 0,00810 | 0,02977 | 0,06527 |
| 9 | | 0,00019 | 0,00270 | 0,01323 | 0,03626 |
| 10 | | 0,00003 | 0,00081 | 0,00529 | 0,01813 |
| 11 | | | 0,00022 | 0,00192 | 0,00824 |
| 12 | | | 0,00005 | 0,00064 | 0,00343 |
| 13 | | | 0,00001 | 0,00019 | 0,00132 |
| 14 | | | | 0,00005 | 0,00047 |
| 15 | | | | 0,00001 | 0,00015 |
| 16 | | | | | 0,00004 |
| 17 | | | | | 0,00001 |

| k \ λ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00247 | 0,00091 | 0,00033 | 0,00012 | 0,00004 |
| 1 | 0,01487 | 0,00638 | 0,00268 | 0,00111 | 0,00045 |
| 2 | 0,04461 | 0,02234 | 0,01073 | 0,00499 | 0,00227 |
| 3 | 0,08923 | 0,05212 | 0,02862 | 0,01499 | 0,00756 |
| 4 | 0,13385 | 0,09122 | 0,05725 | 0,03373 | 0,01891 |
| 5 | 0,16062 | 0,12772 | 0,09160 | 0,06072 | 0,03783 |
| 6 | 0,16062 | 0,14900 | 0,12214 | 0,09109 | 0,06305 |
| 7 | 0,13768 | 0,14900 | 0,13959 | 0,11712 | 0,09007 |
| 8 | 0,10326 | 0,13038 | 0,13959 | 0,13176 | 0,11260 |
| 9 | 0,06883 | 0,10140 | 0,12408 | 0,13176 | 0,12511 |
| 10 | 0,04130 | 0,07008 | 0,09926 | 0,11858 | 0,12511 |
| 11 | 0,02252 | 0,04517 | 0,07219 | 0,09702 | 0,11374 |
| 12 | 0,01126 | 0,02635 | 0,04812 | 0,07276 | 0,09478 |
| 13 | 0,00519 | 0,01418 | 0,02961 | 0,05037 | 0,07290 |
| 14 | 0,00222 | 0,00709 | 0,01692 | 0,03238 | 0,05207 |
| 15 | 0,00089 | 0,00331 | 0,00902 | 0,01943 | 0,03471 |
| 16 | 0,00033 | 0,00144 | 0,00451 | 0,01093 | 0,02169 |
| 17 | 0,00011 | 0,00059 | 0,00212 | 0,00578 | 0,01276 |
| 18 | 0,00003 | 0,00023 | 0,00094 | 0,00289 | 0,00709 |
| 19 | 0,00001 | 0,00008 | 0,00039 | 0,00137 | 0,00373 |
| 20 | | 0,00003 | 0,00015 | 0,00061 | 0,00186 |
| 21 | | | 0,00006 | 0,00026 | 0,00088 |
| 22 | | | 0,00002 | 0,00010 | 0,00040 |
| 23 | | | | 0,00004 | 0,00017 |
| 24 | | | | 0,00001 | 0,00007 |
| 25 | | | | | 0,00002 |
| 26 | | | | | 0,00001 |

| k \ λ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,00001 | | | | |
| 1 | 0,00018 | 0,00007 | 0,00002 | 0,00001 | |
| 2 | 0,00101 | 0,00044 | 0,00019 | 0,00008 | 0,00003 |
| 3 | 0,00370 | 0,00177 | 0,00082 | 0,00038 | 0,00017 |
| 4 | 0,01018 | 0,00530 | 0,00269 | 0,00133 | 0,00064 |
| 5 | 0,02241 | 0,01274 | 0,00699 | 0,00373 | 0,00193 |
| 6 | 0,04109 | 0,02548 | 0,01515 | 0,00869 | 0,00483 |
| 7 | 0,06457 | 0,04368 | 0,02814 | 0,01739 | 0,01037 |
| 8 | 0,08879 | 0,06552 | 0,04573 | 0,03043 | 0,01944 |
| 9 | 0,10853 | 0,08736 | 0,06605 | 0,04734 | 0,03240 |
| 10 | 0,11938 | 0,10484 | 0,08587 | 0,06628 | 0,04861 |
| 11 | 0,11938 | 0,11437 | 0,10148 | 0,08435 | 0,06628 |
| 12 | 0,10943 | 0,11437 | 0,10994 | 0,09841 | 0,08285 |
| 13 | 0,09259 | 0,10557 | 0,10994 | 0,10599 | 0,09560 |
| 14 | 0,07275 | 0,09048 | 0,10209 | 0,10599 | 0,10244 |
| 15 | 0,05335 | 0,07239 | 0,08847 | 0,09892 | 0,10244 |
| 16 | 0,03668 | 0,05429 | 0,07188 | 0,08655 | 0,09603 |
| 17 | 0,02373 | 0,03832 | 0,05497 | 0,07128 | 0,08473 |
| 18 | 0,01450 | 0,02555 | 0,03970 | 0,05544 | 0,07061 |
| 19 | 0,00839 | 0,01613 | 0,02716 | 0,04085 | 0,05574 |
| 20 | 0,00461 | 0,00968 | 0,01765 | 0,02859 | 0,04181 |
| 21 | 0,00241 | 0,00553 | 0,01093 | 0,01906 | 0,02986 |
| 22 | 0,00121 | 0,00301 | 0,00645 | 0,01213 | 0,02036 |
| 23 | 0,00057 | 0,00157 | 0,00365 | 0,00738 | 0,01328 |
| 24 | 0,00026 | 0,00078 | 0,00197 | 0,00430 | 0,00830 |
| 25 | 0,00011 | 0,00037 | 0,00102 | 0,00241 | 0,00498 |
| 26 | 0,00004 | 0,00017 | 0,00051 | 0,00129 | 0,00287 |
| 27 | 0,00002 | 0,00007 | 0,00024 | 0,00067 | 0,00159 |
| 28 | | 0,00003 | 0,00011 | 0,00033 | 0,00085 |
| 29 | | 0,00001 | 0,00005 | 0,00016 | 0,00044 |
| 30 | | | 0,00002 | 0,00007 | 0,00022 |
| 31 | | | | 0,00003 | 0,00010 |
| 32 | | | | 0,00001 | 0,00005 |
| 33 | | | | | 0,00002 |
| 34 | | | | | 0,00001 |

| λ / E | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 1 | | | | | |
| 2 | 0,00001 | | | | |
| 3 | 0,00007 | 0,00003 | | | |
| 4 | 0,00030 | 0,00014 | 0,00006 | 0,00003 | 0,00001 |
| 5 | 0,00098 | 0,00049 | 0,00024 | 0,00011 | 0,00005 |
| 6 | 0,00262 | 0,00138 | 0,00071 | 0,00036 | 0,00018 |
| 7 | 0,00599 | 0,00337 | 0,00185 | 0,00099 | 0,00052 |
| 8 | 0,01198 | 0,00716 | 0,00416 | 0,00236 | 0,00130 |
| 9 | 0,02131 | 0,01352 | 0,00832 | 0,00498 | 0,00290 |
| 10 | 0,03409 | 0,02300 | 0,01498 | 0,00946 | 0,00581 |
| 11 | 0,04959 | 0,03554 | 0,02452 | 0,01635 | 0,01057 |
| 12 | 0,06612 | 0,05035 | 0,03678 | 0,02588 | 0,01762 |
| 13 | 0,08138 | 0,06584 | 0,05092 | 0,03783 | 0,02711 |
| 14 | 0,09301 | 0,07996 | 0,06548 | 0,05135 | 0,03874 |
| 15 | 0,09921 | 0,09062 | 0,07857 | 0,06504 | 0,05165 |
| 16 | 0,09921 | 0,09628 | 0,08839 | 0,07724 | 0,06456 |
| 17 | 0,09338 | 0,09628 | 0,09359 | 0,08632 | 0,07595 |
| 18 | 0,08300 | 0,09093 | 0,09359 | 0,09112 | 0,08459 |
| 19 | 0,06989 | 0,08136 | 0,08867 | 0,09112 | 0,08883 |
| 20 | 0,05592 | 0,06915 | 0,07980 | 0,08656 | 0,08883 |
| 21 | 0,04260 | 0,05598 | 0,06840 | 0,07832 | 0,08460 |
| 22 | 0,03098 | 0,04326 | 0,05596 | 0,06764 | 0,07691 |
| 23 | 0,02155 | 0,03197 | 0,04380 | 0,05587 | 0,06688 |
| 24 | 0,01437 | 0,02265 | 0,03285 | 0,04423 | 0,05573 |
| 25 | 0,00919 | 0,01540 | 0,02365 | 0,03362 | 0,04458 |
| 26 | 0,00566 | 0,01007 | 0,01637 | 0,02456 | 0,03429 |
| 27 | 0,00335 | 0,00634 | 0,01091 | 0,01728 | 0,02540 |
| 28 | 0,00191 | 0,00385 | 0,00701 | 0,01173 | 0,01814 |
| 29 | 0,00105 | 0,00225 | 0,00435 | 0,00768 | 0,01251 |
| 30 | 0,00056 | 0,00127 | 0,00261 | 0,00486 | 0,00834 |
| 31 | 0,00029 | 0,00070 | 0,00151 | 0,00298 | 0,00538 |
| 32 | 0,00014 | 0,00037 | 0,00085 | 0,00177 | 0,00336 |
| 33 | 0,00007 | 0,00019 | 0,00046 | 0,00102 | 0,00203 |
| 34 | 0,00003 | 0,00009 | 0,00024 | 0,00057 | 0,00119 |
| 35 | 0,00001 | 0,00004 | 0,00012 | 0,00030 | 0,00068 |
| 36 | | 0,00002 | 0,00006 | 0,00016 | 0,00038 |
| 37 | | 0,00001 | 0,00003 | 0,00008 | 0,00020 |
| 38 | | | 0,00001 | 0,00004 | 0,00010 |
| 39 | | | | 0,00002 | 0,00005 |
| 40 | | | | | 0,00002 |
| 41 | | | | | 0,00001 |

**TABLA 13**

## Densidad de la ley normal reducida

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

| $x$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,398 94 | 0,398 92 | 0,398 86 | 0,398 76 | 0,398 62 | 0,398 44 | 0,398 22 | 0,397 97 | 0,397 67 | 0,397 33 |
| 0,1 | 0,396 95 | 0,396 54 | 0,396 08 | 0,395 59 | 0,395 05 | 0,394 48 | 0,393 87 | 0,393 22 | 0,392 53 | 0,391 81 |
| 0,2 | 0,391 04 | 0,390 24 | 0,389 40 | 0,388 53 | 0,387 62 | 0,386 67 | 0,385 68 | 0,384 66 | 0,383 61 | 0,382 51 |
| 0,3 | 0,381 39 | 0,380 23 | 0,379 03 | 0,377 80 | 0,376 54 | 0,375 24 | 0,373 91 | 0,372 55 | 0,371 15 | 0,369 73 |
| 0,4 | 0,368 27 | 0,366 78 | 0,365 26 | 0,363 71 | 0,362 13 | 0,360 53 | 0,358 89 | 0,357 23 | 0,355 53 | 0,353 81 |
| 0,5 | 0,352 07 | 0,350 29 | 0,348 49 | 0,346 67 | 0,344 82 | 0,342 94 | 0,341 05 | 0,339 12 | 0,337 18 | 0,335 21 |
| 0,6 | 0,333 22 | 0,331 21 | 0,329 18 | 0,327 13 | 0,325 06 | 0,322 97 | 0,320 86 | 0,318 74 | 0,316 59 | 0,314 43 |
| 0,7 | 0,312 25 | 0,310 06 | 0,307 85 | 0,305 63 | 0,303 39 | 0,301 14 | 0,298 87 | 0,296 59 | 0,294 31 | 0,292 00 |
| 0,8 | 0,289 69 | 0,287 37 | 0,285 04 | 0,282 69 | 0,280 34 | 0,277 98 | 0,275 62 | 0,273 25 | 0,270 86 | 0,268 48 |
| 0,9 | 0,266 09 | 0,263 69 | 0,261 29 | 0,258 88 | 0,256 47 | 0,254 06 | 0,251 64 | 0,249 23 | 0,246 81 | 0,244 39 |
| 1,0 | 0,241 97 | 0,239 55 | 0,237 13 | 0,234 71 | 0,232 30 | 0,229 88 | 0,227 47 | 0,225 06 | 0,222 65 | 0,220 25 |
| 1,1 | 0,217 85 | 0,215 46 | 0,213 07 | 0,210 69 | 0,208 31 | 0,205 95 | 0,203 57 | 0,201 21 | 0,198 86 | 0,196 52 |
| 1,2 | 0,194 19 | 0,191 86 | 0,189 54 | 0,187 24 | 0,184 94 | 0,182 65 | 0,180 37 | 0,178 10 | 0,175 85 | 0,173 60 |
| 1,3 | 0,171 37 | 0,169 15 | 0,166 94 | 0,164 74 | 0,162 56 | 0,160 38 | 0,158 22 | 0,156 08 | 0,153 95 | 0,151 83 |
| 1,4 | 0,149 73 | 0,147 64 | 0,145 56 | 0,143 50 | 0,141 46 | 0,139 43 | 0,137 42 | 0,135 42 | 0,133 44 | 0,131 47 |
| 1,5 | 0,129 52 | 0,127 58 | 0,125 66 | 0,123 76 | 0,121 88 | 0,120 01 | 0,118 16 | 0,116 32 | 0,114 50 | 0,112 70 |
| 1,6 | 0,110 92 | 0,109 15 | 0,107 41 | 0,105 67 | 0,103 96 | 0,102 26 | 0,100 59 | 0,098 93 | 0,097 28 | 0,095 66 |
| 1,7 | 0,094 05 | 0,092 46 | 0,090 89 | 0,089 33 | 0,087 80 | 0,086 28 | 0,084 78 | 0,083 29 | 0,081 83 | 0,080 38 |
| 1,8 | 0,078 95 | 0,077 54 | 0,076 14 | 0,074 77 | 0,074 31 | 0,072 06 | 0,070 74 | 0,069 43 | 0,068 14 | 0,066 87 |
| 1,9 | 0,065 62 | 0,064 38 | 0,063 16 | 0,061 95 | 0,060 77 | 0,059 59 | 0,058 44 | 0,057 30 | 0,056 18 | 0,055 08 |
| 2,0 | 0,053 99 | 0,052 92 | 0,051 86 | 0,050 82 | 0,049 80 | 0,048 79 | 0,047 80 | 0,046 82 | 0,045 86 | 0,044 91 |
| 2,1 | 0,043 98 | 0,043 07 | 0,042 17 | 0,041 28 | 0,040 41 | 0,039 55 | 0,038 71 | 0,037 88 | 0,037 06 | 0,036 26 |
| 2,2 | 0,035 47 | 0,034 70 | 0,033 94 | 0,033 19 | 0,032 46 | 0,031 74 | 0,031 03 | 0,030 34 | 0,029 65 | 0,028 98 |
| 2,3 | 0,028 33 | 0,027 68 | 0,027 05 | 0,026 43 | 0,025 82 | 0,025 22 | 0,024 63 | 0,024 06 | 0,023 49 | 0,022 94 |
| 2,4 | 0,022 39 | 0,021 86 | 0,021 34 | 0,020 83 | 0,020 33 | 0,019 84 | 0,019 36 | 0,018 89 | 0,018 42 | 0,017 97 |
| 2.5 | 0,017 53 | 0,017 09 | 0,016 67 | 0,016 25 | 0,015 85 | 0,015 45 | 0,015 06 | 0,014 68 | 0,014 31 | 0,013 94 |
| 2.6 | 0,013 58 | 0,013 23 | 0,012 89 | 0,012 56 | 0,012 23 | 0,011 91 | 0,011 30 | 0,011 30 | 0,011 00 | 0,010 71 |
| 2,7 | 0,010 42 | 0,010 14 | 0,009 87 | 0,009 61 | 0,009 35 | 0,009 09 | 0,008 85 | 0,008 61 | 0,008 37 | 0,008 14 |
| 2,8 | 0,007 92 | 0,007 70 | 0,007 48 | 0,007 27 | 0,007 07 | 0,006 87 | 0,006 68 | 0,006 49 | 0,006 31 | 0,006 13 |
| 2,9 | 0,005 95 | 0,005 78 | 0,005 62 | 0,005 45 | 0,005 30 | 0,005 14 | 0,004 99 | 0,004 85 | 0,004 71 | 0,004 57 |

| $x$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3. | $443.10^{-5}$ | $327.10^{-5}$ | $238.10^{-5}$ | $172.10^{-5}$ | $123.10^{-5}$ | $873.10^{-6}$ | $612.10^{-6}$ | $425.10^{-6}$ | $292.10^{-6}$ | $199.10^{-6}$ |
| 4. | $134.10^{-6}$ | $89.10^{-6}$ | $59.10^{-6}$ | $39.10^{-6}$ | $25.10^{-6}$ | $16.10^{-6}$ | $10.10^{-6}$ | $64.10^{-7}$ | $40.10^{-7}$ | $24.10^{-7}$ |
| 5. | $15.10^{-7}$ | $90.10^{-8}$ | $54.10^{-8}$ | $32.10^{-8}$ | $19.10^{-8}$ | $11.10^{-8}$ | $62.10^{-9}$ | $35.10^{-9}$ | $20.10^{-9}$ | $11.10^{-9}$ |

**TABLA 14**

## Función de reparto de la ley normal reducida

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

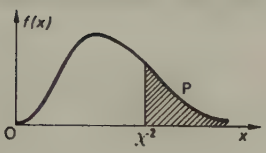
| $x$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0,500 00 | 0,503 99 | 0,507 98 | 0,511 97 | 0,515 95 | 0,519 94 | 0,523 92 | 0,527 90 | 0,531 88 | 0,535 86 |
| 0,1 | 0,539 83 | 0,543 80 | 0,547 76 | 0,551 72 | 0,555 67 | 0,559 62 | 0,563 56 | 0,567 50 | 0,571 42 | 0,575 35 |
| 0,2 | 0,579 26 | 0,583 17 | 0,587 06 | 0,590 95 | 0,594 84 | 0,598 71 | 0,602 57 | 0,606 42 | 0,610 26 | 0,614 09 |
| 0,3 | 0,617 91 | 0,621 72 | 0,625 52 | 0,629 30 | 0,633 07 | 0,636 83 | 0,640 58 | 0,644 31 | 0,648 03 | 0,651 73 |
| 0,4 | 0,655 42 | 0,659 10 | 0,662 76 | 0,666 40 | 0,670 03 | 0,673 65 | 0,677 24 | 0,680 82 | 0,684 39 | 0,687 93 |
| 0,5 | 0,691 46 | 0,694 97 | 0,698 47 | 0,701 94 | 0,705 40 | 0,708 84 | 0,712 26 | 0,715 66 | 0,719 04 | 0,722 40 |
| 0,6 | 0,725 75 | 0,729 07 | 0,732 37 | 0,735 65 | 0,738 91 | 0,742 15 | 0,745 37 | 0,748 57 | 0,751 75 | 0,754 90 |
| 0,7 | 0,758 04 | 0,761 15 | 0,764 24 | 0,767 31 | 0,770 35 | 0,773 37 | 0,776 37 | 0,779 35 | 0,782 30 | 0,785 24 |
| 0,8 | 0,788 14 | 0,791 03 | 0,793 89 | 0,796 73 | 0,799 55 | 0,802 34 | 0,805 11 | 0,807 85 | 0,810 57 | 0,813 27 |
| 0,9 | 0,815 94 | 0,818 59 | 0,821 21 | 0,823 81 | 0,826 39 | 0,828 94 | 0,831 47 | 0,833 98 | 0,836 46 | 0,838 91 |
| 1,0 | 0,841 34 | 0,843 75 | 0,846 14 | 0,848 50 | 0,850 83 | 0,853 14 | 0,855 43 | 0,857 69 | 0,859 93 | 0,862 14 |
| 1,1 | 0,864 33 | 0,866 50 | 0,868 64 | 0,870 76 | 0,872 86 | 0,874 93 | 0,876 98 | 0,879 00 | 0,881 00 | 0,882 98 |
| 1,2 | 0,884 93 | 0,886 86 | 0,888 77 | 0,890 65 | 0,892 51 | 0,894 35 | 0,896 17 | 0,897 96 | 0,899 73 | 0,901 47 |
| 1,3 | 0,903 20 | 0,904 90 | 0,906 58 | 0,908 24 | 0,909 88 | 0,911 49 | 0,913 09 | 0,914 66 | 0,916 21 | 0,917 74 |
| 1,4 | 0,919 24 | 0,920 73 | 0,922 20 | 0,923 64 | 0,925 07 | 0,926 47 | 0,927 86 | 0,929 22 | 0,930 56 | 0,931 89 |
| 1,5 | 0,933 19 | 0,934 48 | 0,935 74 | 0,936 99 | 0,938 22 | 0,939 43 | 0,940 62 | 0,941 79 | 0,942 95 | 0,944 08 |
| 1,6 | 0,945 20 | 0,946 30 | 0,947 38 | 0,948 45 | 0,949 50 | 0,950 53 | 0,951 54 | 0,952 54 | 0,953 52 | 0,954 49 |
| 1,7 | 0,955 43 | 0,956 37 | 0,957 28 | 0,958 19 | 0,959 07 | 0,959 94 | 0,960 80 | 0,961 64 | 0,962 46 | 0,963 27 |
| 1,8 | 0,964 07 | 0,964 85 | 0,965 62 | 0,966 38 | 0,967 12 | 0,967 84 | 0,968 56 | 0,969 26 | 0,969 95 | 0,970 62 |
| 1,9 | 0,971 28 | 0,971 93 | 0,972 57 | 0,973 20 | 0,973 81 | 0,974 41 | 0,975 00 | 0,975 58 | 0,976 15 | 0,976 70 |
| 2,0 | 0,977 25 | 0,977 78 | 0,978 31 | 0,978 82 | 0,979 32 | 0,979 82 | 0,980 30 | 0,980 77 | 0,981 24 | 0,981 69 |
| 2,1 | 0,982 14 | 0,982 57 | 0,983 00 | 0,983 41 | 0,983 82 | 0,984 22 | 0,984 61 | 0,985 00 | 0,985 37 | 0,985 74 |
| 2,2 | 0,986 11 | 0,986 45 | 0,986 79 | 0,987 13 | 0,987 45 | 0,987 78 | 0,988 09 | 0,988 40 | 0,988 70 | 0,988 99 |
| 2,3 | 0,989 28 | 0,989 56 | 0,989 83 | 0,990 10 | 0,990 36 | 0,990 61 | 0,990 86 | 0,991 11 | 0,991 34 | 0,991 58 |
| 2,4 | 0,991 80 | 0,992 02 | 0,992 24 | 0,992 45 | 0,992 66 | 0,992 86 | 0,993 05 | 0,993 24 | 0,993 43 | 0,993 61 |
| 2,5 | 0,993 79 | 0,993 96 | 0,994 13 | 0,994 30 | 0,994 46 | 0,994 61 | 0,994 77 | 0,994 92 | 0,995 06 | 0,995 20 |
| 2,6 | 0,995 34 | 0,995 47 | 0,995 60 | 0,995 73 | 0,995 85 | 0,995 98 | 0,996 09 | 0,996 21 | 0,996 32 | 0,996 43 |
| 2,7 | 0,996 53 | 0,996 64 | 0,996 74 | 0,996 83 | 0,996 93 | 0,997 02 | 0,997 11 | 0,997 20 | 0,997 28 | 0,997 36 |
| 2,8 | 0,997 44 | 0,997 52 | 0,997 60 | 0,997 67 | 0,997 74 | 0,997 81 | 0,997 88 | 0,997 95 | 0,998 01 | 0,998 07 |
| 2,9 | 0,998 13 | 0,998 19 | 0,998 25 | 0,998 31 | 0,998 36 | 0,998 41 | 0,998 46 | 0,998 51 | 0,998 56 | 0,998 61 |

## Valores de $1 - F(x)$ para los valores grandes de $x$

| $x$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3. | $135.10^{-5}$ | $968.10^{-6}$ | $687.10^{-6}$ | $483.10^{-6}$ | $337.10^{-6}$ | $233.10^{-6}$ | $159.10^{-6}$ | $108.10^{-6}$ | $723.10^{-7}$ | $481.10^{-7}$ |
| 4. | $317.10^{-7}$ | $207.10^{-7}$ | $133.10^{-7}$ | $85.10^{-7}$ | $54.10^{-7}$ | $34.10^{-7}$ | $21.10^{-7}$ | $13.10^{-7}$ | $79.10^{-8}$ | $48.10^{-8}$ |
| 5. | $29.10^{-8}$ | $17.10^{-8}$ | $10.10^{-8}$ | $58.10^{-9}$ | $33.10^{-9}$ | $19.10^{-9}$ | $11.10^{-9}$ | $60.10^{-10}$ | $33.10^{-10}$ | $18.10^{-10}$ |

**TABLA 15**

## Distribución de $\chi^2$ para $n$ grados de libertad
## Valores de $\chi^2$ con probabilidad P de superados

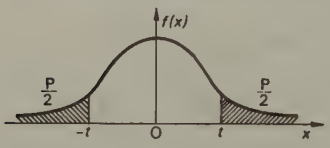



$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

| $n$ \ $P$ | 0,990 | 0,975 | 0,950 | 0,900 | 0,100 | 0,050 | 0,025 | 0,010 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000 2 | 0,001 0 | 0,003 9 | 0,015 8 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 10,83 |
| 2 | 0,02 | 0,05 | 0,10 | 0,21 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 13,82 |
| 3 | 0,12 | 0,22 | 0,35 | 0,58 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,34 | 16,27 |
| 4 | 0,30 | 0,48 | 0,71 | 1,06 | 7,78 | 9,49 | 11,14 | 13,28 | 18,47 |
| 5 | 0,55 | 0,83 | 1,15 | 1,61 | 9,24 | 11,07 | 12,83 | 15,09 | 20,52 |
| 6 | 0,87 | 1,24 | 1,64 | 2,20 | 10,64 | 12,59 | 14,45 | 16,81 | 22,46 |
| 7 | 1,24 | 1,69 | 2,17 | 2,83 | 12,02 | 14,07 | 16,01 | 18,47 | 24,32 |
| 8 | 1,65 | 2,18 | 2,73 | 3,49 | 13,36 | 15,51 | 17,53 | 20,09 | 26,13 |
| 9 | 2,09 | 2,70 | 3,33 | 4,17 | 14,68 | 16,92 | 19,02 | 21,67 | 27,88 |
| 10 | 2,56 | 3,25 | 3,94 | 4,87 | 15,99 | 18,31 | 20,48 | 23,21 | 29,59 |
| 11 | 3,05 | 3,82 | 4,57 | 5,58 | 17,27 | 19,67 | 21,92 | 24,72 | 31,26 |
| 12 | 3,57 | 4,40 | 5,23 | 6,30 | 18,55 | 21,03 | 23,34 | 26,22 | 32,91 |
| 13 | 4,11 | 5,01 | 5,89 | 7,04 | 19,81 | 22,36 | 24,74 | 27,69 | 34,53 |
| 14 | 4,66 | 5,63 | 6,57 | 7,79 | 21,06 | 23,68 | 26,12 | 29,14 | 36,12 |
| 15 | 5,23 | 6,26 | 7,26 | 8,55 | 22,31 | 25,00 | 27,49 | 30,58 | 37,70 |
| 16 | 5,81 | 6,91 | 7,96 | 9,31 | 23,54 | 26,30 | 28,84 | 32,00 | 39,25 |
| 17 | 6,41 | 7,56 | 8,67 | 10,08 | 24,77 | 27,59 | 30,19 | 33,41 | 40,79 |
| 18 | 7,01 | 8,23 | 9,39 | 10,86 | 25,99 | 28,87 | 31,53 | 34,80 | 42,31 |
| 19 | 7,63 | 8,91 | 10,12 | 11,65 | 27,20 | 39,14 | 32,85 | 36,19 | 43,82 |
| 20 | 8,26 | 9,59 | 10,85 | 12,44 | 28,41 | 31,41 | 34,17 | 37,57 | 45,32 |
| 21 | 8,90 | 10,28 | 11,59 | 13,24 | 29,61 | 32,67 | 35,48 | 38,93 | 46,80 |
| 22 | 9,54 | 10,98 | 12,34 | 14,04 | 30,81 | 33,92 | 36,78 | 40,29 | 48,27 |
| 23 | 10,20 | 11,69 | 13,09 | 14,85 | 32,01 | 35,17 | 38,08 | 41,64 | 49,73 |
| 24 | 10,86 | 12,40 | 13,85 | 15,66 | 33,20 | 36,41 | 39,37 | 42,98 | 51,18 |
| 25 | 11,52 | 13,12 | 14,61 | 16,47 | 34,38 | 37,65 | 40,65 | 44,31 | 52,62 |
| 26 | 12,20 | 13,84 | 15,38 | 17,29 | 35,56 | 38,88 | 41,92 | 45,64 | 54,05 |
| 27 | 12,88 | 14,57 | 16,15 | 18,11 | 36,74 | 40,11 | 43,19 | 46,96 | 55,48 |
| 28 | 13,57 | 15,31 | 16,93 | 18,94 | 37,92 | 41,34 | 44,46 | 48,28 | 56,89 |
| 29 | 14,26 | 16,05 | 17,71 | 19,77 | 39,09 | 42,56 | 45,72 | 49,59 | 58,30 |
| 30 | 14,95 | 16,79 | 18,49 | 20,60 | 40,26 | 43,77 | 46,98 | 50,89 | 49,70 |

**TABLA 16**

## Distribución de la ley de Student: Valores de $t$ para $n$ grados de libertad con la probabilidad P de ser superados en valores absolutos

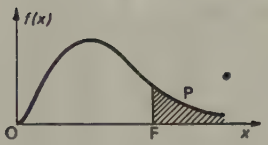



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

| $n$ \ $P$ | 0,90 | 0,80 | 0,70 | 0,60 | 0,50 | 0,40 | 0,30 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 636,619 |
| 2 | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,386 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,965 | 9,925 | 31,598 |
| 3 | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,541 | 5,841 | 12,929 |
| 4 | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,131 | 2,776 | 3,747 | 4,604 | 8,610 |
| 5 | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,365 | 4,032 | 6,869 |
| 6 | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 3,143 | 3,707 | 5,959 |
| 7 | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,998 | 3,499 | 5,408 |
| 8 | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,896 | 3,355 | 5,041 |
| 9 | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,821 | 3,250 | 4,781 |
| 10 | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228 | 2,764 | 3,169 | 4,587 |
| 11 | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,088 | 1,363 | 1,796 | 2,201 | 2,718 | 3,106 | 4,437 |
| 12 | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,782 | 2,179 | 2,681 | 3,055 | 4,318 |
| 13 | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160 | 2,650 | 3,012 | 4,221 |
| 14 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145 | 2,624 | 2,977 | 4,140 |
| 15 | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,314 | 1,753 | 2,131 | 2,602 | 2,947 | 4,073 |
| 16 | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120 | 2,583 | 2,921 | 4,015 |
| 17 | 0,128 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110 | 2,567 | 2,898 | 3,965 |
| 18 | 0,127 | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,101 | 2,552 | 2,878 | 3,922 |
| 19 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,539 | 2,861 | 3,883 |
| 20 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086 | 2,528 | 2,845 | 3,850 |
| 21 | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080 | 2,518 | 2,831 | 3,819 |
| 22 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,858 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074 | 2,508 | 2,819 | 3,792 |
| 23 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069 | 2,500 | 2,807 | 3,767 |
| 24 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064 | 2,492 | 2,797 | 3,745 |
| 25 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060 | 2,485 | 2,787 | 3,725 |
| 26 | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056 | 2,479 | 2,779 | 3,707 |
| 27 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052 | 2,473 | 2,771 | 3,690 |
| 28 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048 | 2,467 | 2,763 | 3,674 |
| 29 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045 | 2,462 | 2,756 | 3,659 |
| 30 | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042 | 2,457 | 2,750 | 3,646 |
| 40 | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 0,851 | 1,050 | 1,303 | 1,684 | 2,021 | 2,423 | 2,704 | 3,551 |
| 80 | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 0,848 | 1,046 | 1,296 | 1,671 | 2,000 | 2,390 | 2,660 | 3,460 |
| 120 | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 0,845 | 1,041 | 1,289 | 1,658 | 1,980 | 2,358 | 2,617 | 3,373 |
| $\infty$ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 0,842 | 1,036 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 3,291 |

**TABLA 17**

## Distribución de la ley de Fisher-Snédecor: Valores de F para $p$ y $q$ grados de libertad con la probabilidad P de ser superados




$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} p^{\frac{p}{2}} \times q^{\frac{p}{2}} \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(px+q)^{\frac{p+q}{2}}}$$

| $q$ | $p=1$ | | $p=2$ | | $p=3$ | | $p=4$ | | $p=5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P=$ 0,05 | $P=$ 0,01 | $P=$ 0,05 | $P=$ 0,01 | $P=$ 0,05 | $P=$ 0,01 | $P=$ 0,05 | $P=$ 0,01 | $P=$ 0,05 | $P=$ 0,01 |
| 1 | 161,4 | 4 052 | 199,5 | 4 999 | 215,7 | 5 403 | 224,6 | 5 625 | 230,2 | 5 764 |
| 2 | 18,51 | 98,49 | 19,00 | 99,00 | 19,16 | 99,17 | 19,25 | 99,25 | 19,30 | 99,30 |
| 3 | 10,13 | 34,12 | 9,55 | 30,81 | 9,28 | 29,46 | 9,12 | 28,71 | 9,01 | 28,24 |
| 4 | 7,71 | 21,20 | 6,94 | 18,00 | 6,59 | 16,69 | 6,39 | 15,98 | 6,26 | 15,52 |
| 5 | 6,61 | 16,26 | 5,79 | 13,27 | 5,41 | 12,06 | 5,19 | 11,39 | 5,05 | 10,97 |
| 6 | 5,99 | 13,74 | 5,14 | 10,91 | 4,76 | 9,78 | 4,53 | 9,15 | 4,39 | 8,75 |
| 7 | 5,59 | 12,25 | 4,74 | 9,55 | 4,35 | 8,45 | 4,12 | 7,85 | 3,97 | 7,45 |
| 8 | 5,32 | 11,26 | 4,46 | 8,65 | 4,07 | 7,59 | 3,84 | 7,01 | 3,69 | 6,63 |
| 9 | 5,12 | 10,56 | 4,26 | 8,02 | 3,86 | 6,99 | 3,63 | 6,42 | 3,48 | 6,06 |
| 10 | 4,96 | 10,04 | 4,10 | 7,56 | 3,71 | 6,55 | 3,48 | 5,99 | 3,33 | 5,64 |
| 11 | 4,84 | 9,65 | 3,98 | 7,20 | 3,59 | 6,22 | 3,36 | 5,67 | 3,20 | 5,32 |
| 12 | 4,75 | 9,33 | 3,88 | 6,93 | 3,49 | 5,95 | 3,26 | 5,41 | 3,11 | 5,06 |
| 13 | 4,67 | 9,07 | 3,80 | 6,70 | 3,41 | 5,74 | 3,18 | 5,20 | 3,02 | 4,86 |
| 14 | 4,60 | 8,86 | 3,74 | 6,51 | 3,34 | 5,56 | 3,11 | 5,03 | 2,96 | 4,69 |
| 15 | 4,54 | 8,68 | 3,68 | 6,36 | 3,29 | 5,42 | 3,06 | 4,89 | 2,90 | 4,56 |
| 16 | 4,49 | 8,53 | 3,63 | 6,23 | 3,24 | 5,29 | 3,01 | 4,77 | 2,85 | 4,44 |
| 17 | 4,45 | 8,40 | 3,59 | 6,11 | 3,20 | 5,18 | 2,96 | 4,67 | 2,81 | 4,34 |
| 18 | 4,41 | 8,28 | 3,55 | 6,01 | 3,16 | 5,09 | 2,93 | 4,58 | 2,77 | 4,25 |
| 19 | 4,38 | 8,18 | 3,52 | 5,93 | 3,13 | 5,01 | 2,90 | 4,50 | 2,74 | 4,17 |
| 20 | 4,35 | 8,10 | 3,49 | 5,85 | 3,10 | 4,94 | 2,87 | 4,43 | 2,71 | 4,10 |
| 21 | 4,32 | 8,02 | 3,47 | 5,78 | 3,07 | 4,87 | 2,84 | 4,37 | 2,68 | 4,04 |
| 22 | 4,30 | 7,94 | 3,44 | 5,72 | 3,05 | 4,82 | 2,82 | 4,31 | 2,66 | 3,99 |
| 23 | 4,28 | 7,88 | 3,42 | 5,66 | 3,03 | 4,76 | 2,80 | 4,26 | 2,64 | 3,94 |
| 24 | 4,26 | 7,82 | 3,40 | 5,61 | 3,01 | 4,72 | 2,78 | 4,22 | 2,62 | 3,90 |
| 25 | 4,24 | 7,77 | 3,38 | 5,57 | 2,99 | 4,68 | 2,76 | 4,18 | 2,60 | 3,86 |
| 26 | 4,22 | 7,72 | 3,37 | 5,53 | 2,98 | 4,64 | 2,74 | 4,14 | 2,59 | 3,82 |
| 27 | 4,21 | 7,68 | 3,35 | 5,49 | 2,96 | 4,60 | 2,73 | 4,11 | 2,57 | 3,78 |
| 28 | 4,20 | 7,64 | 3,34 | 5,45 | 2,95 | 4,57 | 2,71 | 4,07 | 2,56 | 3,75 |
| 29 | 4,18 | 7,60 | 3,33 | 5,42 | 2,93 | 4,54 | 2,70 | 4,04 | 2,54 | 3,73 |
| 30 | 4,17 | 7,56 | 3,32 | 5,39 | 2,92 | 4,51 | 2,69 | 4,02 | 2,53 | 3,70 |
| 40 | 4,08 | 7,31 | 3,23 | 5,18 | 2,84 | 4,31 | 2,61 | 3,83 | 2,45 | 3,51 |
| 60 | 4,00 | 7,08 | 3,15 | 4,98 | 2,76 | 4,13 | 2,52 | 3,65 | 2,37 | 3,34 |
| 120 | 3,92 | 6,85 | 3,07 | 4,79 | 2,68 | 3,95 | 2,45 | 3,48 | 2,29 | 3,17 |
| $\infty$ | 3,84 | 6,64 | 2,99 | 4,60 | 2,60 | 3,78 | 2,37 | 3,32 | 2,21 | 3,02 |

| $q$ | $p = 6$ | | $p = 8$ | | $p = 12$ | | $p = 24$ | | $p = \infty$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P =$ 0,05 | $P =$ 0,01 | $P =$ 0,05 | $P =$ 0,01 | $P =$ 0,05 | $P =$ 0,01 | $P =$ 0,05 | $P =$ 0,01 | $P =$ 0,05 | $P =$ 0,01 |
| 1 | 234,0 | 5 859 | 238,9 | 5 981 | 243,9 | 6 106 | 249,0 | 6 234 | 254,3 | 6 366 |
| 2 | 19,33 | 99,33 | 19,37 | 99,36 | 19,41 | 99,42 | 19,45 | 19,56 | 19,50 | 99,50 |
| 3 | 8,94 | 27,91 | 8,84 | 27,49 | 8,74 | 27,05 | 8,64 | 26,60 | 8,53 | 26,12 |
| 4 | 6,16 | 15,21 | 6,04 | 14,80 | 5,91 | 14,37 | 5,77 | 13,93 | 5,63 | 13,46 |
| 5 | 4,95 | 10,67 | 4,82 | 10,27 | 4,68 | 9,89 | 4,53 | 9,47 | 4,36 | 9,02 |
| 6 | 4,28 | 8,47 | 4,15 | 8,10 | 4,00 | 7,72 | 3,84 | 7,31 | 3,67 | 6,88 |
| 7 | 3,87 | 7,19 | 3,73 | 6,84 | 3,57 | 6,47 | 3,41 | 6,07 | 3,23 | 5,65 |
| 8 | 3,58 | 6,37 | 3,44 | 6,03 | 3,28 | 5,67 | 3,12 | 5,28 | 2,93 | 4,86 |
| 9 | 3,37 | 5,80 | 3,23 | 5,47 | 3,07 | 5,11 | 2,90 | 4,73 | 2,71 | 4,31 |
| 10 | 3,22 | 5,39 | 3,07 | 5,06 | 2,91 | 4,71 | 2,74 | 4,33 | 2,54 | 3,91 |
| 11 | 3,09 | 5,07 | 2,95 | 4,74 | 2,79 | 4,40 | 2,61 | 4,02 | 2,40 | 3,60 |
| 12 | 3,00 | 4,82 | 2,85 | 4,50 | 2,69 | 4,16 | 2,50 | 3,78 | 2,30 | 3,36 |
| 13 | 2,92 | 4,62 | 2,77 | 4,30 | 2,60 | 3,96 | 2,42 | 3,59 | 2,21 | 3,16 |
| 14 | 2,85 | 4,46 | 2,70 | 4,14 | 2,53 | 3,80 | 2,35 | 3,43 | 2,13 | 3,00 |
| 15 | 2,79 | 4,32 | 2,64 | 4,00 | 2,48 | 3,67 | 2,29 | 3,29 | 2,07 | 2,87 |
| 16 | 2,74 | 4,20 | 2,59 | 3,89 | 2,42 | 3,55 | 2,24 | 3,18 | 2,01 | 2,75 |
| 17 | 2,70 | 4,10 | 2,55 | 3,79 | 2,38 | 3,45 | 2,19 | 3,08 | 1,96 | 2,65 |
| 18 | 2,66 | 4,01 | 2,51 | 3,71 | 2,34 | 3,37 | 2,15 | 3,00 | 1,92 | 2,57 |
| 19 | 2,63 | 3,94 | 2,48 | 3,63 | 2,31 | 3,30 | 2,11 | 2,92 | 1,88 | 2,49 |
| 20 | 2,60 | 3,87 | 2,45 | 3,56 | 2,28 | 3,22 | 2,08 | 2,86 | 1,84 | 2,42 |
| 21 | 2,57 | 3,81 | 2,42 | 3,51 | 2,25 | 3,17 | 2,05 | 2,80 | 1,81 | 2,36 |
| 22 | 2,55 | 3,76 | 2,40 | 3,45 | 2,23 | 3,12 | 2,03 | 2,75 | 1,78 | 2,31 |
| 23 | 2,53 | 3,71 | 2,38 | 3,41 | 2,20 | 3,07 | 2,00 | 2,70 | 1,76 | 2,26 |
| 24 | 2,51 | 3,67 | 2,36 | 3,36 | 2,18 | 3,03 | 1,98 | 2,66 | 1,73 | 2,21 |
| 25 | 2,49 | 3,63 | 2,34 | 3,32 | 2,16 | 2,99 | 1,96 | 2,62 | 1,71 | 2,17 |
| 26 | 2,47 | 3,59 | 2,32 | 3,29 | 2,15 | 2,96 | 1,95 | 2,58 | 1,69 | 2,13 |
| 27 | 2,46 | 3,56 | 2,30 | 3,26 | 2,13 | 2,93 | 1,93 | 2,55 | 1,67 | 2,10 |
| 28 | 2,44 | 3,53 | 2,29 | 3,23 | 2,12 | 2,90 | 1,91 | 2,52 | 1,65 | 2,06 |
| 29 | 2,43 | 3,50 | 2,28 | 3,20 | 2,10 | 2,87 | 1,90 | 2,49 | 1,64 | 2,03 |
| 30 | 2,42 | 3,47 | 2,27 | 3,17 | 2,09 | 2,86 | 1,89 | 2,47 | 1,62 | 2,01 |
| 40 | 2,34 | 3,29 | 2,18 | 2,99 | 2,00 | 2,66 | 1,79 | 2,29 | 1,51 | 1,80 |
| 60 | 2,25 | 3,12 | 2,10 | 2,82 | 1,92 | 2,50 | 1,70 | 2,12 | 1,39 | 1,60 |
| 120 | 2,17 | 2,96 | 2,01 | 2,66 | 1,83 | 2,34 | 1,61 | 1,95 | 1,25 | 1,38 |
| $\infty$ | 2,09 | 2,80 | 1,94 | 2,51 | 1,75 | 2,18 | 1,52 | 1,79 | 1,00 | 1,00 |

The Seattle Public Library

0 01 00 7230232 5

Este diccionario –uno de los más completos del mundo en su especialidad– se caracteriza por la riqueza y diversidad de las informaciones que reúne, así como por la variedad de públicos de diferente nivel a los que se dirige. Desde las nociones más elementales hasta las formulaciones y conceptos matemáticos hoy en curso de formación, se van recogiendo cuidadosa y extensamente las materias que forman parte de nuestros programas de enseñanza secundaria, universitaria y técnica, insistiendo puntualmente en las relaciones que engarzan la matemática pura con las ciencias experimentales y sus aplicaciones industriales. Se logra cubrir así un amplio espectro de materias, que abarcan los campos de la lógica, conjuntos, aritmética, combinatoria, álgebra, geometría, análisis, mecánica, probabilidades, estadística... Tal heterogeneidad viene expresada en un rico vocabulario de 7.600 términos clave –cada uno referente a una noción distinta, principal o secundaria, centrada sobre una definición–, así como en los símbolos y fórmulas que les corresponden. A través de definiciones, ejemplos, resultados, comentarios e ilustraciones –unas 700 aproximadamente– el usuario de este libro podrá alcanzar en lo esencial una visión completa y de conjunto de cada noción, así como de cuantos conceptos con ella se relacionan.

ISBN 84-460-1254-5
9 788446 012542

-akal-
EDICIONES